

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
«МОРСКОЙ ГИДРОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН»**

А.Е. Букатов

**Волны в море
с плавающим ледяным покровом**

Севастополь 2017

УДК 551.46: 532.59: 539.3
ББК 26.221
Б90

Печатается по решению Ученого совета ФГБУН МГИ

Рецензенты:

д. ф.-м. наук, профессор Н.Д. Копачевский
д. ф.-м. наук, профессор К.В. Показеев

Букатов А.Е.

Б90 Волны в море с плавающим ледяным покровом / А. Е. Букатов. –
Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. – 360 с.
ISBN 978-5-9908460-2-9

В монографии приведены результаты теоретических исследований свободных и вынужденных поверхностных и внутренних волн в море с плавающим ледяным покровом. В качестве генератора волн рассмотрены вертикальные подвижки участка дна бассейна, локализованные возмущения морской поверхности и поверхности скачка плотности, импульсные и периодические давления, подводный источник, движущиеся по льду нагрузки постоянной и переменной интенсивности. Дан анализ зависимости волновых возмущений в жидкости и на поверхности бассейна от вида генератора, плотностной стратификации, характеристик ледяного покрова и ледового сжатия.

Для научных и инженерно-технических работников, занятых в области океанологии, гидродинамики, гидроупругости, а также преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Bukatov A.E.

Б90 Waves in the sea with a floating ice cover / A. E. Bukatov. – Sevastopol:
FSBSI MHI, 2017. – 360 p.
ISBN 978-5-9908460-2-9

In the monograph results of theoretical researches of free and forced surface and internal waves in the sea with a floating ice cover are made. As the waves generator a vertical motions of a basin's bottom, the localized disturbances of a sea surface and a layer of density jump, pulse and periodic pressures, an underwater source, moving over the ice a constant and variable intensity loads are considered. The analysis of dependence of wave disturbances in a liquid and on a basin surface from a generator type, density stratification, an ice cover characteristics and ice compression are given.

The monograph is intended for a scientific and technical and engineering employees engaged in oceanology, hydrodynamics, hydroelasticity and also for lecturers, post-graduate students and senior students of relevant specialties.

УДК 551.46: 532.59: 539.3
ББК 26.221

ISBN 978-5-9908460-2-9

© Букатов А. Е., 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Часть I. Волны в однородном море с ледяным покровом	
Глава 1. Свободные волны.....	8
1.1. Поверхностные гравитационные волны в бассейне с плавающим битым льдом.....	8
1.2. Изгибно-гравитационные волны в покрытом сплошным упругим льдом бассейне	11
1.3. Влияние сдвига и инерции вращения поперечных сечений на колебания ледяного покрова.....	16
1.4. Изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии	23
1.5. Влияние вязких свойств ледяного покрова на характеристики поверхностных волн	28
Глава 2. Волны от периодических и импульсных возмущений.....	32
2.1. Влияние снежного покрова на изгибно-гравитационные волны от периодических возмущений.....	32
2.2. Влияние продольного растяжения на развитие изгибно- гравитационных волн от периодических возмущений.....	35
2.3. Развитие изгибно-гравитационных волн от импульсных возмущений в условиях продольного растяжения.....	41
2.4. Влияние ледового сжатия на развитие волн от периодических возмущений	45
2.5. Развитие изгибно-гравитационных волн от импульсных возмущений в условиях ледового сжатия	52
2.6. Развитие изгибно-гравитационных волн от периодических возмущений в условиях неравномерного ледового сжатия.....	55
Глава 3. Неустановившиеся волны в условиях стационарного потока	59
3.1. Влияние битого льда на волны от периодических поверхностных давлений	59
3.2. Влияние сплошного упругого льда на волны от периодических поверхностных давлений	66
3.3. Возбуждение волн независящими от времени давлениями при ледовом сжатии.....	77
3.4. Волны от периодических поверхностных давлений в условиях продольного растяжения	84
3.5. Влияние ледового сжатия на волны от периодических поверхностных давлений	90
3.6. Влияние вертикального сдвига скорости потока на волновое возмущение от постоянных поверхностных давлений при ледовом сжатии	103

Глава 4. Трехмерные волны при движении области постоянных давлений	113
4.1. Установившиеся изгибно-гравитационные колебания ледяного покрова	113
4.2. Развитие колебаний плавающей упругой равномерно растянутой ледяной пластины	120
4.3. Развитие изгибно-гравитационных волн в условиях равномерного ледового сжатия	125
4.4. Пространственная структура поля скорости горизонтальных волновых течений под ледяным покровом	131
4.5. Генерация изгибных деформаций ледяного покрова при движении сосредоточенной нагрузки по сложной траектории	137
Глава 5. Трехмерные волны при движении области давлений переменной интенсивности	150
5.1. Влияние битого льда на неустановившиеся волны	150
5.2. Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны	157
5.3. Влияние неравномерного ледового сжатия на структуру изгибно-гравитационных волн	164
5.4. Влияние вязко-упругих свойств снежно-ледового покрова на структуру волновых возмущений	171
Глава 6. Трехмерные возмущения вблизи движущейся области постоянных давлений	180
6.1. Структура возмущений при малых скоростях движения области давлений	180
6.2. Структура возмущений при скоростях движения области давлений, превышающих минимум фазовой скорости для свободных изгибно-гравитационных волн	188
6.3. Сопоставление экспериментально полученных характеристик изгибных деформаций ледяного покрова с результатами теоретического моделирования	196
6.4. Распределение гидродинамического давления под плавающим ледяным покровом	201
6.5. Распределение изгибного напряжения в морском ледяном покрове	211
Часть II. Волны в неоднородном море с ледяным покровом.	
Глава 7. Изгибно-гравитационных волны в море со скачком плотности	223
7.1. Волны от начальных возмущений	223
7.2. Неустановившиеся волны от периодических поверхностных давлений	231

7.3.	Зависимость поверхностных и внутренних волн от глубины погружения источника периодической интенсивности	240
7.4.	Влияние вязких свойств снежно-ледового покрова на свободные волны	244
7.5.	Влияние вязких свойств снежно-ледового покрова на вынужденные волны.....	251
Глава 8. Влияние скорости течений на развитие поверхностных и внутренних волн в море со скачком плотности		259
8.1.	Изгибно-гравитационные волны от начальных возмущений	259
8.2.	Неустановившиеся волны от периодических поверхностных давлений в море с битым льдом.....	269
8.3.	Неустановившиеся волны от периодических возмущений в море с упругим сплошным ледяным покровом.....	278
Глава 9. Трехмерные возмущения в море со скачком плотности при движении по ледяному покрову области постоянных давлений		284
9.1.	Асимптотический анализ неустановившихся возмущений в зоне следа за областью давлений	284
9.2.	Внутренние волны в ближней зоне движущейся области	296
Глава 10. Волны в непрерывно стратифицированном море		304
10.1.	Волны от периодических возмущений в море со слоем скачка плотности.....	304
10.2.	Асимптотический анализ генерируемых трехмерных возмущений при движении области постоянных давлений в условиях экспоненциальной плотностной стратификации.....	311
10.3.	Асимптотический анализ генерируемых трехмерных возмущений при движении области постоянных давлений в условиях распределения плотности, аппроксимирующего реальную стратификацию	320
10.4.	Трехмерные возмущения в ближней зоне движущейся области давлений при экспоненциальном распределении плотности по глубине бассейна	328
10.5.	Возмущения поверхности бассейна с экспоненциальной стратификацией при движении подводного источника постоянной интенсивности.....	336
Список литературы		345

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование физических процессов в океане является одним из важнейших условий эффективного решения проблем освоения и оптимального использования его ресурсов. Особое значение при этом отводится изучению волновых процессов, являющихся преобладающим видом движения в океане и существенно влияющим на формирование океанологических полей.

Плавающий ледяной покров, определяющий динамическое взаимодействие между океаном и атмосферой, в свою очередь влияет на динамику не только морской поверхности, но и подповерхностных вод. В то же время волновые процессы под ледяным покровом проявляются в его деформациях, зависящих от прочностных и физико-механических свойств льда. Воздействием волн можно объяснить такие явления как образование трещин в ледовых полях, разрушение льда в прикромочных зонах, взламывание припая.

Поэтому изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом представляет не только теоретический, но и прикладной интерес при оценке влияния льда на волновые характеристики, изучение его реакции на гидродинамические и атмосферные возмущения, стационарные и движущиеся средства, в том числе и подводные, при прогнозировании торошения, отрыва и распада ледяных полей в интересах судоходства, а также для совершенствования реологических моделей и методов разрушения льда.

В монографии приведены результаты теоретических исследований поверхностных волн, обусловленных силой тяжести, цилиндрической жесткостью ледяного покрова и ледовым сжатием, а также волн внутренних, основным условием существования которых является устойчивая стратификация, соответствующая увеличению плотности воды в направлении силы тяжести. Рассмотрена зависимость структуры и характера волновых возмущений от механизма их генерации, ледовых условий и распределения плотности по глубине бассейна. Дан анализ

влияния диссипативных свойств снега, покрывающего лед, на формирование и пространственно-временное затухание поверхностных волн. Уделено внимание проявлению внутренних волн в изгибных деформациях ледяного покрова.

В монографии нашли отражение и результаты, полученные автором совместно с О.М. Букатовой, А.М. Гончаровым, В.В. Жарковым, Д.Д. Завьяловым, В.И. Мордашовым, Т.А. Соломахой, Л.В. Черкесовым, А.А. Ярошенко.

Компьютерную верстку монографии подготовил А.А. Букатов. Большую техническую работу, по подготовке электронного варианта рукописи выполнила Л.В. Ершова.

Всем им автор выражает свою глубокую благодарность.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № 0827-2015-0001.

ЧАСТЬ 1.

ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОМ МОРЕ С ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

ГЛАВА 1. СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ

1.1. Поверхностные волны в бассейне с плавающим битым льдом

Характерным природным фактором полярных районов океана, окраинных и внутренних замерзающих морей и водоемов является наличие ледяного покрова. Ледяной покров, являющийся важным компонентом гидрологического режима, в значительной степени влияет на волновую динамику. В общем движении по вертикали участвуют и плавающий лед, и масса воды под ним. Вид поверхностного волнения будет зависеть от массы льда, его упругости и сил внутреннего трения. С другой стороны, сами волны во многом определяют процессы, происходящие в ледяном покрове. Их воздействием можно объяснить разрушение льда в открытом море, взламывание припая и т.п. По реакции на вертикальные колебания ледяной покров можно разделить на сплошной и битый. Это разделение достаточно условное. К сплошным относятся поля и обломки полей, горизонтальные размеры которых намного превосходят длину волны. В битых льдах размеры льдин считаются малыми по сравнению с длиной волны, а их вертикальные перемещения – отслеживающими профиль взволнованной поверхности воды.

Рассмотрим случай, когда море глубиной H покрыто битым льдом толщиной h и плотностью ρ_1 . Битый лед представим в виде плавающих масс [187] не связанных между собой (рис. 1.1). Такая идеализация будет справедливой, если не учитывать силы взаимодействия между отдельными льдинами, а их размеры предполагать достаточно малыми, так что не происходит изгиба отдельных льдин [146, 155]. Пусть плоскость x_0 совмещена с невозмущенной поверхностью воды, а ось z направлена вертикально вверх.

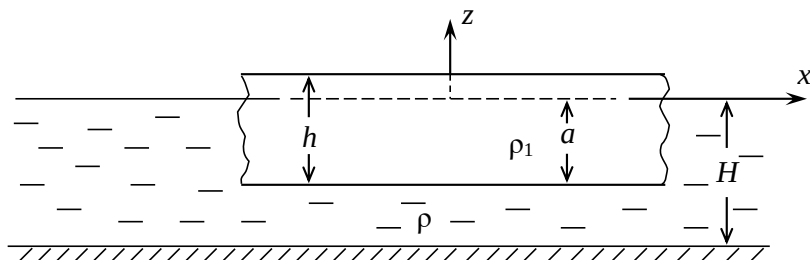


Рис. 1.1

Возмущенную поверхность раздела лед-вода зададим уравнением $z = a + \zeta(x, t)$, где $a = -h\rho_1/\rho$ – глубина погружения льдины при статическом равновесии, ζ – малое возмущение поверхности раздела, ρ – плотность воды.

В случае потенциального движения воды ее гидродинамическое давление на нижнюю поверхность льда определяется выражением

$$p = -\rho g(a + \zeta) - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

где $\phi(x, z, t)$ потенциал скорости.

Линеаризованное кинематическое условие, выражающее тот факт, что вертикальная компонента скорости жидкости на ее поверхности равняется скорости вертикального перемещения льдины, записывается так

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{при } z = a.$$

Уравнение движения льда при отсутствии давления над его поверхностью имеет вид

$$m \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + g \right) = p, \quad m = \rho_1 h.$$

Подставляя сюда выражение для p , найдем

$$m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + mg + \rho g(a + \zeta) + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad z = a.$$

Для невозмущенного состояния ледяного покрова имеем условие статического равновесия

$$m + \rho a = 0.$$

Используя это условие, запишем гидродинамическое условие на поверхности $z = a$ в виде

$$m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \rho g \zeta + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, задача о влиянии плавающего битого льда на динамическое возмущение воды заключается в нахождении потенциала скорости ϕ , удовлетворяющего условию непротекания на дне и динамическому условию на поверхности $z = a$, которое с учетом кинематического условия приобретает вид

$$m \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial t^2} + \rho g \frac{\partial \phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad z = a.$$

Отыскивая решение в виде плоской бегущей монохроматической волны

$$\zeta = \zeta_0 \cos \theta, \quad \theta = rx - \sigma t,$$

представим потенциал скорости ϕ в виде

$$\varphi = C \operatorname{chr}(z + H) \sin \theta, \quad (1.1)$$

удовлетворяющем уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad -H \leq z \leq 0, \quad |x| < \infty \quad (1.2)$$

и условию непротекания на дне

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H. \quad (1.3)$$

Тогда из динамического условия при $z = a$ найдем уравнение, связывающее волновое число с частотой волнения

$$\operatorname{thr}(a + H) = \frac{\sigma^2}{rg(1 - \chi_1 \sigma^2)} \quad \text{или} \quad \sigma^2 = \frac{rg \operatorname{thr}(a + H)}{1 + \chi_1 rg \operatorname{thr}(a + H)},$$

где $\chi_1 = \rho_1 h / (\rho g)$.

В случае мелкой воды $r(a + H) \ll 1$ имеем

$$r = \frac{\sigma}{\sqrt{g(a + H)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \chi_1 \sigma^2}},$$

а для глубокой воды

$$r = \frac{\sigma^2}{g(1 - \chi_1 \sigma^2)}.$$

Принимая во внимание кинематическое условие, для ζ найдем

$$\zeta = Cr \sigma^{-1} \operatorname{shr}(a + H) \cos \theta.$$

Графическая зависимость $\sigma(r)$, представляющая дисперсионную кривую, показана на рис. 1.2

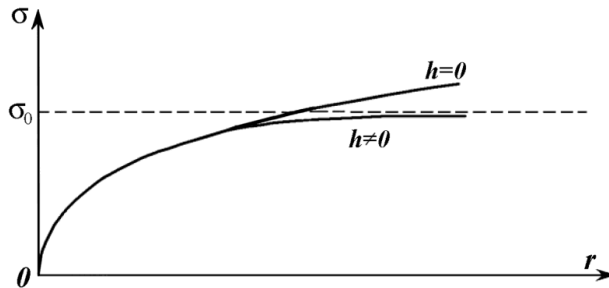


Рис. 1.2

Отсюда следует, что в бассейне с битым льдом прогрессивные волны с частотой, большей частоты $\sigma_0 = 1/\sqrt{\chi_1}$, не распространяются.

Фазовая скорость волн определяется формулой

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g}{r(1 + \chi_1 rg)}} = \frac{g}{\sigma} (1 - \chi_1 \sigma^2)$$

на глубокой воде и формулой

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{g(a+H)}{1+\chi_1 r^2 g(a+H)}} = \sqrt{gH} \sqrt{1 - \frac{\rho_1 h}{\rho H}} \sqrt{1 - \chi_1 \sigma^2}$$

на мелкой воде.

Видно, что скорость распространения волн в бассейне, покрытом битым льдом, оказывается меньшей, чем в случае свободной от льда поверхности. Длина волны под влиянием льда уменьшается. С увеличением длины волны влияние льда убывает.

Напомним, что групповая скорость волн определяется дифференцированием выражения $\sigma(r)$ по волновому числу r .

Для мелкой воды

$$\sigma = \frac{r \sqrt{g(a+H)}}{\sqrt{1+\chi_1 r^2 g(a+H)}}, V_{gp} = \frac{\sqrt{g(a+H)}}{\sqrt{[1+\chi_1 r^2 g(a+H)]^3}} = \sqrt{gH} \sqrt{1 - \frac{\rho_1 h}{\rho H}} (1 - \chi_1 \sigma^2)^{3/2},$$

а для глубокой

$$\sigma = \sqrt{\frac{rg}{1+\chi_1 rg}}, V_{gp} = \frac{g}{2\sqrt{rg} \sqrt{(1+\chi_1 rg)^3}} = \frac{1}{2\sigma} (1 - \chi_1 \sigma^2)^2.$$

Отношения групповой скорости к фазовой для глубокой и мелкой воды равны соответственно

$$\frac{V_{gp}}{v_{\phi}} = \frac{1}{2} (1 - \chi_1 \sigma^2), \quad \frac{V_{gp}}{v_{\phi}} = 1 - \chi_1 \sigma^2.$$

Полученные формулы показывают, что при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ длина волны, фазовая и групповая скорости стремятся к нулю. На мелкой воде они также стремятся к нулю при $|a| \rightarrow H$. Для случая битых льдов постоянной сплоченности и толщины глубина погружения льда постоянная ($a = \text{const}$), и плоскость $хоу$ можно совместить с поверхностью раздела лед-вода. Тогда во всех формулах глубину $a + H$ следует заменить на H' , измеряемую от нижней поверхности льда. Обычно $H \gg h$, так что $H' \approx H$ и разницу между ними следует учитывать лишь при очень малой глубине бассейна, когда она соизмерима с толщиной льда.

Отметим, что при $h = 0$ полученные выражения переходят в известные соотношения для открытой воды.

1.2. Изгибно-гравитационные волны в бассейне с плавающим сплошным упругим льдом

Пусть теперь на поверхности воды плавает сплошной ледяной покров. Будем рассматривать его как упругую пластину, лежащую на упругом основании. Для статических задач вода является идеальным упругим основанием, реакция которого зависит лишь от прогиба пластины в данной точке. При динамических режимах поле давлений, воз-

никающее в воде, существенно изменяет свойства упругого основания. Поэтому для математического описания динамических процессов кроме известных из теории упругости уравнений изгиба пластин [15, 79, 81, 147, 194] привлекаются и уравнения гидродинамики [2, 7, 78, 82, 102, 109-112, 140, 161, 181], так как в общем движении участвуют ледяная пластина и масса воды под ней [86, 98, 155]. При условии слабого изгиба ледяной пластины уравнение ее равновесия под действием внешних сил $q(x, y, t)$, сил инерции, внутренних сил упругости и гидродинамического давления на нижнюю поверхность льда $p(x, y, t)$ записывается так

$$D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = q + p, \quad (1.4)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad m = \rho_1 h,$$

$\zeta(x, y, t)$ – прогиб льда, а E , h , ρ_1 , μ – модуль нормальной упругости (модуль Юнга), толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда. Напомним, что в соответствии с законом Гука, напряжение (сила приходящаяся на единицу площади) равно произведению модуля Юнга E (постоянная материала) на относительное удлинение $\varepsilon = \Delta l/l$ (деформацию) упругого тела. Коэффициент Пуассона μ (еще одна постоянная материала) характеризует отношение деформаций в поперечном и в продольном направлениях.

В случае потенциального волнового движения малой амплитуды гидродинамическое давление на нижнюю поверхность льда определяется по формуле

$$p = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad z = 0.$$

Подставляя это выражение в уравнение равновесия ледяной пластины (1.4), получим динамическое граничное условие на поверхности покрытого льдом бассейна

$$D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = q, \quad z = 0. \quad (1.5)$$

При отсутствии внутренних сил упругости ($E = 0$) цилиндрическая жесткость льда D обращается в нуль, и это выражение представляет собой ранее рассмотренное поверхностное динамическое условие для бассейна, покрытого битым льдом.

Рассмотрим простейший случай, когда в сплошном ледяном поле бесконечной протяженности распространяется плоская монохроматическая волна изгиба

$$\zeta = \zeta_0 \cos \theta, \quad \theta = rx - \sigma t.$$

Уравнение (1.5) в случае свободных ($q = 0$) колебаний ледяного покрова запишется так

$$D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad z = 0. \quad (1.6)$$

Решение для потенциала скорости будем искать в виде (1.1) Таким образом, изгибной волне в пластине [14] соответствует гравитационная волна в воде, затухающая с глубиной. Такую комбинацию изгибной и гравитационной волн будем называть изгибно-гравитационной волной.

Продифференцировав по времени t уравнение колебаний плавающей ледяной пластины (1.6), выступающего в качестве поверхностного динамического условия, получим

$$D \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) + \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad z = 0.$$

Отсюда, учитывая кинематическое соотношение на границе лед-вода

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (1.7)$$

найдем такое условие для φ

$$D \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^4 \partial z} + m \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial z} + \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad z = 0.$$

Подставляя сюда искомое выражение для φ из (1.1), получим дисперсионное соотношение, связывающее частоту колебаний σ с волновым числом r для изгибно-гравитационной волны

$$\sigma^2 = \frac{(1 + D_1 r^4) r g \text{th} r H}{1 + \chi_1 r g \text{th} r H}, \quad D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad \chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}. \quad (1.8)$$

При $D = 0$ это выражение принимает вид дисперсионного соотношения в случае битого льда.

Профиль волны определяется формулой

$$\zeta = C \frac{r}{\sigma} \text{sh} r H \cos \theta, \quad \text{или} \quad \zeta = C \frac{r \text{sh} r H}{\sqrt{1 + D_1 r^4}} \sqrt{\frac{1 + \chi_1 r g \text{th} r H}{r g \text{th} r H}} \cos \theta.$$

Графическая зависимость σ от r для чистой воды ($h = 0$), покрытой битым ($h \neq 0, E = 0$) и сплошным ($D \neq 0$) льдом иллюстрируется на рисунке 1.3.

Отметим, что полученное распределение σ по r для изгибно-гравитационных волн имеет качественно похожий вид и для капиллярно-гравитационных волн [63, 99, 100].

Анализ показывает, что сплошной ледяной покров вносит существенные изменения в характеристики волнового движения, поскольку,

кроме сил инерции и тяжести, действуют еще и силы упругости ледяной пластины.

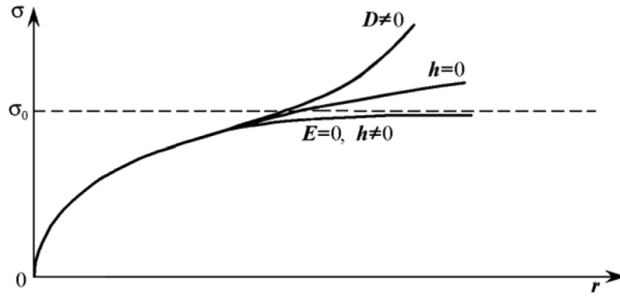


Рис. 1.3

Фазовую и групповую скорости изгибо-гравитационных волн найдем по формулам

$$v_{\phi} = v_{\phi}^0 \sqrt{\frac{1 + D_1 r^4}{1 + \chi_1 r g \operatorname{th} r H}}, \quad v_{\phi}^0 = \sqrt{\frac{g}{r} \operatorname{th} r H},$$

$$V_{zp} = V_{zp}^0 \left\{ \frac{4 D_1 r^4 \operatorname{th} r H}{(1 + \chi_1 r g \operatorname{th} r H) [\operatorname{th} r H + r H (1 - \operatorname{th}^2 r H)]} + \frac{1 + D_1 r^4}{(1 + \chi_1 r g \operatorname{th} r H)^2} \right\} D_2,$$

$$V_{zp}^0 = \frac{1}{2} v_{\phi}^0 \left(1 + \frac{2 r H}{\operatorname{sh} 2 r H} \right), \quad D_2 = \sqrt{\frac{1 + \chi_1 r g \operatorname{th} r H}{1 + D_1 r^4}}.$$

Здесь v_{ϕ}^0 и V_{zp}^0 – фазовая и групповая скорости на чистой воде ($h = 0$).

Для коротких волн

$$v_{\phi} = v_{\phi}^0 \sqrt{\frac{1 + D_1 r^4}{1 + \chi_1 r g}}, \quad v_{\phi}^0 = \sqrt{\frac{g}{r}},$$

$$V_{zp} = V_{zp}^0 \frac{1 + (5 + 4 \chi_1 r g) D_1 r^4}{\sqrt{(1 + \chi_1 r g)^3 (1 + D_1 r^4)}}, \quad V_{zp}^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

В случае длинных волн

$$v_{\phi} = \sqrt{g H} \sqrt{\frac{1 + D_1 r^4}{1 + \chi_1 r^2 g H}},$$

$$V_{zp} = \sqrt{g H} \frac{2 D_1 \chi_1 g H r^6 + 3 D_1 r^4 + 1}{\sqrt{1 + D_1 r^4} \sqrt{(1 + \chi_1 r^2 g H)^3}}.$$

Распределение фазовой скорости гравитационных волн на чистой воде (I) и изгибно-гравитационных волн в покрытом сплошным льдом бассейне (II) по частоте колебаний иллюстрируют графики на рис. 1.4.

Здесь же показано и поведение групповой скорости изгибно-гравитационных волн (III).

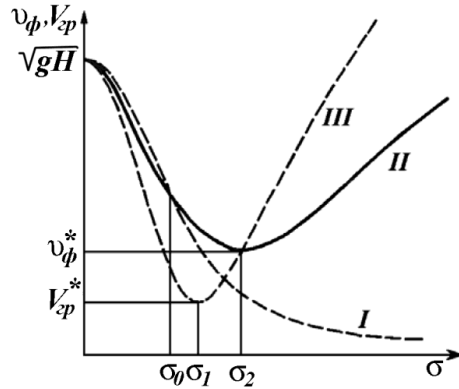


Рис. 1.4.

Видно, что наличие сплошного льда обуславливает двойственный характер дисперсии, приводя к наличию двух ветвей дисперсионных кривых фазовой и групповой скоростей. Одна ветвь гравитационная ($\sigma < \sigma_1$), а другая изгибная ($\sigma > \sigma_2$). Характер поверхностных волн в покрытом сплошным льдом бассейне определяется тем, на какую ветвь дисперсионной кривой попадает значение частоты σ . Минимальное значение $v_\phi^* = v_\phi(\sigma_2)$, достигаемое в точке $\sigma = \sigma_2$, разделяет изгибную и гравитационную ветви дисперсионной кривой фазовой скорости. Эту точку на кривой $v_\phi(\sigma)$ называют фазовой Кельвина. Волны с частотой $\sigma < \sigma_2$ соответствуют гравитационной ветви с нормальной дисперсией. Волны с частотой $\sigma > \sigma_2$ имеют аномальную дисперсию, характерную для изгибных волн.

Групповая скорость изгибно-гравитационных волн также имеет минимум $V_{gp}^* = V_{gp}(\sigma_1)$ в точке $\sigma_1 = \sigma(r_1)$, называемой фазой Эйри. Эта точка соответствует точке перегиба на дисперсионной кривой $\sigma = \sigma(r)$. Она определяется из уравнения

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{d\sigma}{dr} \right) = \frac{d}{dr} (V_{gp}) = 0.$$

На частоте $\sigma = \sigma_2$ групповая и фазовая скорости равны между собой. В самом деле, минимум фазовой скорости имеет место при значении волнового числа $r = r_2$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\sigma}{r} \right) = \left(\frac{d\sigma}{dr} r - \sigma \right) r^{-2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d\sigma}{dr} r - \sigma = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\sigma}{dr} = \frac{\sigma}{r}.$$

Но $\frac{d\sigma}{dr} = V_{zp}$, а $\frac{\sigma}{r} = v_\phi$. Следовательно, $V_{zp}(r_2) = v_\phi(r_2)$. Так как $\sigma(r_2) = \sigma_2$, то $V_{zp}(\sigma_2) = v_\phi(\sigma_2)$.

Для гравитационной ветви кривой $v_\phi(\sigma)$ групповая скорость, т.е. скорость переноса энергии волнами, меньше фазовой, а для изгибной ветви – больше.

На рис. 1.4 видна еще одна характерная точка $\sigma = \sigma_0$ в гравитационном диапазоне $v_\phi(\sigma)$, где пересекаются кривые фазовой скорости изгибно-гравитационных волн в покрытом сплошным льдом бассейне и гравитационных волн на чистой воде. Соответствующее этой частоте волновое число r_0 определяется из уравнения

$$D_1 r^3 = \chi_1 g H r H.$$

Отсюда в приближении мелкой воды находим

$$r_0 = \sqrt{gH} \sqrt{\frac{m}{D}}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{r_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{gH}} \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \sigma_0 = gH \sqrt{\frac{m}{D}}, \quad v_\phi^0 = \sqrt{gH}.$$

В случае коротких волн (глубокая вода)

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{gm}{D}}, \quad \lambda_0 = 2\pi \sqrt[3]{\frac{D}{gm}}, \quad \sigma_0 = \sqrt[6]{\frac{mg^4}{D}}, \quad v_\phi^0 = \sqrt[6]{\frac{g^2 D}{m}}.$$

Таким образом, отметим, что при $\sigma = \sigma_0$ силы плавучести льда полностью уравновешиваются гидродинамическим давлением воды.

1.3. Влияние сдвига и инерции вращения поперечных сечений на колебания плавающего ледяного покрова

Сопоставление экспериментальных данных с результатами расчётов, основанных на использовании уравнения изгиба тонкой пластины выявило [125] не полное их соответствие даже в области сравнительно низких частот, где ещё хорошо выполняется условие $rh \ll 1$ (r – волновое число, h – толщина пластины). Полученное [147] уравнение колебаний свободной пластины, гнущейся по цилиндрической поверхности и учитывающее инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига, улучшило согласие с экспериментом, позволив распространить теоретические результаты на область более высоких частот. Это уравнение хорошо известно в теории колебаний и нашло широкое применение в инженерной практике. Оно использовалось [155] и для изучения свободных изгибно-гравитационных волн в бассейне с плавающим ледяным покровом. При этом, получено выражение фазовой скорости незатухающих волн, учитывающее сдвиг и инерцию вращения. Однако, для рассмотрения ряда задач таких, в частности, как набегание волн на горизонтальные неоднородности ледяного покрова (кромки, трещины, то-

росы) или неоднородности рельефа дна под ним, важно знать не только действительные корни дисперсионного уравнения, отвечающие прогрессивным незатухающим волнам, но также комплексные и мнимые корни, характеризующие прогрессивно-затухающие и краевые волны [103]. В связи с этим, исследуем влияние инерции вращения и поперечного сдвига на их распределение по частоте колебаний.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях плавающей упругой ледяной пластины. Выберем начало декартовой системы координат на невозмущённой поверхности лёд-вода, ось z направим вертикально вверх. В предположении потенциальности движения жидкости задача сводится к решению уравнения Лапласа (1.2) с граничными условиями на её поверхности и на дне бассейна.

В качестве граничного условия на поверхности бассейна ($z = 0$) используем уравнение колебаний плавающей пластины, которое, с учётом инерции вращения поперечных сечений и влияния дополнительных деформаций, вызванных сдвигом, [81, 120, 147] имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^5 \zeta}{\partial x^4} + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + I_1 I_2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial t^4} - I_3 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial t^2} + \zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (1.9)$$

где $\chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}$, $I_1 = \frac{\rho_1 h^3}{12 \rho g}$, $I_2 = \frac{\rho_1}{kG}$, $D_1 = \frac{D}{\rho g}$,

$$I_3 = I_1 \left(1 + \frac{2}{k(1-\mu)} \right), G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

G , h , ρ_1 , μ – модуль сдвига, толщина, плотность, коэффициент Пуассона льда; k – числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения ($k = 0.833$ для прямоугольного сечения), ρ – плотность воды.

На дне примем условие непротекания (1.3). Возвышение поверхности лёд – вода ζ связаны с потенциалом φ кинематическим соотношением (1.7)

Представляя решение уравнения (1.2) в виде $\varphi = [A \cosh r(z + H) + B \sinh r(z + H)] \exp i(rx - \sigma t)$ и удовлетворяя граничным условиям (1.3), (1.7), (1.9), получим дисперсионное уравнение

$$\sigma_{1,2}^2 = \frac{L(r) \mp \sqrt{\psi(r)}}{2I_1 I_2 R(r)}, \quad (1.10)$$

$$R(r) = r g \tanh r H, \quad L(r) = R(r) \cdot (r^2 I_3 + \chi_1) + 1,$$

$$\psi(r) = L^2(r) - 4R^2(r)I_1 I_2 (D_1 r^4 + 1),$$

связывающие между собой фазовые характеристики волновых возмущений [48]. Уравнение (1.10) кроме действительных, имеет комплексно-сопряженные $\beta \pm i\alpha$, $-\beta \pm i\alpha$ (β , α – действительные, положительные) и

счетные множества мнимых $\pm ir_n$, $n = 1, 2, 3 \dots$ корней. Реальные β и мнимые α части комплексных корней определяются из системы уравнений

$$g(C_1C_3 - C_2C_4) - \sigma^2(1 + \chi_1gC_1) - \sigma^2g\{I_3(T_1C_5 + T_2C_6) - \sigma^2I_1I_2C_3\} = 0,$$

$$g(C_2C_3 + C_1C_4 - \sigma\chi_1C_4) - \sigma^2g\{I_3(T_2C_5 - T_1C_6) - \sigma^2I_1I_2C_4\} = 0.$$

Здесь

$$C_1 = D(\beta^4 - 6(\alpha\beta)^2 + \alpha^4) + 1, C_4 = \beta T_2 - \alpha T_1,$$

$$C_2 = 4D(\beta^3\alpha - \beta\alpha^3), \quad C_5 = \beta^3 - 3\alpha^2\beta,$$

$$C_3 = \beta T_1 - \alpha T_2, \quad C_6 = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2,$$

$$T_1 = \frac{\text{th}\beta H(1 + \text{tg}^2\alpha H)}{1 + \text{th}^2\beta H \text{tg}^2\alpha H}; \quad T_2 = \frac{\text{tg}\alpha H(1 - \text{th}^2\beta H)}{1 + \text{th}^2\beta H \text{tg}^2\alpha H}.$$

Величины r_n являются решениями уравнения

$$\text{tg} r_n H = - \frac{\sigma^2}{r_n g \{ D_1 r_n^4 + 1 + \sigma^4 I_1 I_2 + \sigma^2 (r_n^2 I_3 - \chi_1) \}}$$

и заключены в пределах $(n-1)\pi/H < r_n < n\pi/H$, $n = 1, 2, 3 \dots$

Собственная частота колебаний, вычисленная без учёта инерции поворота и сдвига [175], выражается формулой (1.8).

Проведём сопоставление распределений корней уравнений (1.10) и (1.8) с целью изучения влияния членов, характеризующих сдвиг и инерцию вращения. В силу симметрии ограничимся рассмотрением только положительных вещественных корней, положительных действительных и мнимых частей комплексных корней, а также мнимых корней, лежащих в верхней полуплоскости.

Как видно из (1.10), определяющим для числа действительных и комплексных корней уравнения является вид функции $\psi(r)$. Изучим поведение $\psi(r)$ при различных значениях параметра D_1 , характеризующего цилиндрическую жёсткость пластины.

Определим некоторое критическое значение $D_{01} = D_1^0(r_{01})$, где r_{01} — действительный корень уравнения $(D_1^0(r))' = 0$, штрих-производная по r , а

$$D_1^0(r) = \frac{R^2(r)\chi_1^2 h^4}{18L(r)k(1-\mu) - (rh)^4(R(r)\chi_1)^2}.$$

При $D_1 = D_{01}$ первая и вторая производные функции $\psi(r_{01})$ обращаются в нуль. Если параметр D_1 больше D_{01}^0 (область I), то $\psi(r)$ является монотонно возрастающей неотрицательной функцией на всей области её определения. Для величин D_1 из интервала $D_{02} < D_1 < D_{01}$ (область II) функция $\psi(r)$ всё ещё остаётся положительно определённой, однако на

её графике появляются точки локальных экстремумов. Значение D_{02} , при котором $\psi(r_{02}) = 0$, может быть найдено по формулам $D_{02} = D_2(r_{02})$, где r_{02} – решение уравнения $D'_2(r) = 0$,

$$D_2(r) = \frac{R(r)R'(r)h^4\chi_1^2}{9L'(r)k(1-\mu)-r^3\chi_1^2h^4R(r)[2R(r)+rR'(r)]},$$

$$R'(r) = g\left(\text{th}rH + \frac{rH}{\text{ch}^2rH}\right), L'(r) = 2L(r)[R'(r)(I_3r^2 + \chi_1) + 2R(r)I_3r].$$

В случае $D_1 < D_{02}$ (область III) существует интервал области определения, для которого $\psi(r) < 0$. Внешними границами этого интервала являются точки пересечения r_1^* , r_2^* кривой $\psi(r)$ с осью абсцисс. В качестве иллюстрации на рис. 1.5 приведена функция $\psi(r)$ для различных значений параметра D_1 при

$$H = 75 \text{ м}, h = 5 \text{ м}, \rho = 1025 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}, \rho_l = 870 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}, \mu = 0.33. \quad (1.11)$$

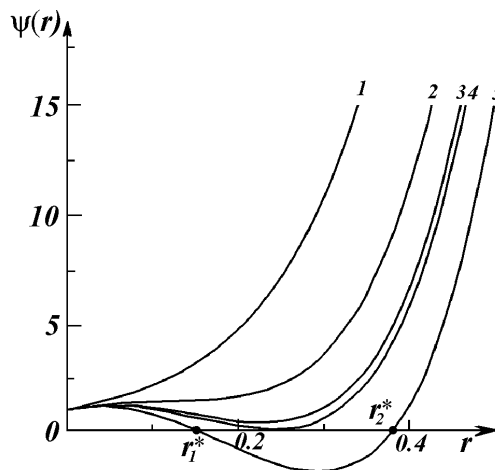


Рис. 1.5

Линии 1 – 5 отвечают величинам D_1 , равным 10^4 м^4 (область I); 14.33 м^4 (D_{01}); 10.5 м^4 (область II); 10.32 м^4 (D_{02}) и 8 м^4 (область III). Для тех же условий (1.11) на рис. 1.6, а показаны зависимости $D_1^0(r)$ (тонкая линия) и $D_2(r)$ (жирная линия). Незакрашенным и закрашенным кружками обозначены величины D_{01} и D_{02} соответственно. Распределения значений D_{01} и D_{02} как функций толщины пластины даны на рис. 1.6, б. Тонкая линия отвечает функции $D_1^0(h) = D_{01}(h)$, а жирная – $D_1^0(h) = D_{02}(h)$. Из рисунка видно, что увеличение толщины пластины приводит к росту величин критических значений как D_{01} , так и D_{02} .

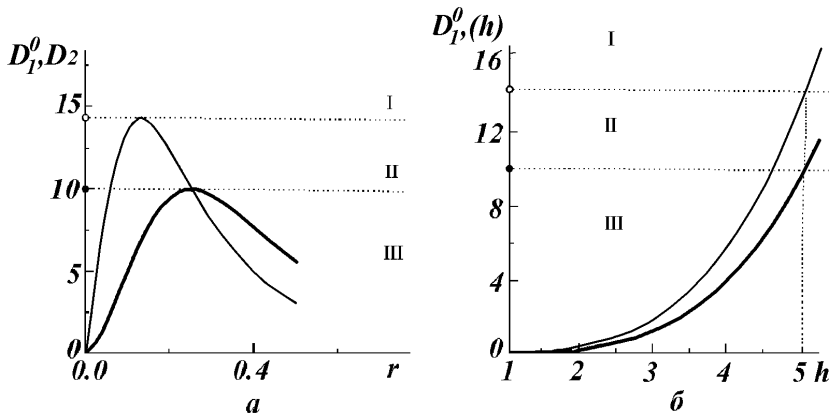


Рис. 1.6

Рассмотрим теперь зависимость решений уравнения (1.10) от величины параметра D_1 , характеризующего цилиндрическую жёсткость ледяного покрова и определяющего вид функции $\psi(r)$. На рис. 1.7 представлены действительные корни (сплошные линии), а также реальные (штриховые линии) и мнимые (пунктирные линии) части комплексных корней уравнений (1.10) (жирные линии) и (1.8) (тонкие линии). Для (1.8) любому положительному значению r соответствует лишь одна ветвь дисперсионной кривой $\sigma(r)$ свободных изгибно-гравитационных колебаний, фазовая скорость которых на больших частотах линейно возрастает ($c \sim r\sqrt{D_1/\chi_1}$) с увеличением r . Если $D_1 \geq D_{01}$ ($\psi(r)$ монотонна, кривая 1 на рис. 1.5), то на интервале частот $\sigma < \sigma^*$ ($\sigma^* = \sigma_2(r^*)$, r^* — решение уравнения $\sigma'_2(r) = 0$) уравнение (1.10), так же, как и (1.8), имеет только один действительный корень (рис. 1.7, а). Учёт в (1.10) инерции поворота и сдвига приводит к увеличению как действительного, так и реальной части комплексного корней по сравнению с соответствующими величинами уравнения (1.8). Мнимая часть комплексного корня при этом, напротив, уменьшается. В высокочастотной области $\sigma > \sigma^*$ формальное решение уравнения (1.10) даёт ещё два действительных корня, вследствие чего появляется дополнительная ветвь $\sigma_2(r)$. Следовательно, при частотах выше критической σ^* все волновые числа вещественные [81, 150, 167]. Учёт инерции вращения и сдвига ограничивает на больших r фазовую скорость свободных волн значениями $c_1 = 1/\sqrt{I_2}$ и $c_2 = \sqrt{D_1/I_1}$ соответственно для низкочастотной и высокочастотной ветвей дисперсионного уравнения.

Когда $D_{02} < D_1 < D_{01}$ ($\psi(r)$, кривая 3 на рис. 1.5), точки локальных экстремумов наблюдаются и на графике $\sigma_1(r)$ (рис. 1.7, б). Это означа-

ет, что одной фиксированной частоте могут соответствовать три различных действительных волновых числа, лежащих на дисперсионной кривой $\sigma_1(r)$.

Отметим, что наличие трёх действительных корней уравнения (1.10) для $\sigma_1(r)$ обусловлено присутствием подстилающей тяжёлой жидкости. В случае свободной упругой пластины указанные ветви дисперсионной кривой определяют лишь один действительный корень на заданной частоте.

Если $D_1 = D_{02}$ ($\psi(r_{02})$ обращается в нуль, кривая 4 на рис. 1.5), то у нижней $\sigma_1(r)$ и верхней $\sigma_2(r)$ ветви действительного решения (1.10) появляется общая точка излома с координатами $\left(r_{02}; \sigma_0 = \sqrt{\frac{L(r_{02})}{2I_1 I_2 R(r_{02})}} \right)$ (рис. 1.7, в). Ветвь $\sigma_1(r)$ расположена ниже, а ветвь $\sigma_2(r)$ - выше точки излома.

Дальнейшее уменьшение цилиндрической жёсткости пластины (кривая 5 на рис. 1.5) приводит к разрыву дисперсионных кривых (рис. 1.7, г). Таким образом, появляется интервал волновых чисел (r_1^*, r_2^*) , внутри которого не существуют действительные корни дисперсионного уравнения (1.10). Точки прекращения функций $\sigma_1(r)$ и $\sigma_2(r)$ показаны на рисунке закрашенными кружками. Здесь части жирных линий ниже точек прекращения характеризуют ветвь $\sigma_1(r)$, а выше – ветвь $\sigma_2(r)$.

Что касается модулей мнимых корней, то для уравнения (1.10), учитывающего сдвиг и инерцию вращения, они большие, чем для уравнения (1.8). Эти отличия тем больше, чем больше номер моды и меньше жёсткость пластины. На рис. 1.8 показана дисперсионная кривая первой моды краевых волн, отвечающих мнимым корням уравнений (1.8) (жирные линии) и (1.10) (тонкие линии) при различных значениях цилиндрической жёсткости. Сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные линии отвечают величинам D_1 , равным 10^4 м^4 , 14.33 м^4 , 10.32 м^4 и 8 м^4 соответственно.

Таким образом, учёт сдвига и инерции вращения поперечных сечений уменьшает длину волны изгиба плавающей пластины, ограничивая фазовую скорость распространения незатухающих волн высокой частоты. Длина волны прогрессивно-затухающих колебаний также убывает.

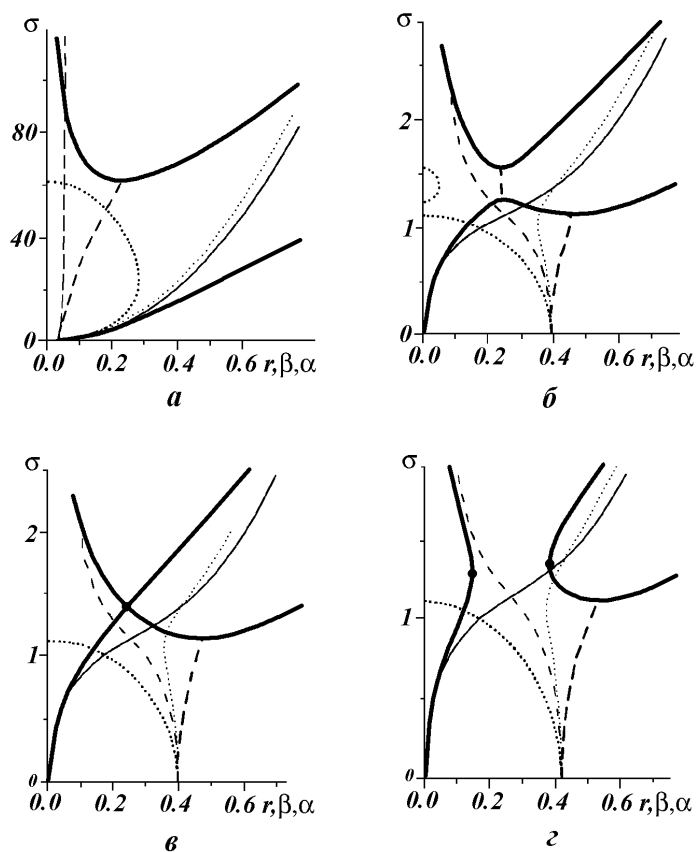


Рис. 1.7

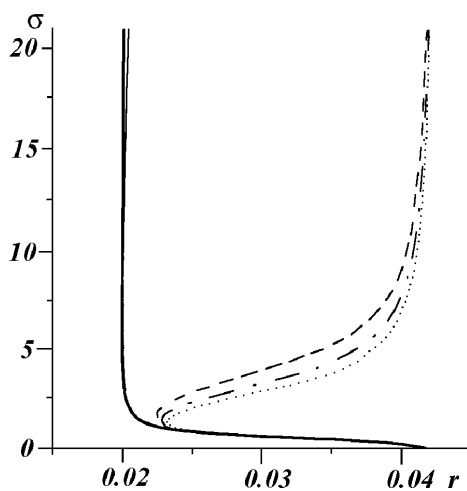


Рис. 1.8

Уменьшается и коэффициент её пространственного затухания. Это может привести к расширению зоны волновых возмущений, формируе-

мых с участием затухающих волн в окрестности горизонтальных неоднородностей ледяного покрова или рельефа дна под ним. При этом учёт сдвига и инерции вращения усиливает затухание краевых волн с удалением от указанных горизонтальных неоднородностей. В случае малой жёсткости плавающего ледяного покрова изгибно-гравитационные незатухающие колебания заданной частоты с волновыми числами, определяемыми низкочастотной ветвью дисперсионной кривой, могут распространяться с тремя различными фазовыми скоростями. Учёт сдвига и инерции вращения может привести к разрыву спектра волновых чисел незатухающих колебаний. Для некоторого ограниченного участка длин волн отсутствуют незатухающие колебания на любой частоте.

1.4. Изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии

Пусть однородная идеальная несжимаемая жидкость конечной глубины H покрыта сплошным упругим льдом. Ледяной покров может подвергаться сжатию под воздействием ветра, течений или температурных деформаций [146, 180, 190]. Рассмотрим свободные изгибно-гравитационные волны в условиях неравномерного сжатия. Потенциал скорости ϕ волнового возмущения в жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0, \quad -H \leq z \leq 0, \quad |x| < \infty, \quad |y| < \infty,$$

зададим в виде

$$\phi = A \operatorname{ch} r(z + H) \cos[r(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - \sigma t], \quad (1.12)$$

используя при этом на дне бассейна ($z = -H$) граничное условие $\partial\phi/\partial z = 0$. На поверхности $z = 0$ потребуем выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(D_1 \nabla^4 \phi + Q_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + Q_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \chi_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.13)$$

вытекающего из уравнения свободных колебаний неравномерно сжатой [121, 130] плавающей ледяной пластинки и кинематического условия контакта пластинки и жидкости ($\zeta_t = \phi_z$).

$$\text{Здесь } Q_1 = \frac{Q_x}{\rho g}, \quad Q_2 = \frac{Q_y}{\rho g}, \quad \nabla^4 = \Delta_l^2, \quad \Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

r – волновое число; α – угол между направлением перемещения волны и осью x , ρ – плотность жидкости; Q_x и Q_y – сжимающие усилия вдоль координатных осей x , y соответственно. После подстановки (1.12) в (1.13) получим дисперсионное уравнение

$$\sigma - \tau(r, \alpha) = 0, \quad (1.14)$$

$$\tau = [l(r, \alpha)b(r)]^{1/2}, \quad b = (1 + \chi_1 r g \operatorname{th} rH)^{-1} r g \operatorname{th} H,$$

$$l = (2\sqrt{D_1} - Q_1)r^2 \cos^2 \alpha + (2\sqrt{D_1} - Q_2)r^2 \sin^2 \alpha + (1 - \sqrt{D_1}r^2)^2.$$

Проанализируем решение этого уравнения для значений

$Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, $Q_2 < 2\sqrt{D_1}$, обеспечивающих устойчивость пластинки. При $\sigma > 0$, $r > 0$ уравнение (1.14) имеет только один корень $r = r_1$, если $Q^* < Q_0$, где $Q^* = Q_1 \cos^2 \alpha + Q_2 \sin^2 \alpha$. В случае $Q^* > Q_0$, $r > 0$ на каждом из интервалов $(0, \sigma_1)$, (σ_2, ∞) частоты колебаний σ имеется также по одному корню $r = r_1$, $r = r_2$ соответственно. Если же $Q^* > Q_0$, а $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, то будет три корня $r = r_1$, $r = r_2$, $r = r_3$, ($r_3 > r_2 > r_1$). Здесь

$$Q_0 = \tau_0(r_0), \quad \tau_0 = [(1 + D_1 r^4) \tau_1(r) + 4 D_1 r^4 \tau_2(r)] \tau_3^{-1}(r),$$

$$\tau_1 = \operatorname{th} rH + rH \operatorname{ch}^{-2} rH, \quad \tau_2 = (1 + \chi_1 r g \operatorname{th} rH) \operatorname{th} rH, \quad \tau_3 = r^2 (\tau_1 + 2\tau_2),$$

$$\sigma_1 = \tau(\beta_1), \quad \sigma_2 = \tau(\beta_2), \quad \sigma_1 < \sigma_0 < \sigma_2, \quad \sigma_0 = \tau(\beta_0); \quad \beta_1 > \beta_2 > 0,$$

r_0 и β_0 – положительные корни уравнений $\tau'_0(r, \alpha) = 0$ и $\tau''(r, \alpha) = 0$, β_1 и β_2 – корни уравнения $\tau'(r, \alpha) = 0$, штрих означает производную по r . Так как функция $\tau(r)$ четная, то корнями уравнения (1.14) будут и $r = -r_i$ ($i = 1, 2, 3$) в соответствующих интервалах частоты колебаний. Каждый из корней $r = r_i$ уравнения (1.14) при заданном σ представляет прогрессивную волну ζ_i с длиной $\lambda_i = 2\pi/r_i$. При этом ζ_1 имеет характер гравитационной (для $\sigma < \sigma_0$) или изгибно-гравитационной (для $\sigma > \sigma_0$) волны, а волны ζ_3 и ζ_2 обусловлены соответственно изгибной жесткостью пластинки и силой сжатия.

Величина Q^* при заданных значениях продольного Q_x и поперечного Q_y сжимающих усилий зависит от угла α . Следовательно, при фиксированных Q_1 , Q_2 с изменением α меняется и распределение функции $\tau(r, \alpha)$ по r . При этом меняются и величины σ_0 , σ_1 , σ_2 , определяющие частотные интервалы существования гравитационных (ζ_1), изгибно-гравитационных (ζ_3) и обусловленных сжатием (ζ_2) волн. Распределения τ по r и α , характеризующие дисперсионное соотношение $\tau = \sigma$, приведены на рис. 1.9 для $h = 1$ м, $H = 10^3$ м, $Q_1 = 1.9\sqrt{D_1}$, $Q_2 = \sqrt{D_1}$ и значений [8, 11]

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н м}^{-2}, \quad \rho_1 = 870 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad \mu = 0.34. \quad (1.15)$$

Штрихами на рис. 1.9 обозначены линии равной частоты, номера которых 1, 2, ..., 5 соответствуют значениям 0.73, 0.64, 0.55, 0.46, 0.37 с⁻¹. Треугольником отмечена частота σ_1 , а кружком – σ_2 при $\alpha = 0$. Пунктирная линия ограничивает диапазон частот колебаний (заштрихованная область), обусловленных сжатием.

Анализ графиков дисперсионных зависимостей [34] показывает возможность наличия угловой зоны, в которой на одной фиксированной частоте $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ существуют все три волновые системы. Вне зоны,

как и при отсутствии сжимающих усилий, для любого σ есть только одна система волн. Угловая зона заключена между прямыми $y = \pm kx$. Ее биссектриса совпадает с координатной осью, вдоль которой сжимающее усилие большее.

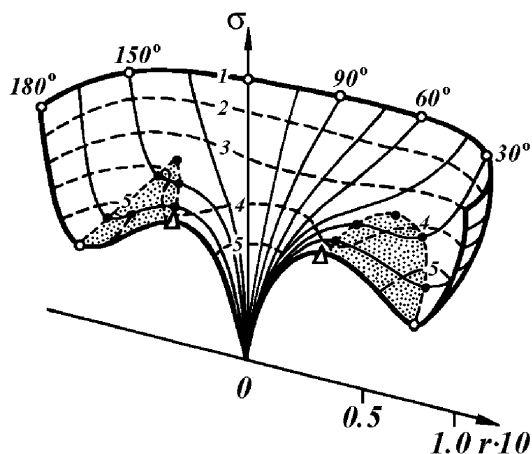


Рис. 1.9

Если $Q_2 = 0$, $Q_1 > Q_0$, то $k = [(Q_1 - Q_0)/Q_0]^{1/2}$ [31]. В случае $Q_2 > Q_0$, $Q_1 = 0$ величина углового коэффициента определяется из выражения $k = [Q_0/(Q_2 - Q_0)]^{1/2}$. Для $0 < Q_1 < Q_0 < Q_2$ или $0 < Q_2 < Q_0 < Q_1$ имеем $k = [(Q_0 - Q_1)/(Q_2 - Q_1)]^{1/2}$ и $k = [(Q_0 - Q_1)/(Q_2 - Q_0)]^{1/2}$ соответственно.

При выполнении неравенства $Q_0 < Q_2 < Q_1$ или $Q_0 < Q_1 < Q_2$ для любого α имеется диапазон частоты колебаний $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, в котором существуют три системы волн ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , а также диапазоны $\sigma < \sigma_1$ и $\sigma > \sigma_2$ с одной волной ζ_1 или ζ_3 соответственно. В этом случае $Q^* > Q_0$. Величина интервала (σ_1, σ_2) частоты колебаний большая в окрестности той оси, где большее сжимающее усилие.

Если сжимающие усилия характеризуются неравенствами $0 \leq Q_2 < Q_1 \leq Q_0$, $0 \leq Q_1 < Q_2 \leq Q_0$, то при любом α , как и при отсутствии сжатия или в условиях растяжения, есть только одна система волн в силу того, что $Q^* < Q_0$. Отметим, что $\sigma_1 = 0$ при $Q_1 = Q_2 = 2\sqrt{D_1}$. Величина интервала (σ_1, σ_2) максимальна на биссектрисе угловой зоны. С удалением от биссектрисы величина этого интервала убывает и на прямых, ограничивающих зону, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, так как здесь $Q^* = Q_0$.

Зависимость величины угла раствора зоны α^* , для которой ось y является биссектрисой ($Q_2 > Q_1$), от продольного и поперечного сжимающих усилий характеризуется табл. 1.1 для $h = 1$ м, $H = 10^3$ и значений параметров (1.15). Видно, что угол раствора растет с увеличением Q_1 и Q_2 . Особенно существенно увеличение α^* с приближением Q_1 к Q_0 ,

равному в этом случае примерно $1.45\sqrt{D_1}$. Значение Q_0 растет, хотя и незначительно, с уменьшением глубины бассейна H . Это изменение становится заметным при $H < 100$ м. В частности, $Q_0 = 1.68\sqrt{D_1}$ для $H = 10$ м. Следовательно, при одинаковых сжимающих усилиях размеры угловых зон с тремя волновыми системами могут быть разными при разных глубинах. Это видно из сопоставления величин α^* , приведенных для значений параметров (1.15) при $h = 1$ м, $H = 1000$ м в табл. 1.1 и при $h = 1$ м, $H = 10$ м в табл. 1.2. В обеих таблицах величины α инвариантны относительно перестановок значений Q_1 и Q_2 . Напомним, что при $Q_1 > Q_2$ биссектрисой угловой зоны является ось x .

Таблица 1.1

$Q_1/\sqrt{D_1}$	$Q_2/\sqrt{D_1}$			
	1.5	1.7	1.9	2
0	21°02′	45°08′	58°14′	63°16′
0.5	25°26′	54°20′	69°10′	74°32′
1	36°52′	73°12′	90°	95°44′
1.2	48°12′	90°	-06°36′	112°02′
1.4	90°	131°48′	143°44′	146°26′

Таблица 1.2

$Q_1/\sqrt{D_1}$	$Q_2/\sqrt{D_1}$			
	1.7	1.8	1.9	2
0	12°28′	29°56′	39°48′	47°10′
0.5	14°50′	34°58′	46°42′	55°02′
1	19°28′	45°34′	59°16′	68°54′
1.2	23°04′	53°08′	68°12′	78°28′
1.4	29°56′	66°26′	83°06′	93°50′
1.6	53°08′	101°32′	117°50′	126°52′

В случае $Q^* > Q_0$ при фиксированных значениях Q_1 , Q_2 внутри зоны на заданной частоте $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ гравитационные волны ζ_1 имеют большую фазовую скорость v_1 , чем фазовые скорости v_2 и v_3 волн ζ_2 и ζ_3 . Причем $v_2 > v_3$. С удалением от биссектрисы зоны v_2 убывает, а v_1 , v_3 увеличиваются. Величины групповых скоростей V_2 , V_3 волн ζ_2 , ζ_3 при этом убывают, а V_1 волны ζ_1 растет. Однако изменения v_1 , V_1 в зоне малы на указанных частотах и на частотах $\sigma < \sigma_1$. Под влиянием неравномерности сжатия мало меняются v_1 , V_1 с изменением α и вне зоны. Даже при $\sigma = 0.456 \text{ с}^{-1}$ максимально возможное отклонение v_1 на взаимно перпендикулярных направлениях не превышает 20%. Изменение V_1 в аналогичных условиях составляет не более 10%. Влияние неравномер-

ного сжатия на распределение v_3 , V_3 по α для заданного $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ более значительное. Для $\sigma > \sigma_2$ внутри зоны и вне ее с удалением от оси максимального сжатия v_3 увеличивается, а V_3 убывает. Графики, иллюстрирующие распределения v_k , V_k по σ и α , приведены на рис.1.10, 1.11 для $h = 1$ м, $H = 10^3$ м, $Q_1 = 1,8\sqrt{D_1}$, $Q_2 = \sqrt{D_1}$ и значений (1.15). Треугольником и кружком отмечены величины, соответствующие частотам σ_1 и σ_2 при $\alpha = 0$. Участки кривых до кружков характеризуют волну ζ_1 , от кружков до треугольников – волну ζ_2 , а после треугольников – волну ζ_3 .

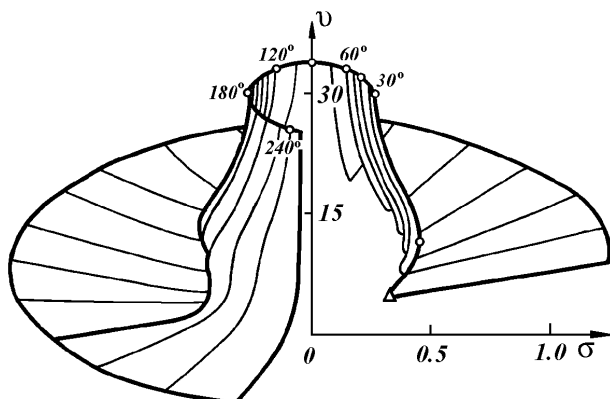


Рис. 1.10

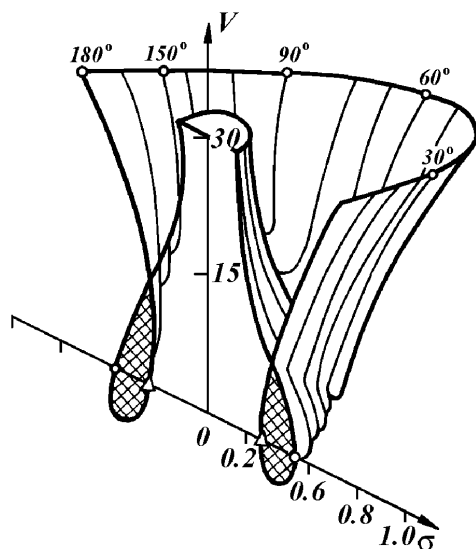


Рис. 1.11

На границах зоны и вне ее, где на любой фиксированной частоте имеется только одна гравитационная или изгибно-гравитационная волна, при фиксированном α

$$v_0 < v_1 < \sqrt{gH}, \quad v_0 < v_3 < \infty, \quad v_0 = \tau(\beta^*)/\beta^*, \quad V_0 < V_1 < \sqrt{gH}, \\ V_0 < V_3 < \infty, \quad V_0 = \tau'(\beta_0), \quad V_0 < v_0.$$

Здесь β^* – положительный корень уравнения $r\tau' - \tau = 0$. Эти соотношения при заданном α выполняются и в случае $Q^* < Q_0$.

Таким образом, в условиях неравномерного ледового сжатия могут существовать угловые зоны, где изгибные деформации льда и возмущения жидкости формируются тремя системами волн разной длины, но одинаковой частоты. Угол раствора зоны и частотный диапазон с трехволновыми возмущениями определяются величинами сжимающих усилий в продольном и поперечном направлениях.

1.5. Влияние вязких свойств ледяного покрова на характеристики поверхностных волн

При сплоченных битых льдах имеют место необратимые потери энергии, обусловленные главным образом неупругим взаимодействием льдин между собой. Эти потери можно оценить, рассматривая ледяной покров как слой вязкой жидкости [106, 108, 155] с большим коэффициентом внутреннего трения η . Толщину этого слоя и плотность жидкости в нем обозначим через h и ρ_1 .

В таком случае граничные условия для потенциала скорости φ , удовлетворяющего уравнению Лапласа, запишем в виде

$$\frac{\rho_1 h}{\rho g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \eta \frac{h}{\rho g} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H.$$

Отсюда, отыскивая решения вида

$$\varphi = C \operatorname{ch} r(z + H) \exp(i\theta), \quad (1.16)$$

найдем такое дисперсионное уравнение

$$\sigma^2 \psi - rg(1 + i\sigma \eta_1 r^2) \operatorname{th} rH = 0, \quad (1.17)$$

где $\eta_1 = \eta h / (\rho g)$, $\psi = 1 + \chi r \operatorname{th} rH$, $\chi = \rho_1 h / \rho$. Полагая $\sigma = \sigma_0 + i\delta$ из (1.17) при заданной длине волны, найдем

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\psi} [rg(4\psi - \eta_1^2 r^5 g \operatorname{th} rH) \operatorname{th} rH]^{1/2}, \quad \delta = \frac{\eta_1 r^3 g}{2\psi} \operatorname{th} rH. \quad (1.18)$$

Величина δ определяет скорость затухания гравитационных поверхностных волн. Видно, что в покрытом сплоченным битым льдом бассейне при учете трения [32] периодические возмущения могут иметь место при условии

$$4\psi > \eta_1^2 r^5 g \operatorname{th} rH.$$

Это условие в приближении мелкой воды можно переписать для длины волны λ возмущений в виде

$$\lambda^6 + 4\pi^2 g H \lambda^4 - 16\pi^6 g H \eta_1^2 > 0.$$

Если волны короткие, то длины волн возмущений в бассейне с плавающим битым льдом при учете вязкого трения удовлетворяют неравенству

$$\lambda^5 + 2\pi\chi\lambda^4 - 8\pi^5 g \eta_1^2 > 0.$$

В случае сплошного ледяного покрова представление о его вполне упругом поведении не всегда приемлемо. В значительной степени это относится к ледяному покрову, представляющему на начальной стадии состояния смесь воды, льда и снега. Такой ледяной покров обладает не только упругими, но и вязкими свойствами [10]. Влияние вязкости на характеристики волн в этом случае можно оценить, моделируя плавающий лед тонкой упругой пластинкой, покрытой слоем снега. Уравнение свободных колебаний такого ледяного покрова, принимаемое в качестве динамического граничного условия поверхности бассейна ($z = 0$), имеет вид

$$D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + (\rho_1 h + \rho_0 h_0) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \eta h_0 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \zeta = 0,$$

где h , ρ_1 – толщина и плотность льда, ρ_0 , h_0 , η – плотность, толщина и коэффициент внутреннего трения снега.

С учетом кинематического условия это уравнение перепишется так

$$D \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + (\rho_1 h + \rho_0 h_0) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \eta h_0 \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Подставляя сюда φ из (1.16) найдем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \sigma^2 \psi - r g (1 + D_1 r^4 + i \sigma \eta_1 r^2) \operatorname{th} r H &= 0, \\ \psi &= 1 + (\chi + \chi_0) r \operatorname{th} r H, \quad \eta_1 = \eta h_1 / (\rho g), \quad D_1 = D / (\rho g), \\ \chi &= \rho_1 h / \rho, \quad \chi_0 = \rho_0 h_0 / \rho. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Отсюда при фиксированной длине волны найдем

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\psi} \{ [4(1 + D_1 r^4) \psi - \eta_1^2 r^5 g \operatorname{th} r H] r g \operatorname{th} r H \}^{1/2},$$

а декремент временного затухания δ определим по формуле (1.18). Условие существования периодических возмущений примет вид

$$4(1 + D_1 r^4) \psi - \eta_1^2 r^5 g \operatorname{th} r H > 0.$$

Если волновое число r не удовлетворяет этому условию, то $\operatorname{Re}(\sigma) = 0$ и, следовательно, имеют место только затухающие непериодические возмущения. Графики на рис. 1.12 иллюстрируют поведение дисперсионных кривых для бассейна с открытой поверхностью (линия 1), с плавающим битым (линия 2) и битым вязким (линия 3) льдом, с плавающим упругим (линия 4) и вязко-упругим (линия 5) ледяным покровом при $h = 0.28$ м, $h_0 = 0.05$ м, $\rho_0 = 350$ кг/м³, $H = 7$ м, $\eta = 4 \cdot 10^6$ кг/(м·с). Модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность льда приняты соответствен-

но равными из (1.15). Квадратами и кружками отмечены верхние границы значений волнового числа $r = r_1$ и частоты колебаний $\sigma_0 = \sigma_1$ при учете вязкости ледяного покрова. Видно, что в бассейне с битым вязким и сплошным вязко-упругим ледяным покровом могут распространяться волны, для которых $\lambda > \lambda_0 = 2\pi/r_1$, $\tau > \tau_0 = 2\pi/\sigma_1$, где $\sigma_1 = \sigma_0(r_2)$, а r_1 и r_2 – действительные корни уравнений $\sigma_0(r) = 0$, $\sigma'_0(r) = 0$ соответственно. Штрих означает производную по r . При значениях исходных параметров, отвечающих рис. 1.12, величины λ_0 и τ_0 равны 43.04 м и 8.56 с, если лед битый ($E = 0$). В случае сплошного льда ($E \neq 0$) $\lambda_0 = 15.03$ м, $\tau_0 = 2.95$ с. Увеличение коэффициента внутреннего трения η приводит к росту τ_0 и λ_0 , в то время как рост цилиндрической жесткости льда расширяет диапазоны частоты и длины периодических волновых возмущений.

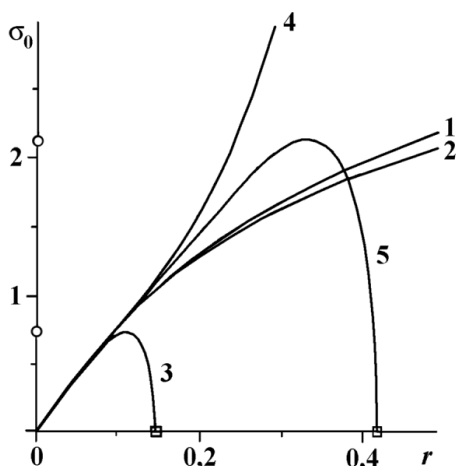


Рис. 1.12

Из дисперсионной зависимости видно, что при $\eta \neq 0$ для $\sigma_0 < \sigma_1$ существуют две системы периодических волновых возмущений одинаковой частоты, но разной длины волны. Одна из них (ζ_1) является гравитационной или изгибно-гравитационной, а вторая (ζ_2) обусловлена силами внутреннего трения ледяного покрова. При этом волна ζ_1 с длиной λ_1 , соответствующая гравитационной или изгибно-гравитационной ветви кривой $\sigma_0(r)$, имеет нормальную, а волна ζ_2 с длиной λ_2 – аномальную дисперсию. При увеличении коэффициента внутреннего трения ледяного покрова характер дисперсионной зависимости качественно не изменяется для обеих систем волн. Количественное влияние роста η проявляется в уменьшении фазовых скоростей и интервалов значений волнового числа и частоты периодических волновых возмущений. При этом

волны разных периодов колебаний могут распространяться с одинаковой фазовой скоростью.

Из выражения (1.18) следует, что амплитуда волны уменьшается в e раз за промежуток времени $\Delta t = \delta^{-1}$. Так как $\lambda_2 < \lambda_1$, то скорость затухания волны ζ_2 большая, чем волны ζ_1 . Пространственный декремент затухания волновых возмущений заданной частоты можно определить из (1.19), полагая $r = r_0 - i\gamma$. Тогда найдем

$$\gamma = \frac{\eta_1 r^4 g \operatorname{th} rH}{8\sigma[1 + (\chi + \chi_0)r \operatorname{th} rH]}.$$

Численные значения δ и γ при соответствующих экстремумам дисперсионных кривых значениях $r = r_2$, $\sigma = \sigma_0(r_2)$ на рис. 1.12 равны 0.387 с^{-1} и 0.015 м^{-1} для сплоченного битого ($E = 0$, $\eta \neq 0$) и 3.264 с^{-1} , 0.126 м^{-1} для вязко-упругого ($\eta \neq 0$, $E \neq 0$) ледяного покрова.

ГЛАВА 2. ВОЛНЫ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

2.1. Влияние снежного покрова на изгибно-гравитационные волны

Проведем теоретический анализ влияния снежного покрова на изгибно-гравитационные волны, генерируемые в сплошном ледяном поле (на поверхности лед-вода) периодическими перемещающимися по снежному покрову давлениями вида

$$p = p_0 \cos(rx - \sigma t). \quad (2.1)$$

Рассматривая ледяной покров как тонкую упругую пластинку, плавающую на поверхности жидкости постоянной глубины H , и предполагая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб льда малыми, получим с учетом сил инерции и вязкости снега [23, 155] для определения потенциала скорости $\varphi(x, z, t)$ уравнение Лапласа (1.2) с граничными условиями

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \eta_1 h_1 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \zeta = -\frac{p}{\rho g} \quad \text{при } z = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H.$$

Здесь

$$\{D_1, \chi_1, \eta_1\} = \frac{1}{\rho g} \{D, \chi, \eta\}, \quad \chi = \rho_0 h_0 + \rho_1 h, \quad D = Eh^3 [12(1 - \mu^2)]^{-1}, \quad (2.3)$$

E, h, ρ_1, μ – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда, ρ_0, h_0, η – плотность, толщина и коэффициент внутреннего трения снега, ρ – плотность жидкости, ζ – возвышение поверхности лед-вода или прогиб льда. При этом ζ и φ связаны кинетическим условием

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{при } z = 0. \quad (2.4)$$

Считая ζ и φ периодическими по t , из (2.1)–(2.4) найдем

$$\zeta = -\frac{p_0}{\rho g} \frac{\sigma r \operatorname{th} rH}{b^2 + b_1^2} [b \cos(rx - \sigma t) + b_1 \sin(rx - \sigma t)] \quad (2.5)$$

или

$$\zeta = -\frac{p_0}{\rho g} \frac{\sigma r \operatorname{th} rH}{\sqrt{b^2 + b_1^2}} \sin(rx - \sigma t + \gamma),$$

где

$$b = (1 + D_1 r^4 - \chi_1 \sigma^2) r \operatorname{th} r H - \frac{\sigma^2}{g}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{b_1},$$

$$b_1 = \bar{\eta} h_0 \sigma r^3 \operatorname{th} r H, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\rho_0 g}.$$

Первое слагаемое в (2.5) представляет собой деформированные за счет снежного покрова изгибно-гравитационные волны, а второе обусловлено исключительно снежным покровом ($b_1 = 0$ при $h_0 = 0$).

Для оценки влияния снежного покрова на генерируемые давлениями (2.1) волны проводились численные расчеты их амплитуды $A = \sigma r \operatorname{th} r H (b^2 + b_1^2)^{1/2}$ при $H = 10^3$ м и значений параметров (1.15).

Частота колебаний $\sigma (\text{с}^{-1})$ изменялась в пределах $10^{-2} \leq \sigma \leq 1$, характерных для плавающих ледяных полей [133, 145, 168, 179, 182].

Толщина снега h_0 (м) принималась равной 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, а толщина льда h (м) – равной 2, 1, 0.5, 0. Коэффициент внутреннего трения снега η (кг/м·с) определялся [199] по эмпирическим формулам

$$\eta = 10^7 (1 - 1.9 \cdot 10^{-3} \rho_0)^{-1}, \quad (2.6)$$

$$\eta = 10^7 (0.37 - 0.9 \cdot 10^{-3} \rho_0)^{-1}, \quad (2.7)$$

полученным для диапазона температур от -1 до -3 и от -5 до -13 соответственно. Обе формулы применимы, если плотность снега изменяется в пределах от 200 кг/м^3 до 400 кг/м^3 . Поэтому для численных расчетов ρ_0 принималась равным 250 кг/м^3 . При таком ρ_0 из (2.6) и (2.7) найдем $\eta = \eta_1^0 = 1.868 \cdot 10^8 \text{ кг/м} \cdot \text{с}$ и $\eta = \eta_2^0 = 6.758 \cdot 10^8 \text{ кг/м} \cdot \text{с}$.

Результаты численных расчетов для $\sigma = 0.7 \text{ с}^{-1}$ и $\sigma = 0.3 \text{ с}^{-1}$ представлены на рис. 2.1–2.3, где а, б, в отвечают толщинам льда 2, 1, 0.5 метра, а номера кривых 1–5 соответствуют толщине снега 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2 метра.

Зависимость $A(r)$ для $\sigma = 0.7 \text{ с}^{-1}$ иллюстрируется рис. 2.1 при $\eta = \eta_1^0$ и рис. 2.2 при $\eta = \eta_2^0$. Видно, что влияние снежного покрова существенно сказывается только в случае коротких волн. Причем величина длины волны ($\lambda_1 = 2\pi / r_1$), начиная с которой ($\lambda < \lambda_1$) это влияние заметно проявляется, зависит главным образом от частоты колебаний, толщины и коэффициента внутреннего трения снега. При фиксированных σ , h , η большему h_0 соответствует и большее λ_1 . Действительно, значениям $\sigma = 0.7 \text{ с}^{-1}$, $h = 2$ м, $\eta = \eta_1^0$ (рис. 2.1) отвечают $\lambda_1 = 785$ м, если $h_0 = 2$ м и $\lambda_1 = 570$ м, если $h_0 = 0.5$ м.

В случае фиксированных σ , h , h_0 с увеличением коэффициента трения снега растет и λ_1 . В частности, для $\sigma = 0.7 \text{ с}^{-1}$, $h = 2$ м, $h_0 = 1$ м найдем $\lambda_1 = 698$ м при $\eta = \eta_1^0$ (рис. 2.1) и $\lambda_1 = 966$ м при $\eta = \eta_2^0$ (рис. 2.2).

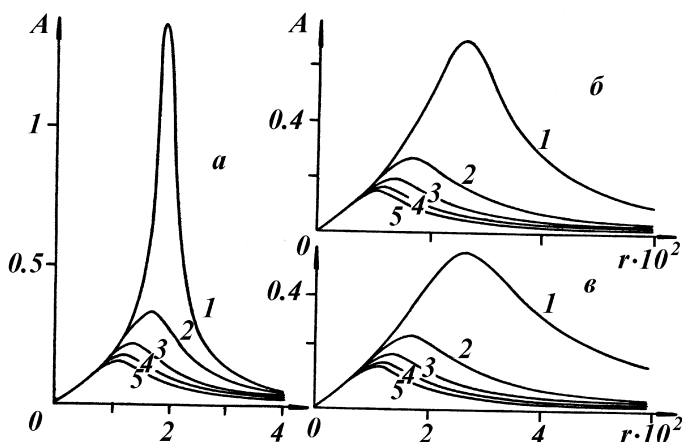


Рис. 2.1

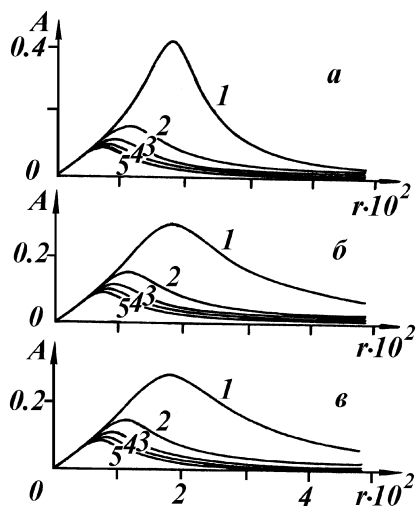


Рис. 2.2

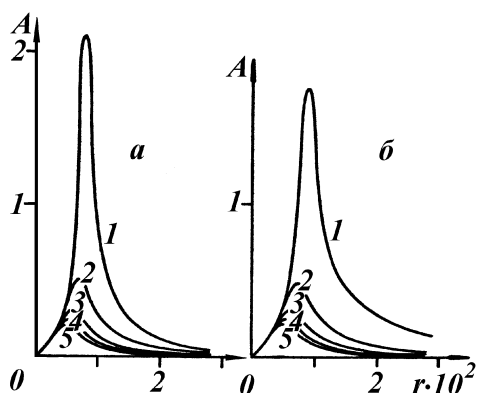


Рис. 2.3

Большому периоду колебаний $\tau = 2\pi/\sigma$ отвечает и большая длина волны λ_1 , начиная с которой проявляется влияние снега. Это следует из сопоставления рис. 2.2 с рис. 2.3, на котором приведена зависимость $A(r)$ при $\sigma = 0.3 \text{ с}^{-1}$ и $\eta = \eta_2^0$. Сравнение показывает, что изменение σ от 0.7 с^{-1} до 0.3 с^{-1} привело к увеличению λ_1 от 785 м до 1570 м в случае $h_0 = 2 \text{ м}$ и от 570 м до 1136 м в случае $h_0 = 0.5 \text{ м}$. Отметим при этом, что для фиксированных σ и h изменение толщины льда в рассматриваемом диапазоне мало отразилось на величине λ_1 .

Кроме того, анализ результатов численных расчетов показывает, что амплитуда A как функция r имеет максимум. Величина максимума A_1 и значение $r = r_2$, при котором он достигается, зависят от частоты колебаний, толщины льда, толщины и коэффициента внутреннего трения снеж-

ного покрова. Для заданных h и σ величина A_1 уменьшается с ростом h_0 , а положение максимума A смещается в сторону больших длин волн (r_2 уменьшается). В частности для $\sigma = 0.7 \text{ с}^{-1}$ и $h = 2 \text{ м}$ (рис. 2.1.) изменение h_0 от 0.1 до 2 метров привело к уменьшению A_1 в 9.8 раз, а $\lambda_2 = 2\pi/r_2$ увеличилось при этом от 348 до 571 м, если $\eta = \eta_1^0$. В случае же $\eta = \eta_2^0$ (рис. 2.2) величина A_1 уменьшилась в 4.7 раза, а λ_2 увеличилась от 349 до 897 метров.

Следует отметить, что положение максимума амплитуды для фиксированных σ , h_0 и η мало меняется с ростом толщины льда $h(\text{м})$ в пределах $0.5 \leq h \leq 2$, в то время как величина A_1 существенно уменьшается. Например, при $\sigma = 0.7 \text{ с}^{-1}$, $\eta = \eta_1^0$, $h_0 = 0.1 \text{ м}$ это уменьшение составляет 62%.

Чем тоньше лед, тем снежный покров одной и той же толщины оказывает более сильное влияние на распределение амплитуды A по r .

Если $h_0 \rightarrow 0$ для заданных σ , η и h , то $b_1 \rightarrow 0$ и точка максимума $r = r_2$ амплитуды A стремится к положительному корню $r = r_0$ уравнения $(D_1 r^4 - \chi_1 \sigma^2 + 1)r \text{ th} r H - \sigma^2 / g = 0$, а $\lim_{h_0 \rightarrow 0} A(r_0) = \infty$. Это уравнение свя-

зывает волновое число и частоту колебаний системы лед-вода при отсутствии снежного покрова [54, 55, 75, 104, 158, 172, 176, 182, 188, 198].

С уменьшением частоты колебаний влияние снежного покрова на амплитуду A и положение ее максимума также уменьшается, что видно из выражений b и b_1 . Величина b_1 , определяющая вклад снежного покрова в волновое движение, даже при $h = h_0 = 2 \text{ м}$ составляет от значения b не более 10% при $\sigma = 0.1 \text{ с}^{-1}$ и меньше 1% при $\sigma = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$.

2.2 Влияние продольного растяжения на развитие волн от периодических возмущений

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей безграничный бассейн постоянной глубины H , плавает сплошной ледяной покров (тонкая упругая пластинка). Начиная с момента времени $t = 0$, к поверхности ледяного покрова прикладываются периодические давления

$$p = p_0 f(x) \exp(i\sigma t). \quad (2.8)$$

Проведем анализ влияния продольного растяжения на процесс развития генерируемых волн.

С учетом продольного растягивающего усилия [123, 147, 156] для определения потенциала скорости ϕ имеем уравнение Лапласа (1.2) с граничными

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a}{p_0} p \text{ при } z=0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -H \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \text{ при } z = 0$$

и начальными условиями

$$\varphi = \zeta = 0 \text{ при } t = 0. \quad (2.10)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g}, \quad \chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad a = \frac{p_0}{\rho g}, \quad (2.11)$$

Q – продольное растягивающее усилие, приходящееся на единицу ширины ледяной пластинки; ζ – прогиб льда или возвышение поверхности лед-вода.

Применяя для решения задачи комплексное преобразование Фурье по переменной x и удовлетворяя граничным условиям (2.9), получим

$$\zeta_{tt}^* + \tau^2 \zeta^* = -a\theta(r) f^*(r) \exp(i\sigma t), \quad (2.12)$$

$$r = [\theta(r)\theta_1(r)]^{1/2}, \quad \theta(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \quad \theta_1(r) = 1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4,$$

где ζ^* и f^* – преобразование Фурье функций ζ и f .

Решая уравнение (2.12) с начальными условиями (2.10) и применяя теорему обращения, найдем

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(r) \psi(r, t) f^*(r) e^{irx} dr,$$

$$\psi(r, t) = \left(\frac{2}{\Delta} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-it\Delta_1} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-it\Delta_2} \right) e^{i\sigma t}, \quad (2.13)$$

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2, \quad \Delta_{1,2} = \sigma \mp \tau.$$

Анализ показал, что уравнение $\Delta_1(r) = 0$ имеет два действительных корня $r = \pm r_1$. Следовательно, первое и второе слагаемые в (2.13) имеют на действительной оси особенности в точках $r = \pm r_1$. Так как эти особенности взаимно погашаются, то в силу теоремы Коши исходный путь интегрирования можно деформировать в контур, обходящий точки $r = \pm r_1$. В качестве контура интегрирования возьмем путь, идущий вдоль действительной оси и обходящий корни уравнения $\Delta_1(r) = 0$ по малым полуокружностям [140], на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_1) > 0$. Перепишем теперь (2.13) так:

$$\zeta = -\frac{a}{2\sqrt{2\pi}} (\eta_1 - \eta_2 - \eta), \quad (2.14)$$

$$\eta_k = \int_{L_k} \frac{\tau(r)}{\theta_1(r)\Delta_k} f^*(r) \exp(i|x|M_k) dr \quad (k=1,2),$$

$$\eta = \int_{L_1} \frac{2\tau^2(r)}{\theta_1(r)\Delta} f^*(r) \exp(irx) dr \exp(i\sigma t),$$

$$M_{1,2} = r \operatorname{sign} x \pm v\tau(r), \quad v = t/|x|.$$

Здесь L_2 идет вдоль действительной оси, а L_1 обходит $r = r_1$ сверху и $r = -r_1$ снизу. Такой выбор контура интегрирования обеспечивает стремление к нулю η_1 и η_2 при $t \rightarrow \infty$.

Проводя вычисление интегралов (2.14) методом контурного интегрирования с учетом положения стационарных точек [4, 80, 84] (корней уравнения $M'_1(r) = 0$) относительно полюсов $r = \pm r_1$ подынтегральных функций, получим

$$\zeta = \begin{cases} A \sin \alpha + O(1/\sqrt{|x|}) & \text{при } |x| < Vt, \\ O(1/\sqrt{|x|}) & \text{при } |x| > Vt, \end{cases} \quad (2.15)$$

где

$$A = f^*(\alpha_1) B(r_1), \quad \alpha_1 = -r_1 \operatorname{sign} x, \quad \alpha = r_1 |x| - \sigma t,$$

$$V = \tau'(r_1), \quad B(r) = a_1 \theta_1 / (\sigma \tau'), \quad a_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a,$$

штрих означает производную по r .

Отсюда видно, что периодические давления (2.8) генерируют в ледяном покрове (на поверхности лед-вода) незатухающие с расстоянием волны, уходящие от области приложений давлений в положительном и отрицательном направлениях оси x . Передний фронт возникающих волн перемещается со скоростью V , а их длина и фазовая скорость равны $\lambda = 2\pi/r_1$, $v = \sigma/r_1$ соответственно.

Для оценки влияния величины продольного растягивающего усилия Q на элементы генерируемых волн проводились численные расчеты для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq l, \\ 0, & |x| > l, \end{cases} \quad (2.16)$$

значений параметров (1.15), $l = 3 \cdot 10^2$ м, $h = 1$ м, $H = 10^3$ м. Рис. 2.4 иллюстрирует дисперсионную зависимость длины волны $\lambda = 2\pi/r_1$ от частоты колебаний σ . Здесь кривые по порядку снизу вверх отвечают значениям $Q_2 = 3.54 \cdot 10^{-9} Q$ (Н/м), равным 0, $5.948 \cdot 10^{-3}$, $1.071 \cdot 10^{-2}$, $3.125 \cdot 10^{-2}$, $6.25 \cdot 10^{-2}$, $1.25 \cdot 10^{-1}$, 0.25, 0.5, 1. Этим значениям Q_2 в аналогичном порядке отвечают и кривые снизу вверх на рис. 2.5, 2.6, иллюстрирующих

зависимость фазовой скорости v и скорости переднего фронта V (м·с⁻¹) генерируемых волн от волнового числа и частоты колебаний.

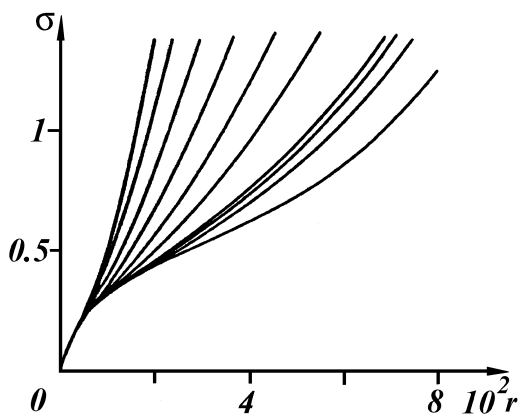


Рис. 2.4

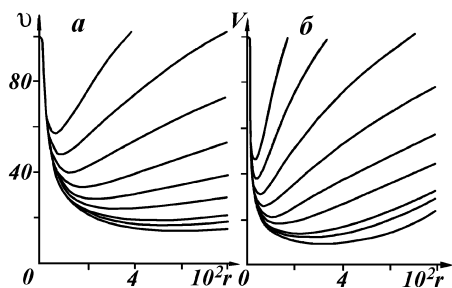


Рис. 2.5

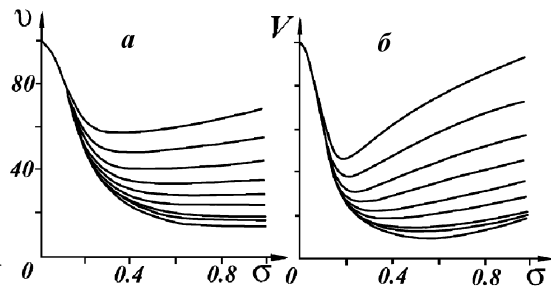


Рис. 2.6

Видно, что зависимость длины волны от частоты колебаний представляет собой монотонно убывающую функцию. Большему Q_2 отвечает меньшее значение σ , начиная с которого заметно проявляется влияние продольного растягивающего усилия на длинах генерируемых волн. Например, при Q_2 , равных $1.071 \cdot 10^{-2}$ и 1 Н/м, такими частотами будут $\sigma = 0.3$ и $\sigma = 0.2$ с⁻¹. Увеличение Q для фиксированных σ приводит к росту λ (уменьшению r_1). Причем влияние растягивающего усилия увеличивается с ростом частоты. В частности, при изменении Q_2 (Н/м) от 0 до 1 длина волны возросла примерно от 661 до 1047 м, если $\sigma = 0.3$ с⁻¹ и от 92 до 405 м, если $\sigma = 1$ с⁻¹. Так как $\sigma = \tau(r)$, то такая существенная зависимость λ от Q позволяет определить величину продольного растягивающего усилия ледяной пластинки с постоянной цилиндрической жесткостью по заданным (измеренным экспериментально) значениям длины и фазовой скорости (частоты колебаний) волн из формулы

$$Q_3 = r_1^{-2} \Delta^*(r_1), \quad \Delta^*(r) = \sigma^2 (1 + \chi_1 r g \text{thr} H) / (r g \text{thr} H) - (1 + D_1 r^4).$$

Отметим, что выражение $\Delta^*(r)$ вытекает из $\Delta(r)$ при $Q = 0$, а значение положительного корня уравнения $\Delta^*(r) = 0$ больше, чем значение положительного корня уравнения $\Delta(r) = 0$. В случае коротких волн ($r_1 H \gg 1$)

$$\Delta^*(r) = \sigma^2 \left(\chi_1 + \frac{1}{rg} \right) - (1 + D_1 r^4).$$

На частотах, где существенно сказывается влияние Q , такое приближение справедливо.

Фазовая скорость генерируемых волн как функция r (длины волны) имеет минимум (рис. 2.5, *a*) а $\lim_{r \rightarrow 0} v(r) = \sqrt{gH}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = \infty$. Величина минимума растет с увеличением Q , а значение $r = \bar{r}_1$, при котором минимум достигается, убывает. Качественно похожая на $v(r)$ и зависимость $V(r)$. Скорость переднего фронта как функция r также имеет минимум (рис. 2.5, *б*), а $\lim_{r \rightarrow 0} V(r) = \lim_{r \rightarrow 0} v(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} v(r)$. Величина минимума и значение $r = \bar{r}_2$, при котором он достигается, меньше, чем соответствующие значения для фазовой скорости. Кроме того $v(r) > V(r)$, если $r < \bar{r}_1$ и $v(r) < V(r)$, если $r > \bar{r}_1$. При $r = \bar{r}_1$, фазовая скорость и скорость переднего фронта волн совпадают.

Фазовая скорость и скорость переднего фронта генерируемых волн как функции частоты колебаний также имеют по одному минимуму (рис. 2.6). При фиксированном Q_2 минимум $V(\sigma)$ достигается на частоте $\sigma = \bar{\sigma}_2$ меньшей, чем частота $\sigma = \bar{\sigma}_1$ минимума фазовой скорости, а величина минимального значения $v(\sigma)$ больше, чем $V(\bar{\sigma}_2)$. При $\sigma = \bar{\sigma}_1$ выполняется равенство $v = V$. Кроме того, $\lim_{\sigma \rightarrow 0} v(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} V(\sigma) = \sqrt{gH}$, $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} v(\sigma) = \infty$. Увеличение продольного растягивающего уси-

лия приводит к росту минимальных значений $v(\sigma)$ и $V(\sigma)$ и смещению их положения в сторону меньших частот ($\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ уменьшаются). В частности, $v(\sigma)$ для значений Q_2 , что и на рис. 2.4, достигает минимума на частоте $\sigma = \sigma_1(c^{-1})$, равной соответственно 0.874, 0.900, 0.894, 0.792, 0.684, 0.577, 0.485, 0.385, 0.344. Минимум $V(\sigma)$ при этом имеет место для $\bar{\sigma}_2(c^{-1})$, равной 0.570, 0.518, 0.480, 0.381, 0.316, 0.283, 0.240, 0.218, 0.191. Отметим, что $\bar{\sigma}_1 = \tau(\bar{r}_1)$, $\bar{\sigma}_2 = \tau(\bar{r}_2)$ а $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ – положительные корни уравнений $r\tau'(r) - \tau(r) = 0$ и $\tau''(r) = 0$ соответственно. Штрих здесь означает производную по r .

Влияние продольного растяжения на амплитуду волн иллюстрируется с точностью до множителя a на рис. 2.7, 2.8, где сплошная, пунктирная, штрихпунктирная, штриховая и точечная кривые отвечают зна-

чениям $Q_2(\text{Н/м})$, равным 0 , $5.948 \cdot 10^{-3}$, $1.071 \cdot 10^{-2}$, $1.25 \cdot 10^{-1}$, 0.5 . Видно, что зависимость A от σ и от r представляет собой осциллирующую функцию. При этом, если в интервале частоты от нуля до значения, соответствующего минимуму скорости переднего фронта, имеются нули функции $A(\sigma)$, то расстояние между ними здесь с ростом σ убывает, а при $\sigma > \bar{\sigma}_2$ увеличивается. В противном случае указанное расстояние всюду растет с частотой колебаний. Аналогичная зависимость имеет место и при $Q = 0$, однако значение $\bar{\sigma}_2$ для $Q = 0$ больше, чем в случае $Q > 0$. Для $\sigma < 0.1 \text{ с}^{-1}$ влияние изменения Q_2 практически не проявляется на распределение A по частоте (все кривые на рис. 2.7 совпадают). При $\sigma > 0.1 \text{ с}^{-1}$ продольное растяжение может привести как к увеличению, так и к уменьшению амплитуды волн по сравнению со случаем $Q = 0$. Например, при $p_0 = 100 \text{ Па}$, $\sigma = 0.51 \text{ с}^{-1}$ амплитуда A равна нулю, если $Q_2 = 0.5 \text{ Н/м}$, и $A = 0.19 \text{ м}$, если $Q_2 = 0$. На частоте же $\sigma = 0.32 \text{ с}^{-1}$ в первом случае $A = 0.066 \text{ м}$, а во втором $A = 0$.

Экстремальные значения функции $A(\sigma)$ в порядке возрастания их номера убывают с ростом Q , а их положение (кроме первого экстремума) смещается в сторону больших σ . Первый экстремум смещается к меньшей частоте, но незначительно.

Волны с одинаковой длиной имеют большую амплитуду при меньшем растягивающем усилии, что видно из рис. 2.8. В частности, если $p_0 = 100 \text{ Па}$, то волна длиной $\lambda = 256 \text{ м}$ имеет амплитуду $A = 0.19 \text{ м}$ при $Q_2 = 0$ и $A = 0.025 \text{ м}$ при $Q_2 = 1.25 \cdot 10^{-1} \text{ Н/м}$.

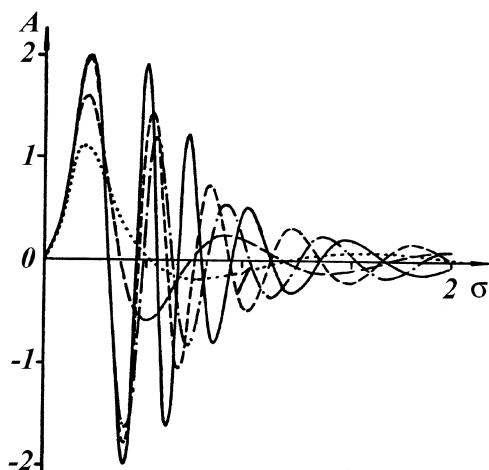


Рис. 2.7

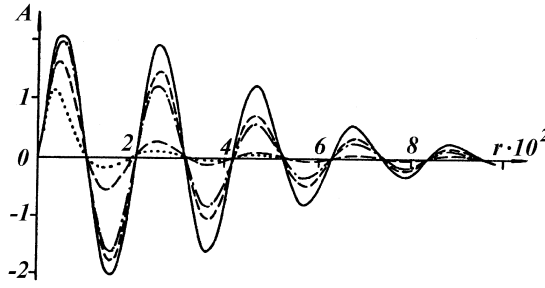


Рис. 2.8

2.3. Развитие изгибно-гравитационных волн от импульсных возмущений в условиях продольного растяжения

Рассмотрим теперь в качестве генератора волн малые возмущения участка дна бассейна, происходящие с вертикальной скоростью

$$w = af(x)\psi(t), \quad \psi(0) = 0, \quad (2.17)$$

начиная с момента времени $t = 0$. В начальный момент времени поверхность лед-вода горизонтальна. Потенциал скорости ϕ волнового возмущения в условиях продольного растяжения определим из уравнения (1.2), начальных (2.10) и граничных условий

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{при } z=0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = w \quad \text{при } z = -H, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{при } z = 0.$$

Обозначения здесь те же, что и в (2.11).

Применяя для решения задачи преобразование Фурье по x и преобразование Лапласа [83] по t , найдем

$$\zeta = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(r)}{\text{chr}H} K(r,t) \exp(irx) dr, \quad K = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{\alpha \psi^*(\alpha)}{\alpha^2 b_1 + b_2} e^{\alpha t} d\alpha, \quad (2.19)$$

$$b_1 = 1 + \chi_1 r g \text{thr}H, \quad b_2 = r g \theta_1(r) \text{thr}H,$$

где θ_1 имеет вид (2.12), $f^*(r)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, $\psi^*(\alpha)$ – преобразование Лапласа функции $\psi(t)$.

Вычисляя $K(r,t)$ для

$$\psi(t) = \delta(t - t_0), \quad t_0 > 0, \quad (2.20)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, получим

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^*(r)}{b_1 \text{chr}H} [e^{i|x|M_1(r)} + e^{i|x|M_2(r)}] dr, \quad (2.21)$$

$$M_{1,2} = r \text{sign}x \pm v\tau(r), \quad v = t/|x|, \quad \tau(r) = (b_2/b_1)^{1/2}.$$

Здесь у $t_1 = t - t_0$ опущен индекс 1. Отсюда методом стационарных фаз найдем асимптотическое выражение ζ . Наличие стационарных точек у фазовых функций $M_{1,2}(r)$ при фиксированном v определяется поведением функции $\tau'(r)$. Ее зависимость от величины растягивающего усилия для рассматриваемого вида возмущений аналогична зависимости скорости незатухающих волн, генерируемых периодическими давлениями (2.8). Она изучена в 2.2 и представлена на рис. 2.5. Из данных на рисунке следует, что M_2 при $v^{-1} < u_2$ не имеет стационарных точек (действительных корней уравнения $M'_2 = 0$). Для $v^{-1} > u_1$ и $u_2 < v^{-1} < u_1$ стационарными точками будет соответственно $r = r_2$ и $r = r_1$, $r = r_2$, если $x > 0$, или $r = -r_2$, и $r = -r_1$, $r = -r_2$, если $x < 0$. Условия существования стационарных точек для $M_1(r)$ те же, что и у $M_2(r)$, а сами стационарные точки для M_2 отличаются от точек для M_1 только знаками. Здесь $u_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \tau'(r) = \sqrt{gH}$, $u_2 = \tau'(r_0)$, r_0 – положительный корень уравнения $\tau''(r) = 0$, стационарные точки $r = \pm r_2$ обусловлены упругими силами ледяного покрова.

Таким образом, после применения метода стационарных фаз найдем

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_2 + O(1/|x|), & |x| > u_1 t, \\ \zeta_1 + \zeta_2 + O(1/|x|), & u_2 t < |x| < u_1 t, \\ O(1/|x|), & |x| < u_2 t, \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\zeta_k = \frac{1}{\sqrt{|x|}} A(r_k) \cos \left[r_k |x| - t \tau(r_k) + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} \right] \quad (k=1, 2),$$

$$A = \frac{f(r)}{b_1(r) \operatorname{chr} H \sqrt{j v \tau''(r)}}, \quad j = \begin{cases} -1, k=1, \\ 1, k=2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что волна ζ_2 , обусловленная упругими силами, приходит в фиксированную точку раньше гравитационной ζ_1 , не имея при этом четко выраженного переднего фронта. Передний фронт гравитационных волн перемещается от эпицентра возмущений со скоростью u_1 . Задние фронты упругих и гравитационных волн совпадают между собой и движутся с одинаковой скоростью u_2 , зависящей от толщины льда, его модуля нормальной упругости и величины растягивающего усилия. Большому растягивающему усилию отвечает и большая скорость заднего фронта. Качественно такой же характер зависимости u_2 и от толщины льда.

В общем случае найти аналитическое выражение стационарных точек (корней уравнений $M'_{1,2}(r) = 0$) как функции x и t не представляется возможным, однако численно их можно найти с требуемой степенью точности при заданных x и t и, таким образом, построить количествен-

ную картину изменения ζ с течением времени в произвольной фиксированной точке и картину волны в фиксированный момент времени.

Меняя с достаточно мелким шагом r и учитывая, что на интервалах $(0, r_0)$ и (r_0, ∞) зависимость между t и r взаимно однозначная и что с ростом r на интервале $(0, r_0)$ время растет, а с ростом r на (r_0, ∞) убывает, можно без нахождения корней уравнений $M'_{1,2}(r) = 0$ построить по формулам (2.22) картину поведения ζ_1 и ζ_2 с течением времени в фиксированной точке, вычисляя t по формуле $t = x\tau^{-1}(r)$, а также картину распределения ζ_1 и ζ_2 по x в фиксированный момент времени, вычисляя x по формуле $x = t\tau(r)$. Полученное таким образом распределение ζ_2 по x для $t = 60$ с и по t для $x = 10^3$ м в случае дельтообразного смещения дна [65] при значениях параметров (1.15), $H = 10^2$ м приведено с точностью до множителя $a \cdot 10^{-4}$ на рис. 2.9–2.12. Кривые 1–4 на рис. 2.9, 2.10 даны для $h = 1$ м. Они отвечают растягивающим усилиям $0, 1.68 \cdot 10^6, 2.52 \cdot 10^6, 3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Зависимость же распределения ζ_2 по x и t от толщины льда (рис. 2.11, 2.12) иллюстрируется в случае $Q = 0$. При других Q картина качественно похожая. Кривые 1, 2 на рис. 2.11, 2.12 относятся к толщинам ледяной пластины 1 и 2 м. Крайние правые значения каждой из кривых на рис. 2.10, 2.12 отвечают моментам времени, близким к моменту прохождения заднего фронта волн $\zeta_{1,2}$ через заданную точку. Крайние же левые точки кривых на рис. 2.9, 2.11 характеризуют амплитуду ζ_2 в окрестности заднего фронта в фиксированный момент времени. В этой окрестности асимптотические формулы (2.22) не работают, а вычисленное по ним ζ_2 принимает бесконечно большое значение. Анализ данных на рис. 2.9–2.12 показывает, что с течением времени вертикальный размах колебаний $\zeta_2(t)$ увеличивается. Время же прохождения волн (2.22) через заданную точку уменьшается с увеличением растягивающего усилия. Уменьшается оно и с ростом толщины ледяной пластины.

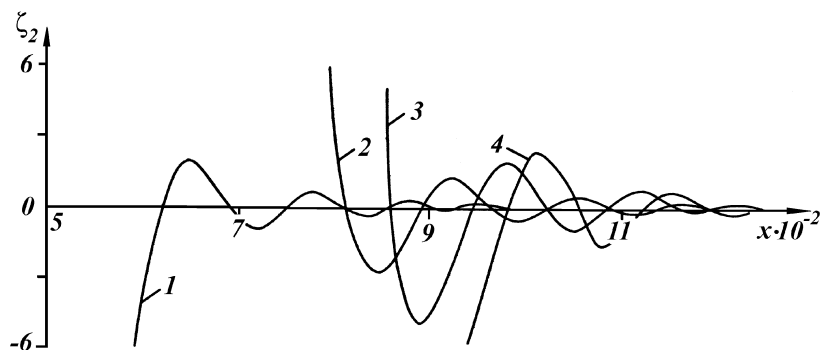


Рис. 2.9

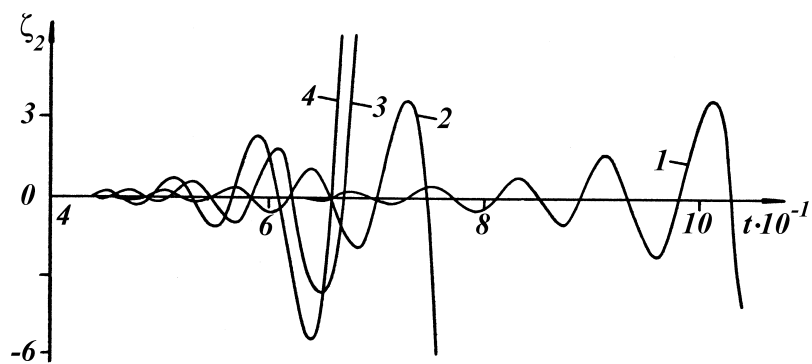


Рис. 2.10

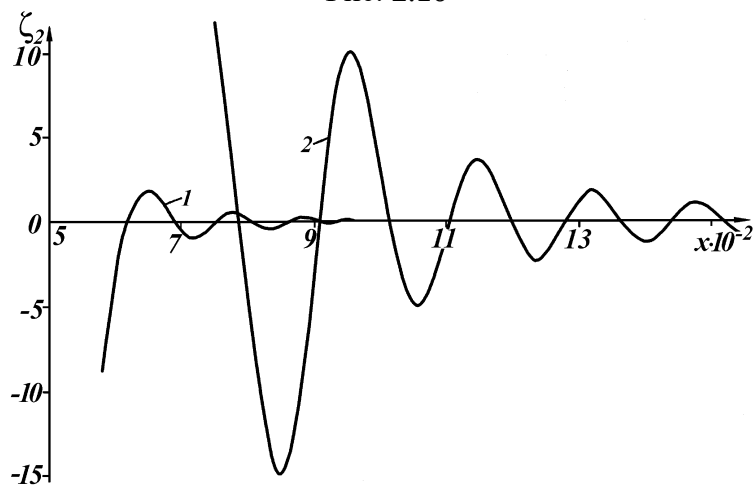


Рис. 2.11

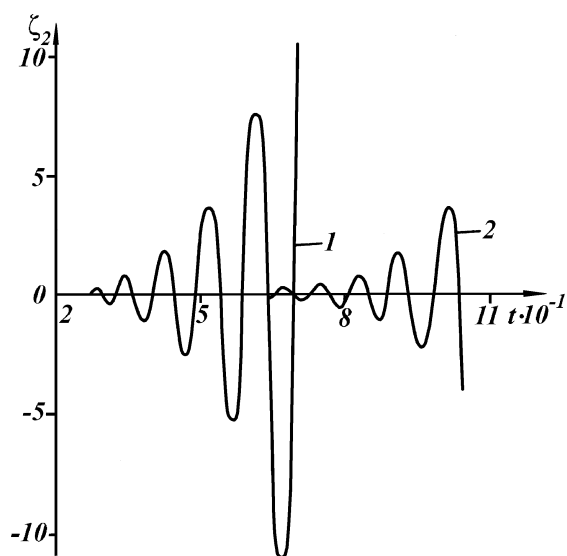


Рис. 2.12

В фиксированный момент времени колебания, обусловленные упругими волнами, затухают с расстоянием от эпицентра возмущений как с ростом h , так и с увеличением растягивающего усилия. Отметим при этом, что влияние продольного растяжения при фиксированном усилии ярче проявляется в случае меньших толщин льда.

2.4. Влияние ледового сжатия на развитие волн от периодических возмущений

Пусть теперь сплошной упругий лед (тонкая упругая пластинка), плавающий на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины, находится в состоянии продольного сжатия [76, 155]. Начиная с момента времени $t = 0$ к поверхности пластинки прикладываются периодические напряжения вида (2.8). Исследуем влияние ледового сжатия на развитие волн, предполагая, что в начальный момент времени ледяной покров и жидкость находятся в невозмущенном состоянии [25–30]. Потенциал скорости ϕ волнового движения жидкости определим из уравнения Лапласа (1.2), удовлетворяя при этом условиям (2.10) при $t = 0$, (2.9) на дне ($z = -H$), а также условию

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{a}{P_0} P$$

на невозмущенной поверхности лед-вода ($z = 0$), где выполняется и кинематическое соотношение $\zeta_t = \phi_z$. Здесь Q_1 , D_1 , χ_1 , a выражаются формулами (2.11), где $Q > 0$ следует рассматривать как величину сжимающего усилия на единицу ширины ледяной пластинки.

Применяя для решения задачи комплексное преобразование Фурье, найдем для возвышения ζ поверхности лед-вода (прогиба льда) интегральное представление (2.13). Отличие от случая продольного растяжения (2.2 этой главы) состоит лишь в том, что в условиях ледового сжатия $\theta_1 = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4$. Вычисление полученного интеграла проведем при условии $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, необходимом для устойчивости ледяной пластинки, сведя его, в силу теоремы Коши, к виду (2.14), где путь интегрирования L_1 идет вдоль действительной оси, обходя корни уравнения $\Delta_1(r) = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\text{Re}(i\Delta_1) > 0$, а путь L_2 совпадает с действительной осью, так как на ней $\Delta_2(r) = 0$.

Число полюсов подынтегральных функций в (2.14) (корней уравнения $\sigma - \tau(r) = 0$), а следовательно, и характер волнового движения определяется частотой колебаний и величиной сжимающего усилия. Это иллюстрируется рис. 2.13, где приведены дисперсионные кривые для

$h = 1$ м, $H = 10^3$ м и значений параметров (1.15). Кривые по порядку сверху вниз на этом рисунке отвечают Q_1 , равным

$$0, \sqrt{D_1}, 1.5\sqrt{D_1}, 1.8\sqrt{D_1}. \quad (2.23)$$

Таким Q_1 соответствуют сжимающие усилия $0, 1.68 \cdot 10^6, 2.52 \cdot 10^6, 3.03 \cdot 10^6$ Н/м.

При $Q_1 < Q_0$ уравнение $\sigma - \tau(r) = 0$ для любых σ и $r > 0$ имеет только один корень $r = r_1$. Если $Q_1 > Q_0$ и $r > 0$, то это уравнение имеет по одному корню $r = r_1$ и $r = r_3$ при выполнении условий $0 < \sigma < \sigma_1$ и $\sigma_2 < \sigma < \infty$ соответственно. В случае же $Q_1 > Q_0$, $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ есть три положительных корня $r = r_1, r = r_2, r = r_3$. Причем $r_3 > r_2 > r_1$. Так как функция $\tau(r)$ четная, то корнями рассматриваемого уравнения являются и $r = -r_i, i=1, 2, 3$ в соответствующих интервалах частоты колебаний. Здесь

$$\sigma_1 = \tau(\beta_1), \quad \sigma_2 = \tau(\beta_2), \quad \beta_1 > \beta_2 > 0, \quad \beta_1 < D_1^{-1/4}, \quad Q_0 = \tau_0(r_0),$$

$$\tau_0 = \frac{(1 + D_1 r^4) \tau_1(r) + 4 D_1 r^4 \tau_2(r)}{r^2 [\tau_1(r) + 2 \tau_2(r)]}, \quad (2.24)$$

$$\tau_1 = \text{th} r H + r H \text{ch}^{-2} r H \quad \tau_2 = (1 + \chi_1 r g \text{th} r H) \text{th} r H,$$

r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau_0'(r) = 0$, β_1 и β_2 – положительные корни уравнения $\tau'(r) = 0$, а штрих означает производную по r . Видно, что Q_0 зависит только от цилиндрической жесткости и толщины ледяной пластинки. Эта зависимость при $H = 10^3$ м значениях ρ_1, μ , из (1.15), $h \leq 10$ м иллюстрируется рис. 2.14, где кривые по порядку снизу вверх отвечают модулю нормальной упругости E (Н/м²) равному $1 \cdot 10^8, 5 \cdot 10^8, 1 \cdot 10^9, 3 \cdot 10^9, 9 \cdot 10^9$. Отсюда следует, что чем больше h и E , тем больше Q_0 .

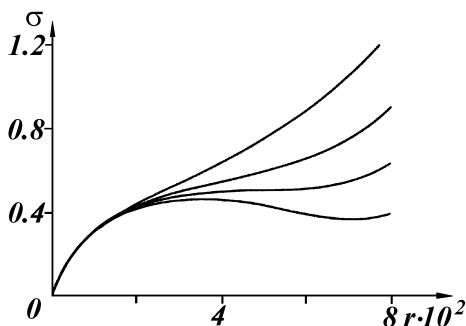


Рис. 2.13

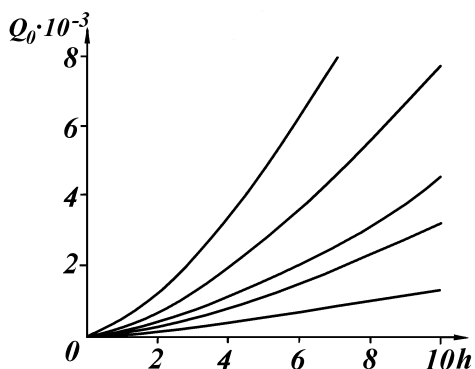


Рис. 2.14

Если $Q_1 = Q_0$, то $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$, а $\sigma_0 = \tau(r_0)$, r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau''(r) = 0$. С увеличением Q_1 от Q_0 до $2\sqrt{D_1}$

значение σ_1 уменьшается от σ_0 до нуля. Величина σ_2 при этом уменьшается от σ_0 до значения функции $\tau(r)$ в корне $r = \beta_2$ уравнения $\tau(r) = 0$, полученном для $Q_1 = 2\sqrt{D_1}$. В случае коротких волн ($r_1 H \gg 1$)

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 1 + \chi_1 r g, \quad \tau = \left[(1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4) r g \tau_2^{-1} \right]^{1/2},$$

а для определения β_1 и β_2 получим уравнение

$$4\chi_1 g D_1 r^5 + 5D_1 r^4 - 2\chi_1 g Q_1 r^3 - 3Q_1 r^2 + 1 = 0,$$

имеющее только два положительных корня.

Пусть $Q_1 > Q_0$, $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Контур интегрирования L_1 в интеграле (2.14) для этого случая обходит точки $r = r_2$, $r = -r_{1,3}$ в нижней, а точки $r = -r_2$, $r = r_{1,3}$ в верхней полуплоскостях. Проводя вычисление интегралов (2.14) методом контурного интегрирования с учетом положения стационарных точек (корней уравнения $M'_1(r) = 0$) относительно полюсов подынтегральных функций, получим

$$\zeta = \sum_{k=1}^3 \zeta_k,$$

$$\zeta_k = \begin{cases} \eta_k + O(1/\sqrt{|x|}), & |x| < V_k t, \\ O(1/\sqrt{|x|}), & |x| > V_k t, \end{cases}$$

$$\eta_k = A_k \sin \alpha_k, \quad A_k = A(r_k), \quad A = f^*(m)B(r), \quad V_k = |u(r_k)|,$$

$$m = (-1)^k r_k \operatorname{sign} x, \quad \alpha_k = r_k |x| + (-1)^k \sigma t, \quad u(r) = \tau'(r),$$

$$B(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a r g \operatorname{th} r H [(1 + \chi_1 r g \operatorname{th} r H) \sigma u(r)]^{-1}.$$

Видно, что периодические давления (2.8) при $Q_1 > Q_0$ и $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ генерируют три системы незатухающих с расстоянием волн. Две из них ζ_1 и ζ_3 движутся от области приложения давлений с фазовыми скоростями $v_1 = \sigma/r_1$, $v_3 = \sigma/r_3$. Волна же ζ_2 движется к области действия давлений. Ее фазовая скорость $v_2 = \sigma/r_2$. Передние фронты V_k всех трех волн ζ_k перемещаются от области давлений, а длины волн равны $\lambda_k = 2\pi/r_k$.

На частотах $0 < \sigma < \sigma_1$ при $Q_1 > Q_0$ в жидкости и ледяном покрове генерируется только одна система волн ζ_1 , движущихся от области давлений. Одна система волн ζ_3 возникает при $Q_1 > Q_0$ и на частотах $\sigma_2 < \sigma < \infty$.

Если $Q_1 < Q_0$, то при любых σ от области приложения давлений (2.8) в положительном и отрицательном направлениях оси x движется одна система незатухающих с расстоянием волн ζ_1 .

Для количественной оценки влияния продольного сжатия на элементы генерируемых волн проводились численные расчеты при $f(x)$ вида (2.16), значениях параметров (1.15), (2.23), $h = 1$ м, $l = 3 \cdot 10^2$ м, $H = 10^3$ м. Результаты расчетов представлены на рис. 2.15–2.18. Номера

кривых 1–4 на этих рисунках отвечают значениям Q_1 из (2.23) в порядке возрастания. Первые два значения Q_1 удовлетворяют условию $Q_1 < Q_0$. Поэтому линии 1, 2 характеризуют волну ζ_1 . Что касается линий 3, 4, отвечающих величинам $Q_1 > Q_0$, то их штриховые участки относятся к волне ζ_1 , штрихпунктирные к ζ_3 , а участки, изображенные точками – к ζ_2 . Кружкам на оси σ отвечают значения σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$), а на оси r – им соответствующие значения β_1 и β_2 ($\beta_1 > \beta_2$).

Влияние величины сжимающего усилия на распределение фазовых скоростей и скоростей передних фронтов (м/с) генерируемых волн по их длине и частоте колебаний иллюстрируется рис. 2.15, 2.16. Здесь $v(\sigma)$ и $u(\sigma)$ приведены для $\sigma > 0.24 \text{ с}^{-1}$ и $\sigma > 0.17 \text{ с}^{-1}$ соответственно, а функции $v(r)$ и $u(r)$ – для r , больших r_1 , отвечающего этим частотам. При частотах, меньших указанных, и длинах волн, им соответствующих, влияние изменения величины Q не проявляется на поведении u и v . Отметим, что при $\sigma \rightarrow 0$ функции $v(\sigma)$, $u(\sigma)$ стремятся к одинаковому пределу, равному $\sqrt{gH}$. Такой же предел имеют $v(r)$, $u(r)$ при $r \rightarrow 0$. Если $\sigma \rightarrow \infty$, то $u(\sigma) \rightarrow \infty$ и $v(\sigma) \rightarrow \infty$. К бесконечному пределу стремятся $v(\sigma)$, $u(\sigma)$ и при $r \rightarrow \infty$.

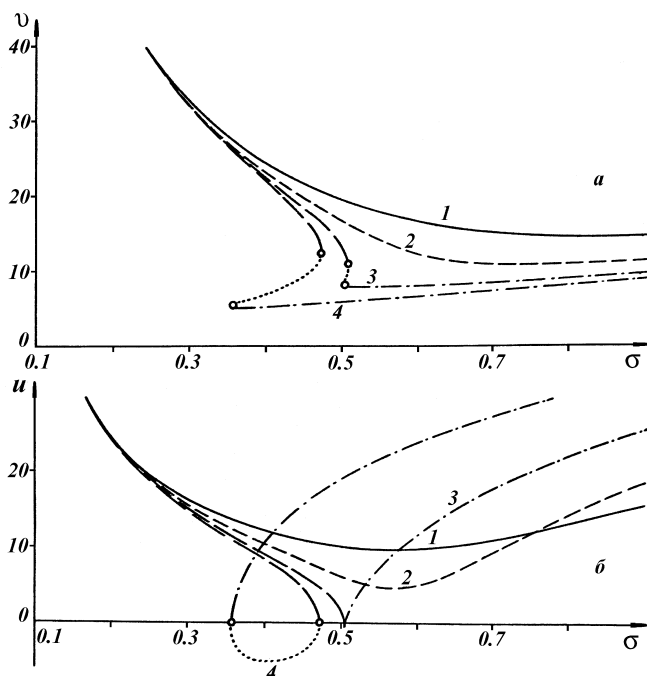


Рис. 2.15

Видно, что в случае $Q_1 < Q_0$ (линии 1,2) фазовая скорость и скорость переднего фронта волн ζ_1 как функции частоты колебаний имеют по одному минимуму. С ростом Q величины минимумов уменьшаются. Уменьша-

ются при этом и значения σ , на которых минимумы достигаются. Минимум $V_1(\sigma)$ достигается на частоту $\sigma = \bar{\sigma}_2$ меньшей, чем частота $\sigma = \bar{\sigma}_1$ минимума фазовой скорости. Величина минимального значения $v_1(\sigma)$ большая, чем для $V_1(\sigma)$. Кроме того, $v_1(\sigma) > V_1(\sigma)$, если $\sigma < \bar{\sigma}_1$ и $v_1(\sigma) < V_1(\sigma)$, если $\sigma > \bar{\sigma}_1$. При $\sigma = \bar{\sigma}_1$ фазовая скорость и скорость переднего фронта волн ζ_1 совпадают между собой. Напомним, что аналогичный результат имеет место и в случае продольного растяжения (раздел 2.2).

Как функции r (длины волны) скорости v_1 и V_1 при $Q_1 < Q_0$ также имеют по одному минимуму в точках $r = \bar{r}_1$ и $r = \bar{r}_2$ соответственно (рис. 2.16). Величины минимумов уменьшаются с ростом Q_1 , а их положение смещается в сторону больших r (меньших длин волн). В точке минимума фазовой скорости $v_1(r) = V_1(r)$. При $r < \bar{r}_1$ выполняется неравенство $v_1(r) > V_1(r)$, а если $r > \bar{r}_1$, то $v_1(r) < V_1(r)$. Здесь $\bar{r}_1 > 0$ корень уравнения $\tau\tau'(r) - \tau(r) = 0$, $\bar{r} > 0$ корень уравнения $\tau''(r) = 0$, а $\bar{\sigma}_1 = \tau(\bar{r}_1)$, $\bar{\sigma}_2 = \tau(\bar{r}_2)$.

Длина волны ζ_1 при $Q_1 < Q_0$ монотонно убывает с частотой. Причем на заданной частоте большему Q_1 отвечает меньшее значение λ_1 , что следует из рис. 2.13. Убывает с ростом Q_1 и скорость v_1 . Скорость же V_1 при этом может как расти, так и уменьшаться (кривые 1, 2 на рис. 2.15, б).

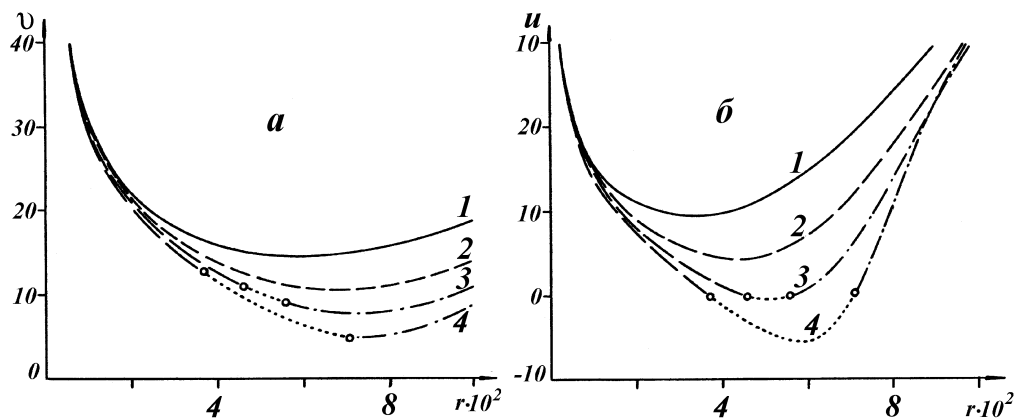


Рис. 2.16

В случае $Q_1 > Q_0$ скорость V_1 переднего фронта волны ζ_1 , генерируемой при $\sigma < \sigma_2$, убывает с ростом частоты колебаний. Скорость V_3 переднего фронта волны ζ_3 , возникающей на частотах $\sigma > \sigma_1$, растет при этом. Функция же $V_2(\sigma)$, определяемая как модуль $u(\sigma)$ при $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ и характеризующая фронтальную скорость волны ζ_2 , имеет максимум при $\sigma = \bar{\sigma}_2$. Фазовая скорость волны ζ_1 убывает, а волны ζ_2 растет с увеличением σ , в то время как $v_3(\sigma)$ в окрестности частоты $\sigma = \bar{\sigma}_2$ имеет слабо

выраженный минимум. Убывают с частотой и λ_1 , λ_3 , а λ_2 растет. При $\sigma > \sigma_1$ большому $Q_1 \in (Q_0, 2\sqrt{D_1})$ отвечают меньшие значения λ_1 , ν_1 , V_1 , λ_3 , ν_3 . Величина V_3 растет с ростом Q_1 . Если при двух значениях Q_1 интервалы (σ_1, σ_2) пересекаются, то на пересечении большему Q_1 соответствуют большие V_2 , ν_2 , λ_2 .

Функции $\nu_1(r)$ и $V_1(r)$ при $Q_1 > Q_0$ (штриховые участки кривых 3, 4 на рис. 2.16) - монотонно убывают. Убывает с ростом r (с уменьшением длины волны) и фазовая скорость волны ζ_2 . У волны же ζ_3 фазовая скорость при $r = \bar{r}_1$ имеет минимум, а скорость переднего фронта растет с увеличением r (убывает с уменьшением длины волны). Из волн ζ_1 при заданной длине большую фазовую и фронтальную скорость имеет та, которая генерируется при меньшем сжимающем усилии. Это же справедливо и для волн ζ_2 (рис. 2.16). Волны ζ_3 при фиксированной длине также движутся медленнее при большем усилии ледового сжатия. Их передние фронты при этом могут перемещаться как быстрее, так и медленнее.

Влияние сжимающего усилия на распределение амплитуды A генерируемых волн по их длине и по частоте колебаний иллюстрируется рис. 2.17, 2.18 с точностью до множителя a . Из рис. 2.17 следует, что при $Q_1 < Q_0$ влияние продольного сжатия на амплитуду волны ζ_1 (рис. 2.17, *a*) начинает проявляться только с частоты $\sigma \approx 0.31 \text{ c}^{-1}$. При этом с увеличением Q_1 экстремальные значения функции $A(\sigma)$ в порядке возрастания их номера растут, а положение экстремумов смещается в сторону меньших частот. Например, второй экстремум $A_1(r_1)$ равен 1.9, если $Q_1 = 0$, и 2.8, если $Q_1 = \sqrt{D_1}$. Достигаются они соответственно на частотах 0.5 и 0.475 c^{-1} . Амплитуда волн ζ_2 , генерируемых при $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ и $Q_1 \in (Q_0, 2\sqrt{D_1})$, может при фиксированной частоте существенно превосходить и амплитуду ζ_1 и амплитуду ζ_3 . В частности, при $\sigma = 0.41 \text{ c}^{-1}$, $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$ величины $|A(r_1)|$, $|A(r_2)|$, $|A(r_3)|$ равны соответственно 1.7, 4.2, 1.5.

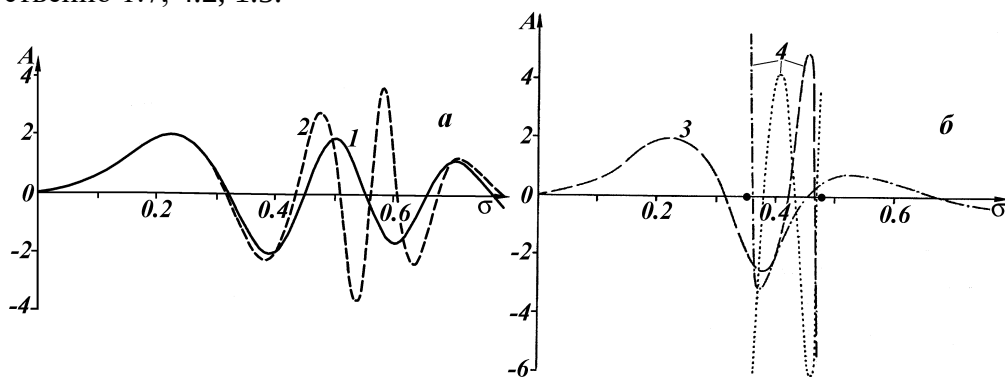


Рис. 2.17

Из сравнения рис. 2.17, *а* и 2.17, *б* видно, что на частотах меньших, чем σ_1 , для $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$ продольное сжатие мало деформирует поверхность лед-вода (прогиб льда) по сравнению со случаем $Q_1 = 0$. На частотах, больших значения σ_2 , отвечающего $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$, сжимающее усилие гасит амплитуду волн, генерируемых давлениями (2.10) и делает возвышение поверхности лед-вода более пологим. На частотах же $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ вид поверхности лед-вода при соответствующем сжатии формируется из трех волн и может быть принципиально иным, чем в случае отсутствия ледового сжатия.

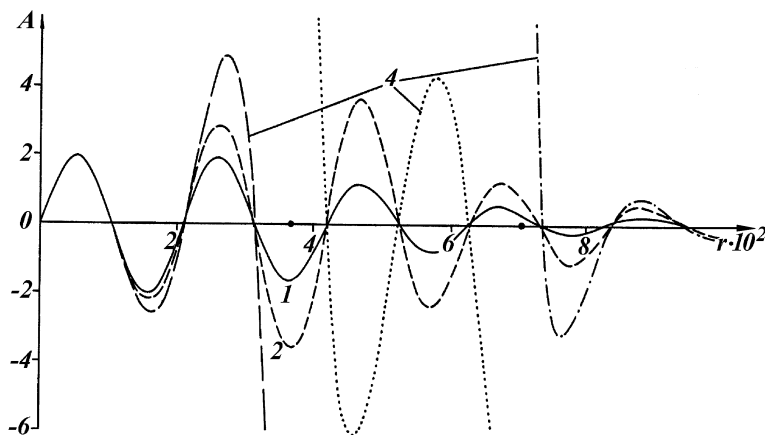


Рис. 2.18

Большому сжимающему усилию при условии $Q_1 < Q_0$ отвечает большой размах вертикальных колебаний функции $A(r)$ (рис. 2.18). Однако, если при $Q_1 = Q_0$ (линия 1) амплитуда функции $A(r)$ для рассматриваемых значений параметров затухает с ростом r , то в условиях ледового сжатия она может как увеличиваться, так и уменьшаться. В частности, при $Q_1 < Q_0$ возрастание экстремальных значений $A(r)$ прослеживается для $r < \bar{r}_2$, а убывание – для $r > \bar{r}_2$. Большой вертикальный размах колебаний $A(r)$ имеет место и при $Q_1 > Q_0$. Положение же нулевых значений $A(r)$ не смещается по оси r с изменением величины сжимающего усилия. Это говорит о существовании таких длин волн (волновых чисел), когда отсутствуют вертикальные смещения поверхности лед-вода независимо от величины Q . Однако каждой из таких длин при различных Q_1 отвечают разные значения частоты колебаний.

При наблюдении за колебаниями ледяного покрова на дрейфующей станции «Северный полюс-20» удалось зафиксировать момент образования разлома ледяного поля [131]. Разлому сопутствовали изгибно-гравитационные волны с периодами 20-25 сек. и длинами около 600 м.

Высказано предположение, что разлом образовался из-за появления этих волн, однако причина их возникновения была неизвестна.

Возможно, что зарегистрированные волны обусловлены ледовым сжатием. Это следует из предыдущих результатов. Для количественной оценки волновых характеристик и сравнения их с наблюдавшимися на дрейфующей станции СП-20 проводились численные расчеты. Глубина океана в районе станции, модуль упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона льда составляли соответственно 3050 м, $9 \cdot 10^9$ Н/м², 4.5 м, 900 кг/м³, 0.3. Эти данные были взяты за исходные. Результаты расчетов показали, что для $Q_1 = 1.5\sqrt{D_1}$ величины σ_1 и σ_2 равны 0.253 и 0.256 с⁻¹ а длина волны сжатия ζ_2 , заключена в пределах $450 < \lambda_2 < 540$ м. Ее период 24.6 – 24.8 с. Значение $Q_1 = 1.5\sqrt{D_1}$ близко к Q_0 , характеризующему величину сжимающего усилия, приводящего к изменению волнового движения. Вычисленные значения длины и периода волны сжатия ζ_2 согласуются с полученными на СП-20. Это дает основание рассматривать волну ζ_2 и сжимающее усилие $Q = \rho g Q_0$ как один из возможных предвестников и механизмов разлома ледяного поля. При $Q_1 = 1.5\sqrt{D_1}$ фазовая скорость волны сжатия в зависимости от σ принимает значения от 16 до 22 м·с⁻¹, а фронтальная, обращаясь в ноль при $Q_1 = Q_0$, не превосходит 1 м·с⁻¹. Частоты $\sigma_{1,2}$ являются резонансными для амплитуд A_k и напряжений изгиба $F_k = \frac{1}{2}r_k^2 A_k E h$ в ледяном покрове на гребнях волн ζ_k . При $Q_1 > Q_0$ амплитуды волн $\zeta_{2,3}$ и напряжения изгиба достигают на интервале (σ_1, σ_2) значительных величин. При $l(x)$ вида (2.16) $f = 3 \cdot 10^2$ м, $p_0 = 100$ Па и $Q_1 = 1.5\sqrt{D_1}$ даже минимальные значения $F_2(\sigma)$ и $A_2(\sigma)$ внутри указанного интервала частоты в зоне сжатия равны 10 кг/см² и 35 см.

2.5. Развитие изгибно-гравитационных волн от импульсных возмущений в условиях ледового сжатия

Проведем теперь анализ влияния ледового сжатия на процесс развития волн, возникающих под действием малых вертикальных смещений участки дна бассейна. В начальный момент времени идеальная несжимаемая жидкость и плавающий на ней продольно сжатый сплошной упругий лед (тонкая упругая пластинка) находятся в покое. Начиная с момента времени $t = 0$ участок дна бассейна смещается с вертикальной скоростью (2.17). Генерируемое волновое движение определяется потенциалом скорости ϕ , удовлетворяющим уравнению Лапласа (1.2), начальным (2.10) и граничным условиям (2.18) на дне и

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \zeta_t = \varphi_z$$

на невозмущенной поверхности лед-вода ($z = 0$).

Решая задачу как и в случае продольного растяжения (2.3 этой главы), получим для возвышения поверхности лед-вода интегральное представление (2.19), где следует положить $\theta_1 = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4$. Для $\psi(t)$ вида (2.20) интеграл (2.19) сводится к (2.21), который вычислим методом стационарных фаз при $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$.

Пусть $Q_1 < Q_0$, где Q_0 определяется выражением (2.24). При таком условии фазовые функции $M_{1,2}(r)$ ведут себя качественно так же, как и в случае продольного растяжения. Это объясняется при данном условии качественно похожим поведением $\tau(r)$ для растягивающих и сжимающих усилий. В первом случае $\tau(r)$ совпадает с $\sigma(r)$ на рис. 2.4, во втором – с $\sigma(r)$ на рис. 2.13, где две верхние кривые даны для Q_1 , удовлетворяющих условию $Q_1 < Q_0$. Сравнивая кривые рис. 2.4 с кривыми на рис. 2.13, а также кривые на рис. 2.5, б с кривыми рис. 2.16, б, видим, что условия существования стационарных точек у фазовых функций $M_{1,2}(r)$ при сжимающих усилиях $Q < \rho g Q_0$ те же, что и при растягивающих. Следовательно, вид поверхности лед-вода в условиях ледового сжатия при $Q < \rho g Q_0$ определяется как и при растяжении формулами (2.22). Большому сжимающему усилию отвечает меньшая скорость u_2 заднего фронта волн ζ_1 и ζ_2 . Скорость u_1 переднего фронта гравитационных волн ζ_1 не зависит от величины Q . Она равна $\sqrt{gH}$ при любом Q . Зависимость u_2 от величины сжимающего усилия хорошо видна на рис. 2.16, б, где она при $Q_1 < Q_0$ характеризуется минимальными значениями на двух верхних кривых $u(r) = \tau'(r)$, приведенных соответственно для усилий сжатия 0 (верхняя кривая) и $1.68 \cdot 10^6$ Н/м.

Влияние ледового сжатия на значения местных фазовых скоростей ($\tau(r)/r$) и длин ($2\pi/r$) возникающих волн характеризуется двумя верхними кривыми на рис. 2.16, а и 2.16, б соответственно. Участки кривых слева от минимума на рис. 2.16, б относятся к ζ_1 , а справа – к ζ_2 . Видно, что при фиксированном $v = t/|x|$ местная длина $\lambda_1 = 2\pi/r_1$ волны ζ_1 растет, а $\lambda_2 = 2\pi/r_2$ волны ζ_2 убывает с ростом Q_1 . Причем $\lambda_0 < \lambda_1 < \infty$, $0 < \lambda_2 < \lambda_0$, где λ_0 , равное $2\pi/r_0$, уменьшается с увеличением усилия сжатия. Гравитационная ζ_1 и упругая ζ_2 волны с фиксированными местными длинами имеют большие местные фазовые скорости при меньшем сжимающем усилии. Для наблюдателя в фиксированной точке x время прохождения упругих и гравитационных волн увеличивается с ростом Q . Чем больше сжимающее усилие, тем в заданный момент времени задний фронт волн находится на меньшем удалении от эпицентра возмущений. Вертикальный размах колебаний функции $\zeta_2(x)$ и $\zeta_2(t)$ уменьшается с ростом Q .

Пусть $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Тогда для $x > 0$ фазовая функция $M_1(r) = r + v\tau(r)$ имеет одну $(-r_2)$, две $(-r_1, -r_2)$ или четыре $(-r_1, -r_2, +r_3, +r_4)$ стационарные точки, корни уравнения $M'_1(r) = 0$, при выполнении условий $v^{-1} > u_1$, $u_2 < v^{-1} < u_1$, $v^{-1} < u_2$ соответственно. Здесь $u_1 = \sqrt{gH}$, $u_2 = -\tau'(r_0)$, $v = t/|x|$, $0 < r_1 < r_3 < r_4 < r_2$, r_0 – положительный корень уравнения $\tau''(r) = 0$, $\tau(r)$ определяется формулой (2.21), где следует положить $Q_1 = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4$. У фазовой функции $M_2(r) = r - v\tau(r)$ при аналогичных условиях и $x > 0$ также будет одна (r_2) , две (r_1, r_2) или четыре $(r_1, r_2, -r_3, -r_4)$ стационарные точки. Для $x < 0$ функции $M_{1,2}$ имеют вид $M_1(r) = -r + v\tau(r)$, $M_2(r) = -r - v\tau(r)$, а их стационарные точки отличаются от стационарных точек в случае $x > 0$ только знаками. Принимая это во внимание и считая $f(x)$ четной, из (2.21) найдем такое выражение для поверхности лед-вода:

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_2 + O(1/|x|), & |x| > u_1 t, \\ \sum_{k=1}^2 \zeta_k + O(1/|x|), & u_2 t < |x| < u_1 t, \\ \sum_{k=1}^4 \zeta_k + O(1/|x|), & |x| < u_2 t, \end{cases}$$

$$\zeta_k = \frac{1}{|x|} A(r_k) \cos \alpha_k, \quad A = \frac{f^*(r)}{b_1(r) \operatorname{chr} H} [jv\tau''(r)]^{-1/2},$$

$$\alpha_k = \begin{cases} r_k |x| - t\tau(r_k) - (-1)^k \frac{\pi}{4}, & k=1,2, \\ r_k |x| + t\tau(r_k) + (-1)^k \frac{\pi}{4}, & k=3,4, \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1, & k=2,4, \\ -1, & k=1,3. \end{cases}$$

Видно, что волновое движение формируется одной, двумя или четырьмя волнами. Волна ζ_1 гравитационная, ζ_2 упругая, а ζ_3 и ζ_4 обусловлены ледовым сжатием. Передние фронты волн сжатия перемещаются от области приложения возмущений с одинаковой скоростью u_2 . Большему сжимающему усилию отвечает и большая скорость u_2 . Это следует и из рис. 2.16, б, где u_2 характеризуется модулем минимального значения на точечных участках кривых $u = \tau'(r)$, верхняя из которых отвечает сжимающему усилию $2.52 \cdot 10^6$ Н/м, а нижняя – усилию $3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Так как генерируемые волны не имеют задних фронтов, то чем больше Q_1 , тем больше область покрыта волнами ζ_3, ζ_4 . Волны сжатия движутся к эпицентру возмущений с местными фазовыми скоро-

стями, равными $v_{3,4} = \tau(r_{3,4})/r_{3,4}$. Характер зависимости $v_{3,4}$ от величины сжимающего усилия показан на рис. 2.16, а точечными участками кривых. При фиксированных v местные длины $\lambda_3 = 2\pi/r_3$ волн большие, чем длины $\lambda_4 = 2\pi/r_4$ волн ζ_4 . Кроме того, $\lambda_1 > \lambda_3 > \lambda_0 > \lambda_4 > \lambda_2$. Скорость переднего фронта гравитационных волн ζ_1 не зависит от Q_1 . Она, как и для $Q_1 < Q_0$, равна $\sqrt{gH}$.

2.6 Развитие изгибно-гравитационных волн от периодических возмущений в условиях неравномерного ледового сжатия

Пусть на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает тонкая упругая изотропная ледяная пластинка. В горизонтальных направлениях пластинка и жидкость не ограничены. В начальный момент времени жидкость не возмущена, а поверхность лед-вода горизонтальна. С момента времени $t = 0$ к поверхности ледяного покрова прикладываются периодические перемещающиеся давления [70, 71, 118] вида

$$p = p_0 f(x) \exp[i(ny - \sigma t)]. \quad (2.25)$$

Рассмотрим влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн, считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб ледяной пластинки ζ малыми.

С учетом сил сжатия задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad -H \leq z \leq 0, \quad |x| < \infty, \quad |y| < \infty \quad (2.26)$$

с граничными и начальными условиями

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + Q_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -p_1, \quad z = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H, \quad \varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0,$$

$Q_1 = Q_x / (\rho g)$, $Q_2 = Q_y / (\rho g)$, $p_1 = p / (\rho g)$, $\nabla^4 = \Delta_l^2$, $\Delta_l = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$. Здесь $Q_x < 0$, $Q_y < 0$ – растягивающие усилия вдоль соответствующих осей координат, ζ и потенциал скорости φ связаны условием $\zeta_t = \varphi_z$ при $z = 0$.

Отыскивая φ и ζ в виде $\varphi = \varphi_0(x, z, t) \exp(iny)$, $\zeta = \zeta_0(x, t) \exp(iny)$, из (2.25) – (2.27) методом интегральных преобразований получим

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{2\pi}} e^{i(ny - \sigma t)} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(m) \psi(m, t) f^*(m) e^{imx} dm, \quad (2.28)$$

$$\psi(m, t) = \frac{2}{\Delta} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{it\Delta_1} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{it\Delta_2},$$

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2, \quad \Delta_k = \sigma + (-1)^k \tau, \quad \tau = \sqrt{\theta(m) l(m)}, \quad a_1 = p_0 / (\rho g),$$

$$\theta = (1 + \chi_1 r g \operatorname{th} r H)^{-1} r g \operatorname{th} r H, \quad r = \sqrt{m^2 + n^2},$$

$$l = (2\sqrt{D_1} - Q_2)n^2 + (2\sqrt{D_1} - Q_1)m^2 + (1 - \sqrt{D_1}r^2)^2,$$

$f^*(m)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$.

Вычисление интеграла (2.28) проведем для значений $D_1 < 2\sqrt{D_1}$, $D_2 < 2\sqrt{D_2}$, обеспечивающих устойчивость пластинки.

Подынтегральная функция $\psi(m, t)$ в (2.28) не имеет особенностей на пути интегрирования, так как особенности первого и второго слагаемых, представляющие собою вещественные корни $m = \pm m_k$ уравнения $\Delta_1 = 0$, взаимно погашаются. Следовательно, в силу теоремы Коши исходный путь интегрирования можно деформировать в путь, обходящий эти особенности. Примем за путь интегрирования контур L , идущий вдоль действительной оси, обходя точки $m = \pm m_k$ по малым полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_1) < 0$, и перепишем (2.28) в виде

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{2\pi}} (\eta - \eta_1 + \eta_2),$$

$$\eta = \exp[i(ny - \sigma t)] \int_{L_1} \frac{2\theta}{\Delta} f^*(m) \exp(imx) dm, \quad (2.29)$$

$$\eta_j = \exp(iny) \int_{L_j} \frac{\theta}{\tau \Delta_j} f^*(m) \exp[i|x| M_j(m)] dm,$$

$$M_j = m \operatorname{sign} x \pm v \tau, \quad v = t/|x|, \quad j = 1, 2.$$

Здесь L_2 совпадает с действительной осью, так как на ней $\Delta_2(m) \neq 0$.

Численный анализ поведения функции $\tau(m)$ в случае ледяной пластинки [33] показал, что число корней $m = \pm m_k$ уравнения $\Delta_1 = 0$ зависит от продольного Q_x и поперечного Q_y сжимающих (растягивающих) усилий, частоты колебаний σ и волнового числа n давлений (2.25). Это иллюстрируют дисперсионные поверхности на рис. 2.19 ($Q_x = 0$) и рис. 2.20 ($Q_x = 1.8\sqrt{D_1}$) для значений (1.15), $H = 10^3$ м, $h = 1$ м.

Верхние и нижние поверхности на рис. 2.19, 2.20 отвечают значениям $Q_2 = -1.8\sqrt{D_1}$ и $Q_2 = 1.8\sqrt{D_1}$, характеризующим соответственно растяжение и сжатие в поперечном направлении. Средние поверхности приведены для $Q_y = 0$.

Если $0 \leq Q_1 < Q_1^*$ (рис. 2.19) или $Q_1 < 0$, то уравнение $\Delta_1(m) = 0$ при поперечном растяжении ($Q_2 < 0$) и поперечном сжатии $0 \leq Q_2 < 2\sqrt{D_1}$ имеет только один положительный корень $m = m_1$ для $\sigma \geq \sigma_0$. Здесь

$$Q_1^* = \tau_0(m_0), \quad \sigma_0 = \tau^*(n), \quad \tau^* = \tau(0),$$

$$\tau_0(m) = [(1 + D_1 m^4) \tau_1 + 4 D_1 m^4 \tau_2] [m^2 (\tau_1 + 2 \tau_2)]^{-1},$$

$$\tau_1 = \operatorname{th} mH + mH \operatorname{ch}^{-2} mH, \quad \tau_2 = (1 + \chi_1 mg \operatorname{th} mH) \operatorname{th} mH;$$

m_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau'(m) = 0$ (штрих означает производную по m).

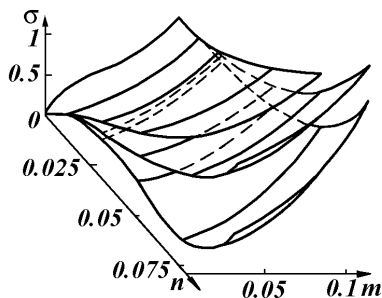


Рис. 2.19

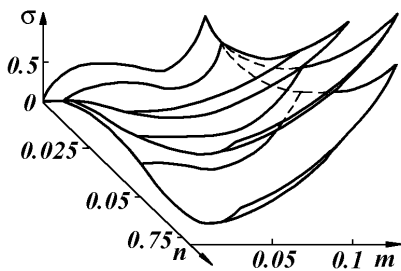


Рис. 2.20

При условии $Q_1^* < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ для $Q_2 < 0$ и для $0 < Q_2 < 2\sqrt{D_1}$, как и в случае $Q_y = 0$, уравнение $\Delta_1 = 0$ на частотах $\sigma \geq \sigma_0$ в зависимости от волнового числа давлений может иметь один, два или три положительных корня $m = m_k$ ($k = 1, 2, 3$). Из них корень m_1 характеризуется участком функции $\tau(m)$, на котором $\tau''(m) < 0$, а корень m_3 – участком, где $\tau''(m) > 0$. Убывающая часть $\tau(m)$ определяет корень m_2 . Поперечное сжатие (растяжение) может изменить не только значения корней, но и их число. В частности, для $n = 0.05 \text{ м}^{-1}$, $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$ (рис. 2.20) в случае $Q_2 = 0$ имеется только один корень, а при $Q_2 = 1.8\sqrt{D_1}$ – два. Интервалы частот, на которых существует каждый из корней, также меняются.

Отметим, что в силу четности функции $\tau(m)$ корнями уравнения $\Delta_1 = 0$ будут и значения $m = -m_k$, $k = 1, 2, 3$. Влияние продольного сжатия ($Q_k > 0$) и растяжения ($Q_k < 0$) на σ_0 не проявляется. Вид кривой $\sigma_0 = \tau^*(n)$, представляющей собой на рис. 2.19, 2.20 линию пересечения дисперсионной поверхности с координатной плоскостью $m = 0$, определяется усилием поперечного сжатия (растяжения). Влияние Q_y на поведение $\tau^*(n)$ аналогично влиянию Q_x на поведение линии пересечения дисперсионных поверхностей с плоскостью $n = 0$. Эта линия характеризует дисперсионную зависимость волн в случае плоского фронта не перемещающихся периодических давлений.

Проведя вычисление интегралов (2.29) методом контурного интегрирования с учетом положения стационарных точек фазовых функций

$M_j(m)$ относительно полюсов подынтегральных выражений, установим, что каждому из корней $m = m_k, k = 1, 2, 3$ отвечает система волн ζ_k вида

$$\zeta_k = \begin{cases} A_k \sin \gamma_k + O(1/\sqrt{|x|}), & |x| < V_k t, \\ O(1/\sqrt{|x|}), & |x| > V_k t, \end{cases} \quad (2.30)$$

$$A_k = f^*(m_k^0)A(m_k), \quad A(m) = a_1 \sqrt{\pi/2\theta}/(\sigma u), \quad V_k = |u(m_k)|,$$

$$m_k^0 = (-1)^{k+1} m_k \operatorname{sign} x, \quad \gamma_k = m_k |x| - (-1)^k (ny - \sigma t), \quad u(m) = \tau'(m).$$

Следовательно, число возбуждаемых волн определяется значениями сжимающих (растягивающих) усилий, частотой σ и длиной $2\pi/n$ волны давлений.

Если пластинка растянута в продольном и поперечном направлениях, то при любых растягивающих усилиях на частотах $\sigma > \sigma_0$ возбуждается только одна система волн ζ_1 , уходящих от полосы давлений. Она носит характер гравитационных волн, если $\sigma''(m) < 0$, и изгибных, – если $\sigma''(m) > 0$. Эта система формирует колебания и в случае, если пластинка растянута в продольном и сжата в поперечном направлениях ($Q_1 < 0, 0 \leq Q_2 < 2\sqrt{D_1}$) или неравномерно сжата усилиями, удовлетворяющими условиям $0 \leq Q_1 < Q_1^*, 0 \leq Q_2 < 2\sqrt{D_1}$.

При выполнении условий $Q_1^* < Q_1 < 2\sqrt{D_1}, 0 < Q_2 \leq 2\sqrt{D_1}$ колебания пластинки и волновое движение жидкости под ней формируются одной (ζ_1 или ζ_3), двумя (ζ_2, ζ_3) или тремя ($\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$) системами незатухающих с расстоянием волн (2.30). Из них волны ζ_2 генерируются только в условиях сжатия при соответствующих сжимающих усилиях. Сжатием обусловлены и волны ζ_3 , если они возбуждаются вместе с ζ_2 .

Каждая из волн ζ_k перемещается в направлении, составляющем с осью x угол $\alpha_k = (-1)^{k+1} \arctg(n/m_k)$. Скорости передних фронтов этих волн равны V_k , а их фазовые скорости v_k , и длины λ_k определяются по формулам $v_k = \sigma/r_k, \lambda_k = 2\pi/r_k, r_k = \sqrt{m^2 + n^2}$. При этом для заданного $n > 0$ частота $\sigma_0 = \tau^*(n)$ является резонансной.

Таким образом, периодические давления типа бегущей волны в полосе поверхности плавающей неравномерно сжатой упругой ледяной пластинки могут возбуждать одну, две или три системы прогрессивных незатухающих с расстоянием волн. Две из них обусловлены силами сжатия. Каждая их волн распространяется под соответствующим углом к полосе. Их длины и фазовые скорости меньше, чем длина и фазовая скорость волны давлений. Количество волн, их характеристики и условия возбуждения зависят от сжимающих усилий и параметров давлений. Значения резонансных частот и длин волн давлений при фиксированной глубине жидкости определяются цилиндрической жесткостью ледяной пластинки и поперечным сжимающим усилием.

ГЛАВА 3. НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ВОЛНЫ В УСЛОВИЯХ СТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА

3.1. Влияние битого льда на волны от периодических поверхностных давлений

Пусть невозмущенная поверхность однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн постоянной глубины H и текущей со скоростью u в положительном направлении оси x , покрыта битым дрейфующим льдом. Начиная с момента времени $t = 0$ к поверхности льда прикладываются периодические давления вида

$$p(x, t) = p_0 f(x) \exp(i\sigma t). \quad (3.1)$$

Изучим процесс развития волн, считая, что до начала действия давлений (3.1) поток не возмущен, а поверхность лед-вода горизонтальна. В предположениях линейной теории задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad -H \leq z \leq 0, \quad -\infty < x < \infty \quad (3.2)$$

с граничными

$$m(\zeta_{tt} + 2u\zeta_{tx} + u^2\zeta_{xx}) + \rho g \zeta + (\varphi_t + u\varphi_x)\rho = -p \quad \text{при } z = 0, \quad (3.3)$$

$$\varphi_z = 0 \quad \text{при } z = -H$$

и начальными условиями

$$\varphi(x, z, 0) = \zeta(x, 0) = 0. \quad (3.4)$$

Здесь $m = \rho_1 h$, ρ и ρ_1 – плотность жидкости и льда, h – толщина льда, ζ – отклонение поверхности лед-вода от невозмущенного состояния, а потенциал возмущенной скорости φ связан с ζ кинематическим условием

$$\zeta_t = \varphi_z - u\zeta_x. \quad (3.5)$$

Применяя для решения задачи преобразование Фурье по переменной x и удовлетворяя граничным условиям (3.3), получим уравнение

$$\zeta_{tt}^* + 2iur\zeta_t^* + (\tau^2 - u^2r^2) f^* = -\frac{p_0}{\rho g} \tau^2 f^*(r) \exp(i\sigma t),$$

$$\tau = (rgthrH)^{1/2} (1 + \chi rthrH)^{-1/2}, \quad \chi = h\rho_1 / \rho,$$

$$f^*(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-irx) dx, \quad \zeta^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) \exp(-irx) dx.$$

Отсюда после удовлетворения начальных условий (3.4) и применения обратного преобразования Фурье получим для возвышения поверхности лед-вода выражение

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{p_0}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \psi(r, t) f^*(r) \exp(irx) dr, \quad (3.6)$$

где

$$\psi(r, t) = \left[\frac{2}{\Delta} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-it\Delta_1} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-it\Delta_2} \right] e^{i\sigma t}, \quad (3.7)$$

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2, \quad \Delta_1 = \sigma + ur - \tau, \quad \Delta_2 = \sigma + ur + \tau.$$

Подынтегральная функция не имеет особенностей на пути интегрирования, так как имеющиеся особенности отдельных слагаемых, представляющие собой вещественные корни уравнений $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, взаимно погашаются. Поэтому исходный путь интегрирования можно деформировать в путь, идущей вдоль действительной оси и обходящий эти особенности. Будем обходить корни уравнения $\Delta_1 = 0$ по малым полукружностям, на которых $\text{Re}(i\Delta_1) > 0$, а корни уравнения $\Delta_2 = 0$ по полукружностям, где $\text{Re}(i\Delta_2) > 0$. Анализ показал, что уравнение $\Delta_2 = 0$ имеет только один корень $r = -\alpha_2$. Уравнение $\Delta_1 = 0$ в случае $\sigma > \sqrt{g/\chi}$ при любых скоростях потока также имеет только один корень $r = -\alpha_1$. Один корень $r = -\alpha_1$ это уравнение имеет и при условии

$$\sigma < \sqrt{g/\chi}, \quad u > u_0, \quad u_0 = [\tau(r_0) - \sigma]r_0^{-1},$$

где r_0 – положительный корень уравнения

$$\tau(1 + 2rH/\text{sh } 2rH) + 2(\sigma - \tau)(1 + \chi r \text{ th } rH) = 0.$$

При $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u < u_0$ уравнение $\Delta_1 = 0$, кроме $r = -\alpha_1$ имеет еще два положительных корня α_5 , α_6 . Причем $\alpha_2 > \alpha_5 > \alpha_6 > \alpha_1 > 0$. Для коротких волн $\alpha_6 > (1 - \chi\sigma^2/g)^{-1}\sigma^2/g$, а для длинных $\alpha_6 > [gH(1 - \chi\sigma^2/g)]^{-1/2}\sigma$.

Перепишем теперь (3.6) так:

$$\zeta = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{p_0}{\rho g} (\eta_1 - \eta_2 - \eta), \quad (3.8)$$

где

$$\eta_k = \int_{L_k}^{\tau} \frac{f^*(r)}{\Delta_k} \exp(i|x|M_k) dr, \quad k=1,2,$$

$$\eta = \int_{L_k}^{\tau} \frac{2\tau^2}{\Delta} f^*(r) \exp(irx) dr \exp(i\sigma t), \quad (3.9)$$

$$M_k = -[ur + (-1)^k \tau(r)]v + r \text{ sign } x, \quad v = t/|x|.$$

Здесь путь L_2 совпадает с действительной осью всюду, кроме окрестности точки $r = -\alpha_2$, которую он обходит снизу. Путь L_1 при $\sigma > \sqrt{g/\chi}$, $u \geq 0$ или $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u > u_0$ обходит только точку $r = -\alpha_1$ (обход снизу), а при условии $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u < u_0$ еще и точки $r = \alpha_6$ (сверху) и $r = \alpha_5$

(снизу). Путь L обходит снизу точку $r = -\alpha_2$, а в остальном совпадает с L_1 . При таком выборе обхода полюсов выражения η_1 и η_2 , представляющие собой неустановившуюся часть движения, стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного значения x .

Проводя вычисление интегралов (3.9) методом контурного интегрирования с учетом положения стационарных точек относительно полюсов подынтегральных функций, получим при больших положительных x (вниз по потоку)

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta^*, & x < V_2 t, \\ \zeta_1 + \zeta^*, & V_2 t < x < V_1 t, \\ \zeta^*, & x > V_1 t, \end{cases}$$

если $\sigma > \sqrt{g/\chi}$ или $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u > u_0$. При условии же $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u < u_0$ вниз по потоку

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_5 + \zeta^*, & x < V_5 t, \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta^*, & V_5 t < x < V_2 t, \\ \zeta_1 + \zeta^*, & V_2 t < x < V_1 t, \\ \zeta^*, & x > V_1 t. \end{cases}$$

На достаточно большом удалении от области давлений вверх по потоку ($x < 0$) из (3.9) при $\sigma > \sqrt{g/\chi}$ и при $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u > u_0$ найдем $\zeta = \zeta^*$, а в случае $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u < u_0$

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_6 + \zeta^*, & x > -V_6 t, \\ \zeta^*, & x < -V_6 t. \end{cases}$$

Здесь

$$\zeta_k = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p_0}{\rho g} \frac{\tau(\alpha_k)}{V_k} f^*(\alpha_k^*) \sin \gamma_k, \quad k = 1, 2, 5, 6,$$

$$\gamma_k = \alpha_k x + \delta(k) \sigma t, \quad \alpha_k^* = \delta(k) \alpha_k,$$

$$\delta_k = \begin{cases} -1, & k = 1, 2, \\ 1, & k = 5, 6, \end{cases}$$

$$V_1 = u + \tau'(\alpha_1), \quad V_2 = u - \tau'(\alpha_2), \quad V_5 = u - \tau'(\alpha_5), \quad V_6 = \tau'(\alpha_6) - u,$$

верхний знак у ζ_k , берется только при $k = 1$, а ζ^* представляет собою затухающие волновые возмущения, амплитуда которых имеет порядок не ниже $1/\sqrt{|x|}$. Вниз по потоку $\zeta^* = \zeta_1^* + \zeta_2^* + O(|x|^{-1})$, если $(u - u_1^0) < x < (u + u_1^0)t$, $u > u_1^0$ или $x < (u + u_1^0)t$, $u > u_1^0$. Если же

$x > (u + u_1^0)t$, $u > u_1^0$ или $x < (u - u_1^0)t$, $u > u_1^0$, или $u > (u + u_1^0)t$, $u < u_1^0$, то $\zeta^* = O(1/x)$. Причем

$$\zeta_k^* = (-1)^k \frac{p_0}{\rho g} \frac{\tau(r_k)}{\Delta(r_k)} \frac{f^*(r_k)}{\sqrt{-v\tau''(r_k)}} \cos\left[|x|M(r_k) - \frac{\pi}{4}\right], \quad u_1^0 = \sqrt{gH},$$

а r_k – корень уравнения $\tau' = (-1)^k (v^{-1} - u)$. Вверх по потоку $\zeta^* = \zeta_1^* + \zeta_2^* + O(|x|^{-1})$, если $u < u_1^0$, $u > -t(u_1^0 - u)$ и $\zeta^* = O(|x|^{-1})$ при $u < u_1^0$, $x < -t(u_1^0 - u)$ а r_k удовлетворяет уравнению $\tau' = (-1)^{k+1}(u + v^{-1})$. Отметим, что $r_1 = -r_2$.

Из полученных формул следует, что на большом удалении от эпицентра давлений (3.1) при выполнении условия $\sigma > \sqrt{g/\chi}$ или $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u > u_0$ незатухающие колебания поверхности лед-вода наблюдаются только вниз по потоку. Они формируются волнами ζ_1 , ζ_2 . При условии же $\sigma < \sqrt{g/\chi}$, $u < u_0$ незатухающие колебания вниз по потоку формируются волнами ζ_1 , ζ_2 , ζ_5 , а вверх по потоку – волной ζ_6 . Волны ζ_1 , ζ_2 бегут в направлении потока с фазовыми скоростями $v_1 = \sigma/\alpha_1$, $v_2 = \sigma/\alpha_2$, а волны ζ_5 , ζ_6 – против потока с фазовыми скоростями $v_5 = \sigma/\alpha_5$, $v_6 = \sigma/\alpha_6$. Причем $v_2 > v_5 > v_6 > v_1$. Передние фронты незатухающих волн ζ_1 , ζ_2 , ζ_5 перемещаются вниз по потоку со скоростями V_1 , V_2 , V_5 , а передний фронт ζ_6 – вверх по потоку со скоростью V_6 , при этом $V_1 > V_2 > V_5$, $V_1 > V_6$. Отметим, что ледяной покров уменьшает v_1 , v_6 , V_1 , V_6 и увеличивает v_2 , v_5 , V_2 , V_5 по сравнению с соответствующими значениями в жидкости со свободной поверхностью. Возмущения, амплитуда которых имеет порядок $1/\sqrt{|x|}$, распространяются в случае $u > u_1^0$ только вниз по потоку. Их передний фронт движется со скоростью $u + u_1^0$, а задний фронт – со скоростью $u - u_1^0$. В случае $u < u_1^0$ эти возмущения распространяются как вниз, так и вверх по потоку. Передний фронт возмущений в области $x > 0$ движется со скоростью $u + u_1^0$ по потоку, а в области $x < 0$ – со скоростью $u_1^0 - u$ против потока. При этом битый ледяной покров не влияет на скорость распространения передних фронтов затухающих волн.

Для количественной оценки влияния льда на элементы незатухающих с расстоянием волн были проведены численные расчеты [19] в интервале частоты от $5 \cdot 10^{-3}$ до 0.5 с^{-1} при $\rho_1 g = 870 \text{ кг/м}^3$, $H = 10^2 \text{ м}$. Вычислялась скорость u_0 , а также фазовые v_k и фронтальные V_k скорости волн ζ_k ($k = 1, 2, 5, 6$). На рис. 3.1 приведена зависимость u (м/с) от σ .

Кривые по порядку сверху вниз отвечают толщине льда 0, 1, 5, 10, 20 м. Отсюда видно, что битый лед при $\sigma < \sigma_1$, где $\sigma_1 \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, не оказывает заметного влияния на u_0 . Для $\sigma > \sigma_1$ рост толщины льда приводит к уменьшению u_0 по сравнению с его значением при отсутствии льда. Максимальное значение u_0 для рассматриваемых толщин льда достигается примерно на той же частоте $\sigma = \sigma_0$, что и в случае свободной поверхности. При этом для $\sigma > \sigma_0$ влияние льда на u_0 тем сильнее, чем больше частота колебаний. Результаты численных расчетов v_k и V_k приведены на рис. 3.2, 3.3 и в табл. 3.1 – 3.3. Рис. 3.2, *а* и 3.3, *а* отвечают $u = 1.5 \text{ м/с}$, а рис. 3.2, *б* и 3.3, *б* – значению $u = 0.5 \text{ м/с}$. Анализ расчетов показывает, что заметное влияние на v_1, v_6, V_1, V_6 лед может оказывать лишь на частотах $\sigma > 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. Это влияние при фиксированном u сказывается в уменьшении указанных элементов волн ζ_1, ζ_6 и иллюстрируется рис. 3.2.

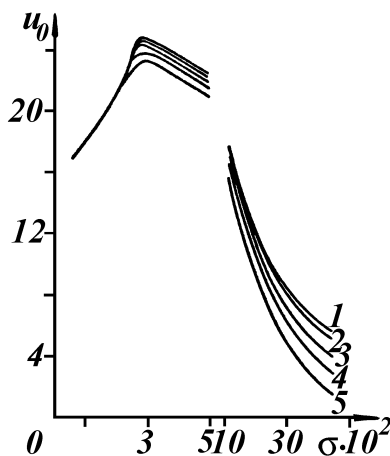


Рис. 3.1

Верхние кривые на этом рисунке представляют собою соответствующую зависимость в жидкости со свободной поверхностью ($h = 0$), а остальные по порядку сверху вниз отвечают толщинам льда 1, 5, 10, 20 м. Правая шкала относится к v_6, V_6 , а левая – к v_1, V_1 . С уменьшением скорости потока влияние льда на v_6, V_6 уменьшается, а на v_1, V_1 увеличивается. При фиксированных h и σ уменьшение u приводит к уменьшению значений v_1, V_1 и увеличению v_6, V_6 , что видно из табл. 3.1. В этой таблице скорости (м/с) приведены для $\sigma = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $h = 1 \text{ м}$.

Зависимость v_1, v_5 от σ изображена на рис. 3.3, где кривые по порядку снизу вверх отвечают h , равному 0, 1, 5, 10, 20 м. Отсюда видно, что ледяной покров увеличивает фазовые скорости волн ζ_2, ζ_5 . Отметим при этом, что влияние льда на v_2 и v_5 существенно даже на тех частотах, на которых v_1 и v_6 не зависят от h . В частности, при $\sigma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$,

$u = 1.5$ м/с изменение h от 0 до 1 м приводит к увеличению v_2 и v_5 примерно в 2.5 раза. Влияние льда на v_2 и v_5 тем сильнее, чем меньше скорость потока. При фиксированных h и σ большему u отвечают и большие значения v_k ($k = 2, 5$).

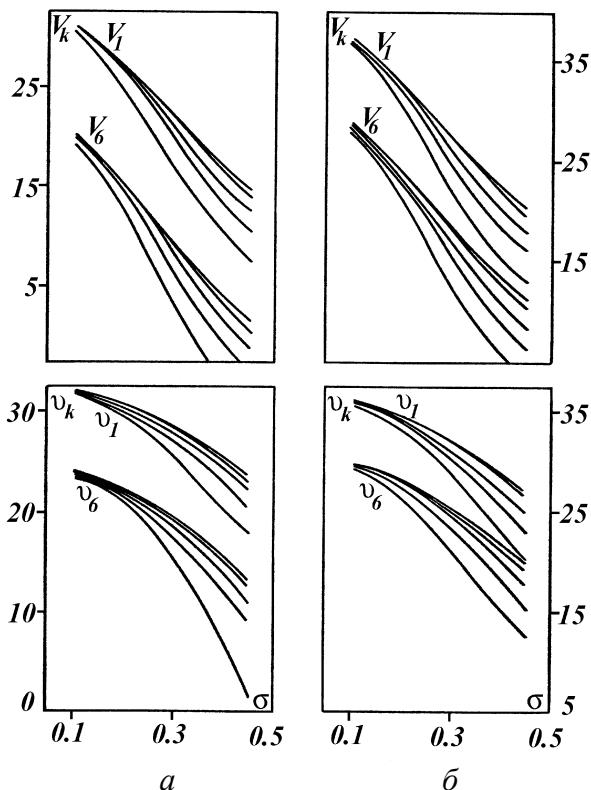


Рис. 3.2

Скорости передних фронтов волн ζ_2 , ζ_5 также увеличиваются с ростом h . При фиксированной толщине льда V_2 мало меняется на рассматриваемом интервале частоты. Это видно из табл. 3.2, где приведены значения $10 V_2$ (м/с) для $\sigma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ (верхняя строка) и $\sigma = 5 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ (нижняя строка). Скорость V_5 на частотах от $5 \cdot 10^{-3}$ до $5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ с точностью до 1% совпадает с V_2 . При изменении $\sigma(\text{с}^{-1})$ от $5 \cdot 10^{-2}$ до $5 \cdot 10^{-1}$ скорость V_5 уменьшается. Это иллюстрируется табл. 3.3, в которой даны значения $10 V_5$ (м/с) для $\sigma = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ (верхняя строка) и $\sigma = 5 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ (нижняя строка).

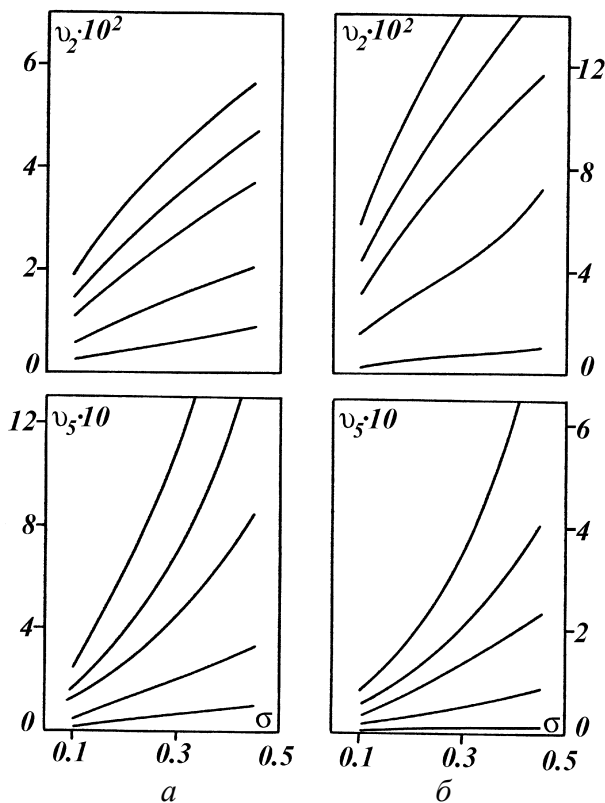


Рис. 3.3

Таблица 3.1

u	v_1	v_6	V_1	V_6
1.5	32.3	29.2	31.3	28.0
1	31.8	29.7	30.8	28.6
0.5	31.3	30.2	30.2	29.1

Таблица 3.2

$h, \text{м}$ $u, \text{м/с}$	0	1	5	10
1.5	7.50 7.95	12.0 12.7	13.5 14.1	13.9 14.4
0.5	2.50 2.55	4.61 4.69	4.82 4.89	4.87 4.93

Таблица 3.3

$h, \text{м}$ $u, \text{м/с}$	0	1	5	10
1.5	7.38 6.89	11.7 10.7	13.1 11.5	13.4 10.9
0.5	2.48 2.44	4.57 4.46	4.77 4.61	4.82 4.58

3.2. Влияние сплошного упругого льда на волны от периодических возмущений

Пусть однородная несжимаемая жидкость, текущая с постоянной скоростью u в положительном направлении оси x , покрыта сплошным упругим льдом. Лед плавает вместе с потоком. Исследуем неустановившееся волновое движение, генерируемое периодическими давлениями (3.1), начинающими действовать с момента времени $t = 0$. До начала действия давлений ледяная пластина горизонтальна, а поток не возмущен. Потенциал скорости ϕ волнового возмущения определим из уравнения (3.2). На дне $z = -H$ удовлетворим условию непротекания ($\partial\phi/\partial z = 0$) а в качестве граничного условия на невозмущенной поверхности лед-вода ($z = 0$) используем уравнение колебаний упругой ледяной пластины

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = -\frac{p}{\rho g}.$$

Здесь

$$D_1 = \frac{D}{\rho g}, \quad \chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad (3.10)$$

ρ – плотность жидкости, H – глубина бассейна; ρ_1 , h , E , μ – плотность, толщина, модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона льда, ζ – прогиб льда или возвышение поверхности лед-вода. Применяя для решения задачи комплексное преобразование Фурье по переменной x и удовлетворяя граничным условиям, получим с учетом кинематического условия (3.5) такое уравнение:

$$\zeta_{tt}^* + 2uir\zeta_t^* + (\tau^2 - u^2r^2)\zeta^* = -\frac{p_0}{\rho g}\theta(r)f^*(r)\exp(i\sigma t), \quad (3.11)$$

$$\tau(r) = [\theta(r)(1 + D_1r^4)]^{1/2}, \quad \theta(r) = rg(1 + \chi_1 thrh)^{-1}thrH,$$

где ζ^* и f^* – преобразование Фурье функций ζ и f . Решим уравнение (3.11) с начальными условиями $\zeta^* = \zeta_t^* = 0$ при $t = 0$, вытекающими из кинематического соотношения (3.5) и предположения, что до начала действия давлений поток не возмущен $\phi(x, z, 0) = 0$, а поверхность лед-вода горизонтальна $\zeta(x, 0) = 0$. Тогда после применения теоремы обращения получим

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{p_0}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(r)\psi(r, t)f^*(r)\exp(irx)dr, \quad (3.12)$$

где $\psi(r, t)$ определяется формулой (3.7), в которой $\tau(r)$ имеет вид (3.11). Отсюда, рассуждая так же, как и для интеграла (3.6), получим выражение (3.8), где

$$\eta_k = \int_{L_k} \frac{\tau}{(1 + D_1 r^4) \Delta_k} f^*(r) \exp(i|x|M_k) dr \quad (k=1, 2),$$

$$\eta = \int_L \frac{2\tau^2}{(1 + D_1 r^4) \Delta} f^*(r) \exp(irx) dr \exp(i\sigma t),$$
(3.13)

а Δ , Δ_k , M_k определяются формулами (3.7), (3.9), (3.11). Здесь путь L идет вдоль действительной оси, обходя корни уравнения $\Delta_1 = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\text{Re}(i\Delta_1) > 0$, а корни уравнения $\Delta_2 = 0$ – по полуокружностям, где $\text{Re}(i\Delta_2) > 0$. Путь L_1 обходит только точки, где $\Delta_1 = 0$, а путь L_2 – только точки, где $\Delta_2 = 0$.

Число корней уравнений $\sigma + ur - \tau(r) = 0$ и $\sigma + ur + \tau(r) = 0$ определяется частотой колебаний и скоростью потока [59, 61]. Это иллюстрируется рис. 3.4, 3.5, на которых приведены соответственно функции $u = [\tau(r) - \sigma]r^{-1}$, $u = [\tau(r) + \sigma]r^{-1}$ при $h = 1\text{м}$, $H = 10^3\text{м}$ и значениях параметров (1.15). Эти функции даны только для $r > 0$, так как при $r < 0$ картина симметрична относительно начала координат.

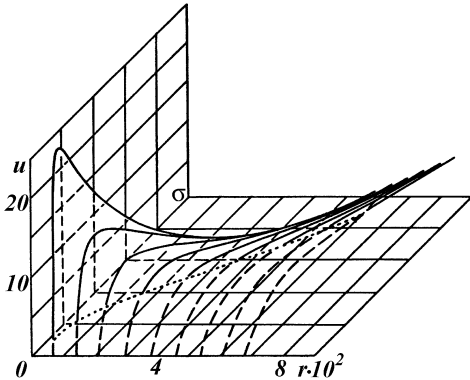


Рис. 3.4

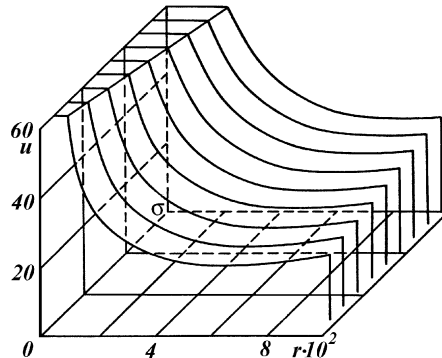


Рис. 3.5

Для $\sigma > \sigma_0$ уравнение $\sigma + ur - \tau(r) = 0$ имеет при любых скоростях потока только один отрицательный и только один положительный корни. Обозначим их при $\sigma_0 < \sigma < \sigma^*$ через $r = -\alpha_1$, $r = \alpha_6$ и $r = -\alpha_1$, $r = \alpha_4$, если $u < u_4^*$ и $u > u_4^*$ соответственно, а при $\sigma > \sigma_0^*$ – через $r = \alpha_4$, $r = -\alpha_1$. Здесь

$\sigma_0 = \sigma_0^* - u_0 r_1$, $\sigma_0^* = \tau(r_1)$, $u_0 = \tau'(r_1)$, $\sigma_0^* > \sigma_0$, $u_0^* = |\sigma^* - \sigma| r_1^{-1}$, (3.14)
 r_1 – положительный корень уравнения $\tau''(r) = 0$, штрих означает производную по r . Причем $\alpha_6 < r_1 < \alpha_4$, а для α_1 справедлива оценка $\alpha_1 < r_1$, если $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$. Если же $\sigma > \sigma_0^*$, то $\alpha_1 < r_1$ при $u > u_4^*$ и $\alpha_1 > r_1$ при $u < u_4^*$. Зависимость σ_0 (сплошная линия) и u_0 (штриховая линия) от толщины

ледяной пластины при $H=1100$ м и значениях (1.15) показана на рис. 3.6, а при $H = 10^3$, $h = 1$ м величины σ_0^* , $\sigma_0(\text{с}^{-1})$, $u_0(\text{мс}^{-1})$, $r_1(\text{м}^{-1})$ равны соответственно 0.57, 0.26, 9.52, $3.3 \cdot 10^{-2}$.

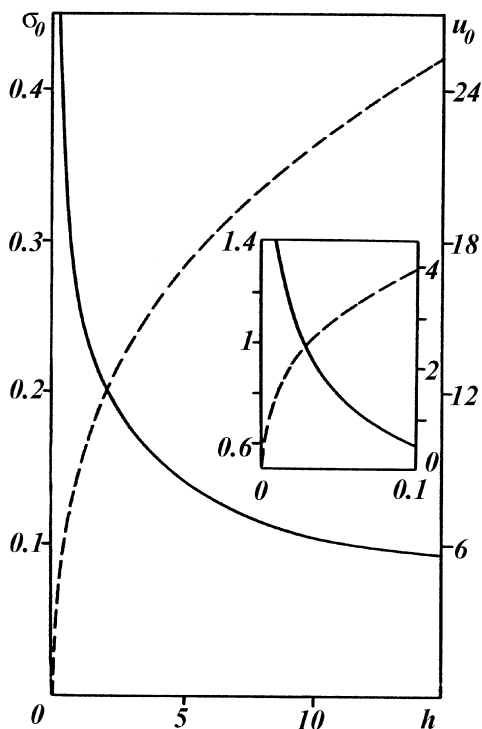


Рис. 3.6

Если $\sigma < \sigma_0$, то корнями уравнения $\Delta_1 = 0$ будут $\alpha_4, -\alpha_1$ для $u > u_1$, $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, -\alpha_1$ для $u_2 < u < u_1$ и $\alpha_6, -\alpha_1$ для $u < u_2$. При этом

$$u_k = \beta_k^{-1} [\tau(\beta_k) - \sigma], \quad k=1,2; \quad \alpha_4 > \beta_2 > \alpha_5 > \beta_1 > \alpha_6 > \alpha_1 > 0, \quad (3.15)$$

$\beta_{1,2}$ – корень уравнения $r\tau'(r) - \tau(r) + \sigma = 0$. Кроме того для любых скоростей потока $\alpha_6 < r_1 < \alpha_4$, а $\alpha_5 > r_1$, если $u_2 < u < u_0^*$ и $\alpha_5 < r_1$, если $u_2^* < u < u_1$.

Если задано u из области $u > \sqrt{gH}$, то для любых σ уравнение $\Delta_1 = 0$ имеет только один отрицательный $r_1 = -\alpha_1$ и только один положительный $r = \alpha_4$ корень. Для $u < u_0$ корнями уравнения при $\sigma < \sigma_0$ и при $\sigma_0 < \sigma < \sigma_4^*$ будут $\alpha_6, -\alpha_1$. На частотах $\sigma > \sigma_4^*$ это уравнение при таком u имеет также два корня $\alpha_4, -\alpha_1$. Если u находится в пределах $u_0 < u < u_4^*$, то корнями уравнения $\Delta_1 = 0$ будут $\alpha_4, -\alpha_1$ при $\sigma > \sigma_{10}$, $\alpha_6, -\alpha_1$ на частотах

$\sigma < \sigma_9$ и $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, -\alpha_1$ для $\sigma_9 < \sigma < \sigma_{10}$. В случае $u_4^* < u < \sqrt{gH}$ рассматриваемое уравнение при $\sigma < \sigma_9$ имеет три корня положительных $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ и один отрицательный $-\alpha_1$, а для $\sigma > \sigma_9$ корнями будут только $\alpha_4, -\alpha_1$. Здесь $\sigma_4^* = \sigma^* - u r_1$, $\sigma_9 = \tau(\beta_2) - u \beta_2$, $\sigma_{10} = \tau(\beta_1) - u \beta_1$, $u_4^* = \tau(\beta) / \beta$, (3.16) β – положительный корень уравнения $r \tau'(r) - \tau(r) = 0$.

Что касается уравнения $\sigma + u r + \tau(r) = 0$, то оно или вообще не имеет действительных корней, если $u < u_3$, или имеет для любого заданного σ два отрицательных корня $r = -\alpha_2$, $r = -\alpha_3$ в случае $u > u_3$, где

$$u_3 = [\tau(\beta_3) + \sigma] \beta_3^{-1}, \quad \alpha_4 > \alpha_3 > \beta_3 > \alpha_2 > \alpha_1 > 0, \quad (3.17)$$

β_3 – положительный корень уравнения $r \tau'(r) - \tau(r) - \sigma = 0$. При этом $\alpha_3 > r_1$, а для α_2 справедливы оценки $\alpha_2 > r_1$ и $\alpha_2 < r_1$ при $u_3 < u < u_5$ и $u > u_5$ соответственно. Здесь $u_5 = (\sigma + \sigma_0^*) / r_1$.

При фиксированных значениях u из области $u < u_4^*$ уравнение $\Delta_2 = 0$ для любых σ не имеет действительных корней. В случае $u > u_4^*$ оно на частотах $\sigma > \sigma_{11}$ также не имеет корней, а при $\sigma < \sigma_{11}$ имеет два $r = -\alpha_3$, $r = -\alpha_2$, где $\sigma_{11} = u \beta_3 - \tau(\beta_3)$.

Анализ показал, что на частотах

$$\sigma < \sigma_4, \quad \sigma \in (\sigma_4, \sigma_5), \quad \sigma \in (\sigma_5, \sigma_0), \quad \sigma \in (\sigma_0, \sigma_6), \quad \sigma > \sigma_6$$

выполняются соответственно неравенства

$$u_2 < u_3 < u_0^* < u_1, \quad u_2 < u_0^* < u_3 < u_1, \quad u_2 < u_0^* < u_1 < u_3, \quad u_0^* < u_3, \quad u_0^* > u_3.$$

Здесь

$$\sigma_4 = \frac{\sigma_0^* \beta_3 - \tau(\beta_3) r_1}{r_1 + \beta_3}, \quad \sigma_5 = \frac{\beta_3 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_3)}{\beta_1 + \beta_3}, \quad (3.18)$$

$$\sigma_6 = [r_1 \tau(\beta_3) + \beta_3 \sigma_0^*] (\beta_3 - r_1)^{-1}, \quad \sigma_0 < \sigma_0^* < \sigma_6,$$

а на частотах $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ выполняются соответственно равенства $u_0^* = u_3$, $u_1 = u_3$, $u_0^* = u_3$. Поэтому интегралы (3.13) вычислим для каждого конкретного случая. Вычисление проведем методом контурного интегрирования с учетом расположения стационарных течек (корней уравнений $M'_k(r) = 0$) относительно полюсов подынтегральных функций, имея в виду при этом, что условия $\text{Re}(i\Delta_1) \geq 0$, $\text{Re}(i\Delta_2) \geq 0$ выполняются на контуре, обходящем точки $r = \alpha_4$, $r = \alpha_6$, $r = -\alpha_3$ в верхней, а точки $r = \alpha_5$, $r = -\alpha_1$, $r = -\alpha_2$ в нижней полуплоскости. В результате получим, что незатухающее с расстоянием волновое движение на большом удалении от области приложения возмущений вниз ($x > 0$) и вверх ($x < 0$) по потоку формируется из волн вида

$$\zeta_k = \pm A(\alpha_k) V_k^{-1} f^*(\alpha_k^*) \sin \gamma_k, \quad k=1, 2, \dots, 6, \quad (3.19)$$

$$\gamma_k = \alpha_k x + \delta(k) \sigma t, \quad \alpha_k^* = \delta(k) \alpha_k,$$

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p_0 \tau(r)}{\rho g (1 + D_1 r^4)}, \quad \delta(k) = \begin{cases} -1, & k=1, 2, 3, \\ 1, & k=4, 5, 6, \end{cases}$$

$$V_1 = u + \tau'(\alpha_1), \quad V_2 = u - \tau'(\alpha_2), \quad V_3 = \tau'(\alpha_k) - u,$$

$$V_4 = \tau'(\alpha_k) - u, \quad V_5 = u - \tau'(\alpha_5), \quad V_6 = \tau'(\alpha_6) - u,$$

где верхний знак берется только при $k=1$.

Затухающие колебания представляют собой волны, амплитуда которых для больших $|x|$ имеет порядок не ниже $1/\sqrt{|x|}$.

При заданном σ число незатухающих волн определяется соотношением скорости потока и величин u_1, u_2, u_3 , что иллюстрируется таблицей 3.4, в которой приведены номера k возникающих волн ζ_k . Величина же u_0^* определяет лишь характер волны, появляющейся вверх по потоку ($x < 0$) при $\sigma \in (\sigma_0, \sigma_0^*)$. Для $u < u_0^*$ это волна ζ_6 , обусловлена главным образом гравитационными силами, а при $u > u_0^*$ — упругая волна ζ_4 .

Таблица 3.4

σ	u	$x > 0$	$x < 0$
$\sigma < \sigma_5$	$u > u_1$	1, 2	3, 4
	$u_3 < u < u_1$	1, 2, 5	3, 4, 6
	$u_2 < u < u_3$	1, 5	4, 6
	$u < u_2$	1	6
$\sigma_5 < \sigma < \sigma_0$	$u > u_3$	1, 2	3, 4
	$u_1 < u < u_3$	1	4
	$u_2 < u < u_1$	1, 5	4, 6
	$u < u_2$	1	6
$\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$	$u < u_0$	1	6
	$u_0 < u < u_3$	1	4
	$u > u_3$	1, 2	3, 4
$\sigma > \sigma_0^*$	$u < u_3$	1	4
	$u > u_3$	1, 2	3, 4

Распределение u_k ($k=1, 2, 3$) по частоте колебаний при $h=1$ м, $H=10^3$ м и значениях параметров (1.15) представлено на рис. 3.7, а их зависимость от толщины льда при $\sigma=0.3$ с⁻¹ иллюстрируется рис. 3.8. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии на этих рисунках характеризуют u_1, u_2, u_3 соответственно, h_0 — толщина сплошного льда, при которой $\tau(r_1) - u r_1 = \sigma_0$. На каждом из рисунков u_1, u_2, u_3 образуют

по пять областей. Они помечены цифрами 1 – 5. Для заданных σ и h при скоростях потока из областей 1 – 5 генерируются или все шесть волн ζ_k (область 4), или четыре волны $\zeta_1, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$ (область 3), $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ (область 5), или две волны (области 1, 2). Причем в области 2 генерируются ζ_1, ζ_6 , а в области 1 – или ζ_1, ζ_6 , если $\sigma \in (\sigma_0, \sigma_0^*)$, $u_1 < u_0^*$, или ζ_1, ζ_4 при $\sigma \in (\sigma_0, \sigma_0^*)$, $u \in (u_0^*, u_3)$.

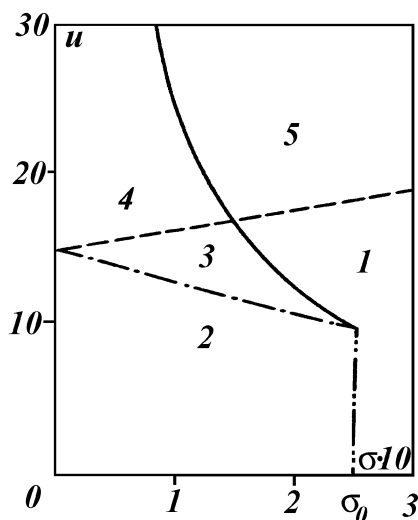


Рис. 3.7

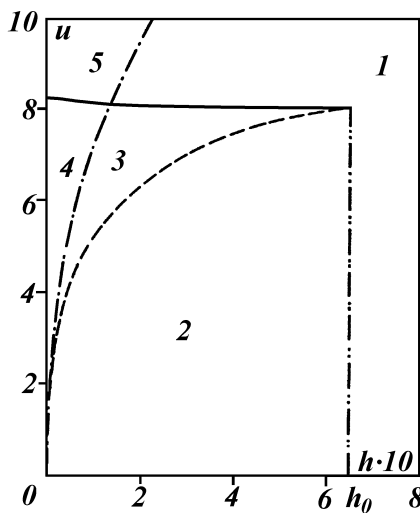


Рис. 3.8

Отметим, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} u_1 = \sqrt{gH}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_2 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_3 = u_4^*, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} u_3 = \infty, \quad (3.20)$$

$$u_1(\sigma_0) = u_2(\sigma_0) = u_0, \quad u_0^*(\sigma_0) = u_0, \quad u_0^*(\sigma_0^*) = 0,$$

а величина u_4^* при $h=1$ м, $H=10^3$ м и значениях (1.15) равна 14.2.

Из таблицы 3.4 следует, что на достаточном удалении от области приложения возмущений вниз ($x > 0$) и вверх ($x < 0$) по потоку может генерироваться либо по одной, либо по две или по три незатухающих с расстоянием волны вида (3.19). Волны $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_5, \zeta_6$ гравитационные. Они генерируются также и в море при отсутствии льда [157]. Волны же ζ_3, ζ_4 чисто упругие, обусловленные упругими силами ледяного покрова. В случае битого льда ($E=0$) и в море со свободной поверхностью они не возникают. Отметим, что $\zeta_2, \zeta_5, \zeta_3$ генерируются только в условиях потока. Передние фронты незатухающих волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_5$ перемещаются вниз, а волны $\zeta_3, \zeta_4, \zeta_6$ - вверх по потоку от области приложения возмущений соответственно со скоростями V_k ($k=1-6$). Вол-

ны $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ распространяются вниз, а волны $\zeta_4, \zeta_5, \zeta_6$ – вверх по потоку с фазовыми скоростями $v_k = \sigma / \alpha_k$ ($k=1-6$). Длины λ_k волн ζ_k равны $2\pi / \alpha_k$. При этом $V_1 > V_2, V_1 > V_5, V_4 > V_3, V_1 > V_6$, а соотношение между длинами генерируемых волн, а также их фазовыми скоростями определяются выражениями (3.15), (3.17).

Для количественной оценки влияния скорости потока на генерируемые волны проводились численные расчеты при $h=1$ м, $H=10^3$ м и значениях параметров (1.15). Результаты расчетов представлены на рис. 3.9 – 3.21. Дисперсионные зависимости, рассчитанные при скоростях потока 0, 10, 18 м/с (кривые 1, 2, 3 соответственно) для волн ζ_k ($k=1-6$), показаны на рис. 3.9. Штриховые кривые характеризуют ζ_1 с волновым числом α_1 , а сплошные описывают волны ζ_k ($k=2-6$), волновые числа которых α_k удовлетворяют неравенствам (3.15), (3.17). Точка на сплошной кривой с номером 1 отделяет волну ζ_6 (слева от точки) от волны ζ_4 , обусловленной упругими силами льда.

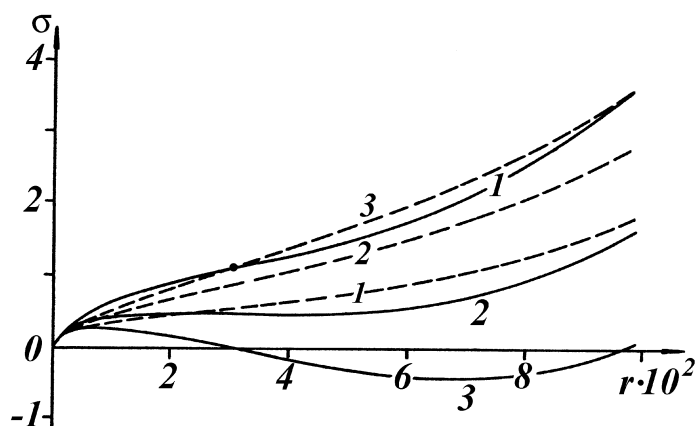


Рис. 3.9

Зависимость фазовых скоростей и функций $\tau'(\alpha_k)$, характеризующих фронтальные скорости, от частоты колебаний иллюстрируется рис. 3.10, 3.11 для волны ζ_1 и рис. 3.12, 3.13 для волн ζ_k ($k=2-6$). Номера кривых 1–4 отвечают скоростям потока 0, 5, 10, 18 м/с. Сплошные, штрихпунктирные и точечные участки кривых на рис. 3.12, 3.13 характеризуют волны $\zeta_6, \zeta_4, \zeta_5$. Штриховой же участок кривой 4, взятый симметричным относительно начала координат на рис. 3.12 и симметричным относительно вертикальной оси на рис. 3.13, характеризует соответственно $v_{2,3}$ и $\tau'(\alpha_{2,3})$. Выпуклая часть штрихового участка линии 4 рис. 3.12 относится к v_2 , а вогнутая к v_3 . Величина же $\tau'(\alpha_3)$ харак-

теризуется значениями, лежащими выше звездочки на штриховом участке кривой 4, а $\tau'(\alpha_2)$ – ниже нее. Треугольник и квадраты на кривых 3, 4 рис. 3.12 и звездочка на кривой 4 рис. 3.13 отвечают значениям, достигаемым соответственно на частотах σ_9 , σ_{10} , σ_{11} . На точечных участках кривых 3, 4 рис. 3.13 крайние левые значения принимаются при $\sigma = \sigma_9$, а крайние правые – при $\sigma = \sigma_{10}$.

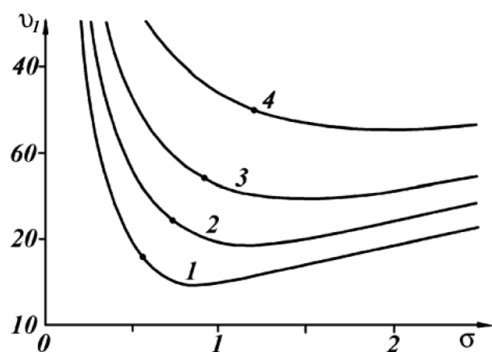


Рис. 3.10

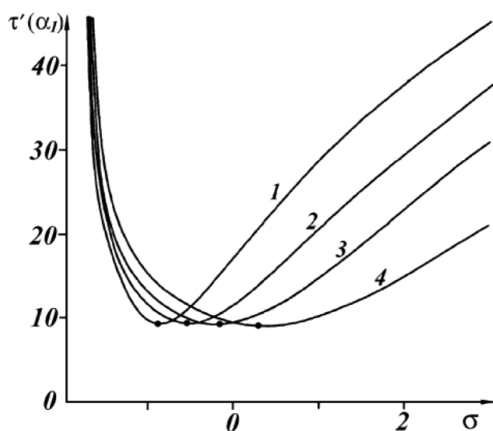


Рис. 3.11

Видно, что фазовая скорость v_1 как функция частоты колебаний имеет минимум при $\sigma = \tau(\beta) + u\beta$. Величина минимума растет с увеличением скорости потока. Минимум может иметь и $v_4(\sigma)$. Он достигается при $\sigma = \tau(\beta) - u\beta$, а величина его уменьшается с ростом u . С увеличением σ фазовые скорости v_2 , v_3 , v_5 растут, а v_6 убывают.

Фронтальная скорость V_1 волны ζ_1 с ростом σ убывает, если $\sigma < \sigma_+$ и растет при $\sigma > \sigma_+$. Значения v_1 и $r'(\alpha_1)$, принимаемые на частоте $\sigma_+ = \tau(r_1) + ur_1$, помечены точками на кривых рис. 3.10, 3.11. При $\sigma > \sigma_+$ фазовая и фронтальная скорости волны ζ_1 существенно деформируются за счет упругих сил льда. Фронтальные скорости V_2 , V_3 , V_6 убывают, а V_4 растет с частотой. Скорость же V_5 с увеличением σ может убывать, как, например, при $u = 18$ м/с, или иметь максимум при $\sigma = \tau(r_1) - ur_1$. На этой частоте $\tau'(\alpha_5)$ принимает минимальное значение (кривая 3 рис. 3.13).

При фиксированной частоте колебаний увеличение скорости потока приводит к росту фазовых скоростей волн ζ_1 , ζ_2 , ζ_5 , генерируемых вниз по потоку. Скорости же v_3 , v_4 , v_6 волн, генерируемых вверх по потоку убывают при этом, что наглядно иллюстрируется рис. 3.14, 3.15, где

цифры 1–4 отвечают частоте колебаний 0.1, 0.2, 0.4, 0.8 с⁻¹. Сплошные участки кривых на рис. 3.14 характеризуют v_6 , штриховые – v_1 , штрихпунктирные – v_4 , а точечные – v_5 . Фазовая скорость v_2 волны ζ_2 описывается участками кривых 1–4 на рис. 3.15 сверху от точки, а v_3 – снизу от нее. Отметим, что $\lim_{u \rightarrow \infty} v_2 = \lim_{u \rightarrow \infty} v_1 = \infty$, $\lim_{u \rightarrow \infty} v_4 = \lim_{u \rightarrow \infty} v_3 = 0$.

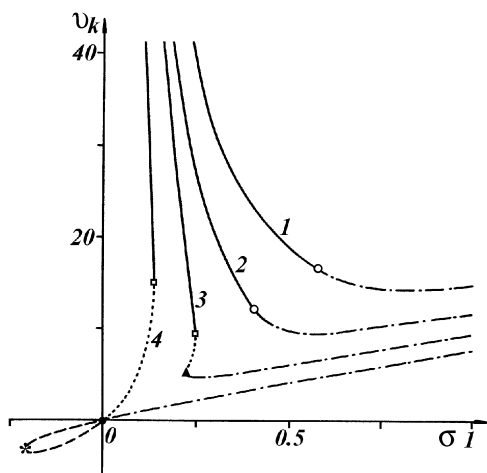


Рис. 3.12

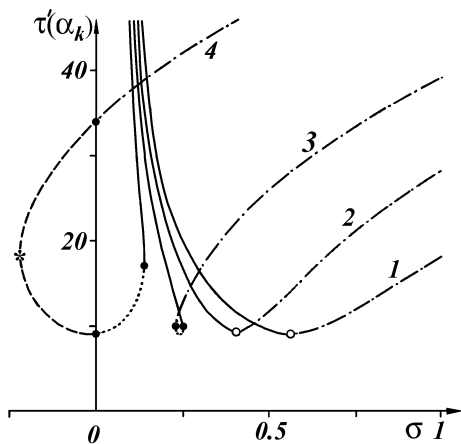


Рис. 3.13

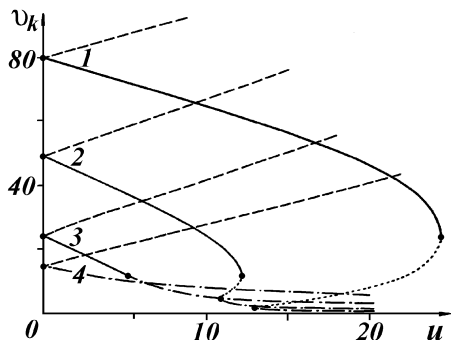


Рис. 3.14

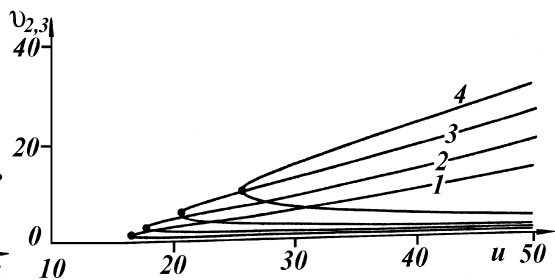


Рис. 3.15

Распределение скорости переднего фронта волн ζ_k ($k=1-6$) по скорости потока характеризуется рис. 3.16. На нем изображена зависимость от u величин $\tau'_k = \tau'(\alpha_k)$ при тех же σ , что и на рис. 3.14, 3.15. Сплошные, штриховые, штрихпунктирные и точечные участки кривых 1–4 относятся к тем же волнам, что и на рис. 3.14, а на линиях 5–8 значения сверху от точки представляют $\tau'(\alpha_3)$, а снизу – $\tau'(\alpha_2)$. Минимальные значения на кривых 1–4 достигаются при $u = [\tau(r_1) - \sigma]r_1^{-1}$. Кроме того, $\lim_{u \rightarrow \infty} \tau'(\alpha_k) = \infty$ при $k = 3, 4$, а $\lim_{u \rightarrow \infty} \tau'(\alpha_1) = \lim_{u \rightarrow \infty} \tau'(\alpha_2) = \sqrt{gH}$. Из данных на рис. 3.16 и формул

(3.19) для V_k следует, что фронтальные скорости волн ζ_k ($k=1-4$) растут с увеличением скорости потока. Скорость V_6 переднего фронта волны ζ_6 убывает при этом, а V_5 сначала растет, а затем убывает.

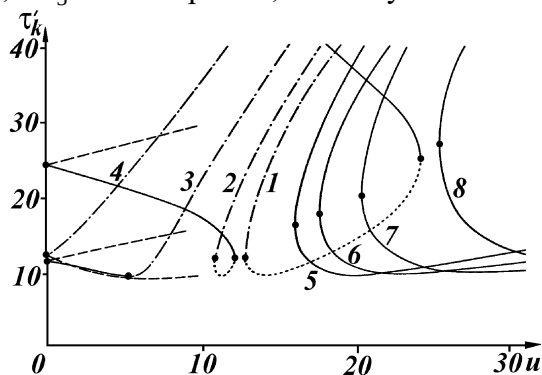


Рис. 3.16

Расчеты амплитуд генерируемых волн ζ_k ($k=1-6$) проводились для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq b \\ 0, & |x| > b \end{cases} \quad (3.21)$$

при $b = 3 \cdot 10^2$ м. Они обозначены через A_k и представлены на рис. 3.17 – 3.21. Распределение A_1 по частоте колебаний дано с точностью до множителя $p_0 / \rho g$ на рис. 3.17 при скоростях потока 0, 13, 18 м/с. Таким значениям u соответствуют здесь сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии. Зависимость A_k от σ при $k=2-6$ представлена на рис. 3.18, а для $u = 18$ м/с и рис. 3.18, б для $u = 13$ м/с. На этих рисунках линии с двойным пунктиром, точечные, сплошные, штриховые и штрихпунктирные характеризуют соответственно A_k , $k=2-6$. Зависимость $A_k(\sigma)$ при $k=3, 4, 6$ дана с точностью до множителя $-p_0 / \rho g$, а A_2 , A_5 – с точностью до множителя $p_0 / \rho g$. При этом надо иметь в виду, что $A_2(\sigma)$ и $A_3(\sigma)$ приведены для $\sigma \in (-\sigma_{11}, 0)$, а $A_2(\sigma) = A_2(-\sigma)$, $A_3(\sigma) = A_3(-\sigma)$.

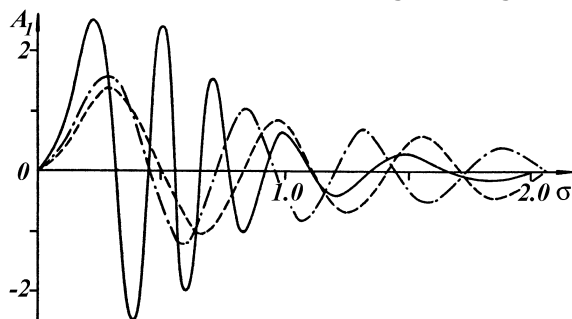


Рис. 3.17

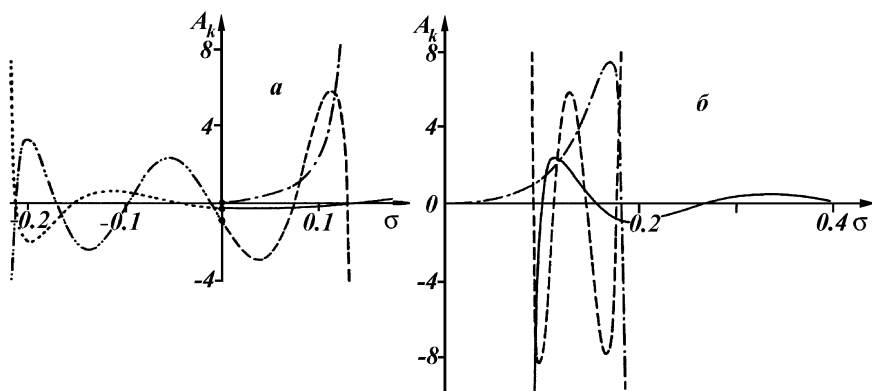


Рис. 3.18

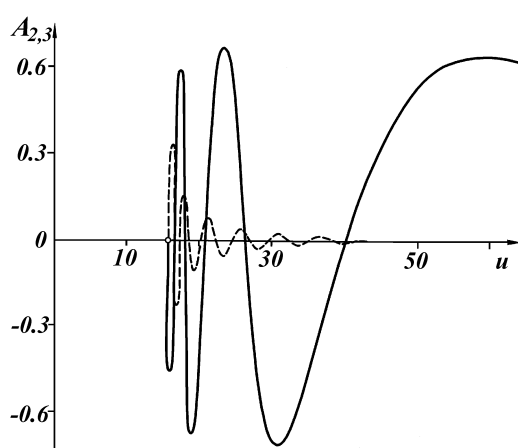


Рис. 3.19

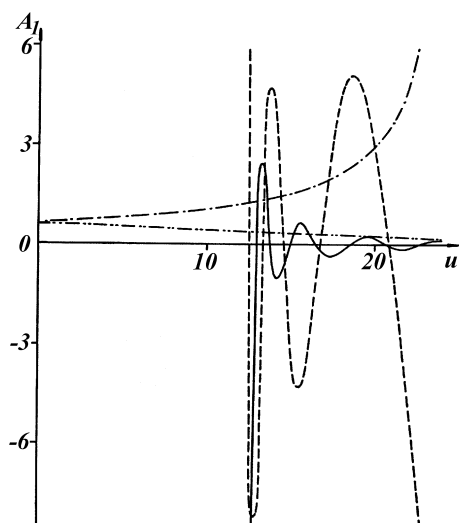


Рис. 3.20

Анализ показывает, что при отсутствии потока генерируются только волны ζ_1 , ζ_6 , для которых $A_1(\sigma) = A_6(\sigma)$. В случае $u = 13 \text{ м/с}$ возникают волны ζ_1 , ζ_4 , ζ_5 , ζ_6 . Если же $u = 18 \text{ м/с}$, то кроме этих волн появляются еще две волны ζ_2 , ζ_3 . С увеличением скорости потока не только уменьшается вертикальный размах колебаний $A_k(\sigma)$, но уменьшается и число экстремальных значений этой функции. Из амплитуд волн ζ_4 , ζ_5 , ζ_6 , генерируемых при $\sigma \in (\sigma_9, \sigma_{10})$, наибольший размах вертикальных колебаний имеет $A_5(\sigma)$. Сравнивая аналогично A_2 и A_3 , видим преобладание A_2 . Преобладание A_2 над A_3 прослеживается и в распределении их по скорости потока при фиксированной частоте колебаний. Это видно на рис. 3.19, где сплошная линия относится к ζ_2 , а штриховая – к ζ_3 при $\sigma = 0.1 \text{ с}^{-1}$. Для этой же частоты распределение A_k ($k = 1, 4 - 6$) по

u дано на рис. 3.20, где $A_1(u)$ нанесена линией с двойным пунктиром, а другие обозначения те же, что и на рис. 3.18, б. Здесь так же прослеживается возможность преимущественного вклада волны ζ_5 в волновое движение. Наименьшее вертикальное смещение наблюдается у функции $A_4(\sigma)$. Однако на тех частотах колебаний, когда ζ_5 , ζ_6 не возникают, волна ζ_4 может иметь большую амплитуду, чем волна ζ_1 в аналогичных условиях. Это иллюстрируется рис. 3.21 для частот $0.4, 0.5, 0.8 \text{ с}^{-1}$, которым отвечают цифры 1, 2, 3. Сплошные линии характеризуют $A_4(u)$, а линии с двойным пунктиром – $A_1(u)$. Причем $A_1(u) = A_1(-u)$.

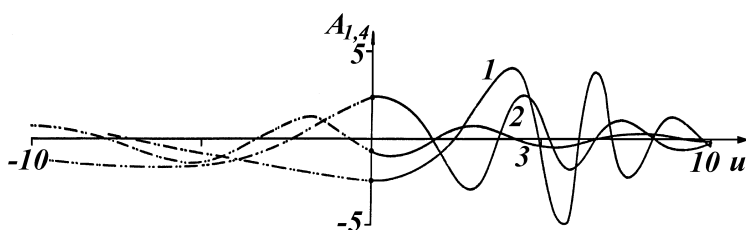


Рис. 3.21

3.3. Возбуждение волн независимыми от времени давлениями при ледовом сжатии

Проведем теперь анализ влияния ледового сжатия на процесс развития волнового возмущения, генерируемого в потоке однородной несжимаемой жидкости постоянной глубины H независимыми от времени давлениями

$$p = p_0 f(x) \quad (3.22)$$

Давления прикладываются начиная с момента времени $t = 0$ к поверхности ледяного покрова, плывущего вместе с потоком жидкости со скоростью u в положительном направлении оси x . До начала действия давлений поверхность лед-вода горизонтальна, а поток жидкости не возмущен. Считая движение жидкости потенциальным, а возмущения малыми, определим потенциал φ волнового возмущения из уравнения (3.2). На дне удовлетворим условию $\varphi_z = 0$, а за граничные условия на невозмущенной поверхности лед-вода ($z = 0$) примем уравнение колебаний ледяной пластины. С учетом сил ледового сжатия оно имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = - \frac{p}{\rho g}. \quad (3.23)$$

Здесь $Q_1 = Q/(\rho g)$, Q – усилие сжатия, приходящееся на единицу ширины ледяной пластины, а все другие обозначения те же, что и в (3.10).

После применения к уравнению (3.2) и граничным условиям комплексного преобразования Фурье по переменной x получим с учетом кинематического условия (3.5) для определения трансформанты Фурье $\zeta^*(r, t)$ функции $\zeta(x, t)$ уравнение

$$\zeta_{tt}^* + 2iur\zeta^* + (\tau^2 - u^2r^2)\zeta^* = -\frac{P_0}{\rho g}\theta f^*(r), \quad (3.24)$$

$$\tau(r) = [\theta(r)l(r)]^{1/2}, \quad \theta(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \quad l(r) = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4$$

с начальными условиями $\zeta_t^*(r, 0) = \zeta^*(r, 0) = 0$. Решив это уравнение и применив затем теорему обращения, найдем для вида возвышения поверхности лед-вода интегральное представление (3.12), где

$$\psi(r, t) = \frac{2}{\Delta} - \frac{1}{\tau\Delta_1} e^{-it\Delta_1} + \frac{1}{\tau\Delta_2} e^{-it\Delta_2}, \quad (3.25)$$

$$\Delta = \Delta_1 \cdot \Delta_2, \quad \Delta_1 = ur - \tau, \quad \Delta_2 = ur + \tau.$$

Вычисление интеграла (3.12), (3.25) проведем при условии $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, необходимом для устойчивости ледяной пластины. Перепишем (3.12), (3.25) в виде (3.8), где

$$\eta_k = \int_{L_k} \frac{\tau(r)}{\Delta_k l(r)} f^*(r) \exp(i|x|M_k) dr \quad (k=1, 2), \quad (3.26)$$

$$\eta = \int_L \frac{2\tau^2(r)}{\Delta l(r)} f^*(r) \exp(irx) dr,$$

$$M_k = -[ur + (-1)^k \tau(r)]v + r \operatorname{sign} x, \quad v = t/|x|.$$

Здесь путь L_1 обходит только точки, где $\Delta_1 = 0$, а путь L_2 – только точки, где $\Delta_2 = 0$, что обеспечивает стремление к нулю η_1 и η_2 при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного x . Уравнения $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ при $0 \leq Q < 2\sqrt{D_1}$ либо вообще не имеют действительных корней, если $u < u_4^*$, либо имеют только по одному или по два корня. По одному корню $r = \alpha_1$ и $r = -\alpha_1$ эти уравнения имеют в случае $u > u_1$. Если же $u_4^* < u < u_1$, то корнями уравнений $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$ будут $r = \alpha_1$, $r = \alpha_2$ и $r = -\alpha_1$, $r = -\alpha_2$ соответственно. Здесь $u_1 = \sqrt{gH}$, $u_4^* = \tau(\beta)/\beta$, $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, β – положительный корень уравнения $r\tau'(r) - \tau(r) = 0$. Распределение корней α_1 , α_2 по скорости потока для $h = 1$ м, $H = 10^3$ м и значений параметров (1.15) иллюстрируется рис. 3.22, на котором изображена при $r > 0$ функция $u = \tau(r)/r$, характеризующая дисперсионную зависимость для рассматриваемых уравнений. На этом рисунке сплошные кривые по порядку сверху вниз от штриховой, иллюстрирующей

случай отсутствия сил ледового сжатия ($Q = 0$), отвечают Q_1 , равным $\sqrt{D_1}$, $1.8\sqrt{D_1}$. Им соответствуют сжимающие усилия $1.68 \cdot 10^6$, $3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Причем $\lim_{r \rightarrow 0} u = u_1$, а $\lim_{r \rightarrow 0} u = \infty$. Кружками на кривых отмечены значения, принимаемые в точках с координатами $r = \beta$, $u = u_4^*$. Участки кривых слева от кружков характеризуют α_1 , а справа $-\alpha_2$. Видно, что $0 < \alpha_1 < \beta$, а $\beta < \alpha_2 < \infty$. Кроме этих неравенств для α_1 и α_2 справедливы оценки $0 < \alpha_1 < r_1$, $r_1 < \alpha_2 < \infty$, если $Q_1 < Q_0$. В случае $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ при $u_+ < u < u_1$, $u^+ < u < u_+$, $u_4^* < u < u^+$ получим соответственно $0 < \alpha_1 < m_1$, $m_1 < \alpha_1 < m_2$, $\alpha_1 < m_2$, а $\alpha_2 > m_2$ при скорости потока $u > u_4^*$. Здесь $Q_0 = \tau_0(r_0)$, r_0 и r_1 – положительные корни уравнений $\tau'_0(r) = 0$ и $\tau''(r) = 0$ соответственно, m_1 и m_2 – положительные корни уравнения $\tau'(r) = 0$, а

$$\begin{aligned} \tau_0 &= [(1 + D_1 r^4) \tau_1(r) + 4D_1 r^4 \tau_2(r)] [\tau_1(r) + 2\tau_2(r)]^{-1} r^{-2}, \\ \tau_1 &= \text{thr}H + rH\text{ch}^{-2}rH, \quad \tau_2 = (1 + \chi_1 r g \text{thr}H) \text{thr}H, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$u_+ = \tau(m_1)/m_1, \quad u^+ = \tau(m_2)/m_2, \quad u_1 > u_+ > u^+ > u_4^*, \quad m_2 > m_1.$$

Величина Q_0 определяется главным образом цилиндрической жесткостью и толщиной пластины, что иллюстрируется рис. 2.14. На нем дана зависимость Q_0 от h (м) при значениях (1.15), $H = 10^3$ м и E (Н/м²), равном $1 \cdot 10^8$, $5 \cdot 10^8$, $1 \cdot 10^9$, $3 \cdot 10^9$, $9 \cdot 10^9$. Таким величинам модуля нормальной упругости на рисунке соответствуют кривые по порядку снизу вверх.

Разница в оценках корней α_1 и α_2 для $Q_1 < Q_0$ и $Q_0 < Q < 2\sqrt{D_1}$ объясняется существенным влиянием сжимающего усилия на поведение функции $\tau(r)$, что показано на рис. 3.23. На этом рисунке сплошные кривые по порядку сверху вниз от штриховой, отвечающей $Q_1 = 0$, приведены при $h = 1$ м и значениях (3.7) для Q_1 , равных $\sqrt{D_1}$, $1.5\sqrt{D_1}$, $1.8\sqrt{D_1}$. Кроме того, функция $\tau(r)$ характеризует и распределение α_1 , α_2 по скорости потока и зависимость их от величины Q_1 . Причем α_1 и α_2 определяются здесь как точки пересечения $\tau(r)$ с прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент, равный скорости потока. Угловой коэффициент такой прямой, касающейся заданной кривой $\tau(r)$ сверху, представляет собой u_1 , а касающейся ее снизу – u_4^* .

Из выражений для u_1 и u_4^* и данных на рис. 3.22, 3.23 следует, что u_1 не зависит от Q_1 , а u_4^* уменьшается до нуля с ростом величины сжимающего усилия в рассматриваемых пределах.

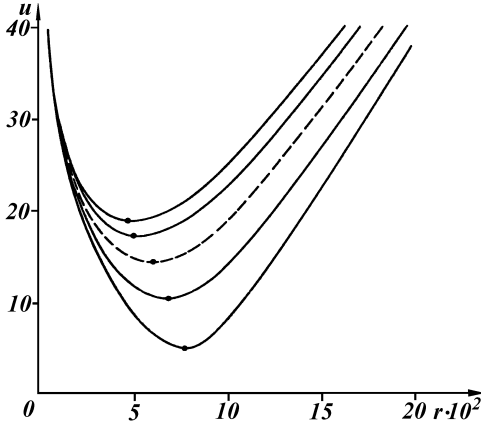


Рис. 3.22

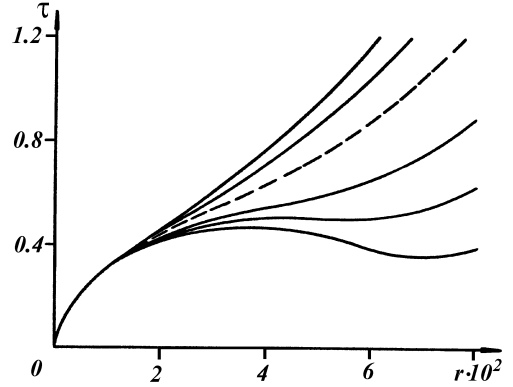


Рис. 3.23

Проведем вычисление интегралов (3.26) для четной функции $f(x)$ методом контурного интегрирования с учетом положения стационарных точек (корней уравнений $M'_{1,2}(r)=0$) относительно полюсов подынтегральных функций, имея в виду при этом, что $\text{Re}(i\Delta_1) > 0$, $\text{Re}(i\Delta_2) > 0$ на контуре, обходящем точки $r = \pm\alpha_1$ в нижней, а точки $r = \pm\alpha_2$ в верхней полуплоскостях.

В результате получим, что в случае $u_4^* < u < u_1$ незатухающее волновое движение генерируется как вверх ($x < 0$), так и вниз ($x > 0$) по потоку от области приложения возмущений (3.22). При этом вниз по потоку

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1 + O(1/\sqrt{x}), & x < V_1 t, \\ O(1/\sqrt{x}), & x > V_1 t, \end{cases} \quad (3.28)$$

а вверх по потоку ($x < 0$)

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_2 + O(1/\sqrt{|x|}), & x > -V_2 t, \\ O(1/\sqrt{|x|}), & x < -V_2 t. \end{cases}$$

Здесь

$$\zeta_k = -\sqrt{2\pi} \frac{p_0}{\rho g} \frac{\tau(\alpha_k)}{l(\alpha_k)V_k} f^*(\alpha_k) \sin(\alpha_k |x|), \quad k=1, 2,$$

$$V_1 = u - \tau'(\alpha_1), \quad V_2 = \tau'(\alpha_2) - u.$$

Причем $\tau'(\alpha_1) > 0$, если $Q < Q_0$. Неравенство $\tau'(\alpha_1) > 0$ выполняется и в случае $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ при скоростях потока $u_+ < u < u_1$ и $u_4^* < u < u^+$.

Если же $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, $u^+ < u < u_+$ то $\tau'(\alpha_1) < 0$. Величина $\tau'(\alpha_2)$ всегда положительна. Это видно на рис. 3.24, где представлено распределение $\tau'(\alpha)$ по скорости потока при $h=1\text{ м}$, $H=10^3\text{ м}$ и значениях (1.15). Штриховая кривая, как и на рис. 3.22, 3.23, иллюстрирует здесь случай $Q_1=0$, а сплошные с номерами 1, 2 соответствуют сжимающим усилиям $1.68 \cdot 10^6$ и $3.03 \cdot 10^6\text{ Н/м}$. Участки кривых сверху от кружков характеризуют $\tau'(\alpha_2)$, а другие участки относятся к $\tau'(\alpha_1)$. На оси u кружком отмечена величина u_1 , а прямоугольником и треугольником величина u^+ и u_+ при $Q_1=1.8\sqrt{D_1}$. Значения же $\tau'(\alpha)$, отмеченные кружками на кривых, принимаются при $u=u_4^*$.

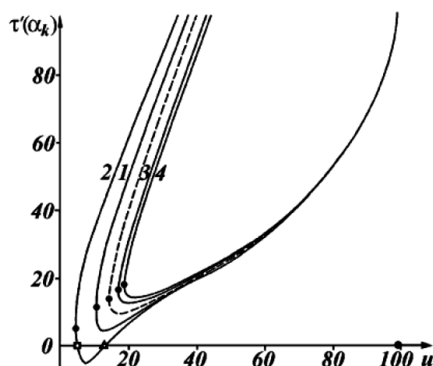


Рис. 3.24

Формулы (3.28), (3.29) показывают, что вверх и вниз по потоку генерируется по одной незатухающей волне. Их передние фронты удаляются от области приложения возмущений со скоростью V_1 и V_2 , а длины волн равны $\lambda_1 = 2\pi/\alpha_1$, $\lambda_2 = 2\pi/\alpha_2$ соответственно. Зависимость V_1 и V_2 от u характеризуется рис. 3.24, а распределение длин генерируемых волн по скорости потока иллюстрируется рис. 3.22 и дисперсионной зависимостью, представленной на рис. 3.23. Из данных на рис. 3.22, 3.23 следует, что с увеличением скорости потока величина λ_2 уменьшается, а λ_1 растет. Причем $0 < \lambda_2 < 2\pi/\beta$, $2\pi/\beta < \lambda_1 < \infty$, если u изменяется в соответствующих для каждой из волн пределах. Влияние ледового сжатия на λ особенно существенно проявляется при условии $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, если скорость потока изменяется в пределах $u_4^* < u < u_+$. Здесь u_+ (м/с) при $h=1\text{ м}$, $H=10^3\text{ м}$ и значениях (1.15) равно 13.2 для $Q_1=1.8\sqrt{D_1}$ и 11.1 в случае $Q_1=1.5\sqrt{D_1}$. С ростом величины сжимающего усилия длина λ_1 волны ζ_1 увеличивается при заданном u , а длина

λ_2 волны ζ_2 уменьшается. Что касается скоростей передних фронтов волн ζ_1 и ζ_2 , то большим сжимающим усилиям при фиксированных скоростях потока отвечают и большие значения V_1, V_2 .

Если $u > u_1$, то незатухающие волны возникают только в области $x < 0$, а вид ζ , определяемый формулой (3.29), формируется только под воздействием волны ζ_2 .

При скоростях потока $u < u_4^*$ незатухающие волны не возникают ни вверх, ни вниз по потоку.

Отметим, что волна ζ_2 обусловлена исключительно упругими силами ледяного покрова и в море со свободной поверхностью или покрытом битым льдом не генерируется. Таким образом, незатухающие колебания ледяного покрова в условиях ледового сжатия вызываются возмущениями (3.22) при меньших скоростях потока, чем в случае отсутствия сил сжатия. При этом деформация элементов волн, обусловленных как гравитационными, так и упругими силами, может быть существенной за счет сжимающих усилий.

В случае растягивающих усилий волновое движение, генерируемое возмущениями (3.22), описывается теми же формулами, что и в условиях ледового сжатия при $Q_1 < Q_0$. Отличие состоит лишь в том, что $l(r) = 1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4$. Распределение корней α_1, α_2 по скорости потока в этом случае иллюстрируется сплошными кривыми, расположенными на рис. 3.22 и рис. 3.23 сверху от штриховой. Эти кривые по порядку снизу вверх отвечают растягивающим усилиям $1.68 \cdot 10^6, 3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Распределение $\tau'(\alpha)$ по скорости потока, представленное кривыми 3 и 4 на рис. 3.24, характеризует скорости переднего фронта возникающих волн при наличии растягивающих усилий $1.68 \cdot 10^6$ и $3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Видно, что растягивающие усилия приводят к увеличению длины упругой волны ζ_2 . Длина волны ζ_1 уменьшается при этом. С ростом величины растягивающего усилия растет и u_4^* . Следовательно, в случае растягивающих усилий незатухающие волны начинают генерироваться давлениями (3.22) при большей скорости потока, чем в случае сжимающих. Большему растягивающему усилию соответствует меньшее значение скорости переднего фронта упругой волны ζ_2 . Значения же V_1 растут с уменьшением величины растягивающего усилия.

При отсутствии течений точно такие же волны генерируются движущейся со скоростью u областью атмосферных возмущений [148, 149]. Это справедливо как при наличии растягивающих усилий, так и в условиях ледового сжатия. При этом волна ζ_2 возникает только перед областью движущихся возмущений ($x < 0$), а волна ζ_1 — за ней

($x > 0$). В этом случае u_4^* является резонансной скоростью перемещения атмосферных возмущений. Ей соответствует кратный полюс подынтегральной функции в (3.26), что и обуславливает явления резонанса. Резонансными же явлениями можно объяснить некоторые случаи взламывания ледяного покрова, в том числе и берегового припая. При $h = 1$ м, $H = 10^3$ м и значениях параметров (1.15) без учета ледового сжатия $u_4^* = 14.57 \text{ мс}^{-1}$. Эта величина, отмеченная точкой на штриховой кривой рис. 3.22, согласуется с полученной по осредненным данным наблюдений в Чукотском море [135] наиболее вероятной для разлома припая скоростью ветра $u = 15 \text{ мс}^{-1}$. Средняя толщина припая во время этих наблюдений также составляла около 1 м. Ледовое сжатие уменьшает, а растяжение увеличивает значение резонансной скорости (рис. 3.22). Следовательно, разлом льда в условиях ледового сжатия (растяжения) возможен при меньших (больших) скоростях перемещения атмосферных возмущений по сравнению со случаем отсутствия сил ледового сжатия. Количественная оценка этого влияния следует и из табл. 3.5, где представлены результаты численных расчетов $u_4^* (\text{мс}^{-1})$ для значений модуля нормальной упругости $9 \cdot 10^9$, $8.2 \cdot 10^9$, $5 \cdot 10^9 \text{ Нм}^{-2}$ и соответствующих им толщин льда 4.5, 0.8, 2 м, наблюдаемых на дрейфующей станции СП-20 в феврале ($n=1$) 1971 г., на Ладожском озере в марте ($n=2$) 1972 г. [131] и в Антарктике ($n=3$) в 1965 г. [133]. Верхняя строка отвечает растяжению, а нижняя – сжатию. Для таких же значений модуля упругости и толщины льда в табл. 3.6 приведена величина $2\pi/\beta$ (м), представляющая собою верхнюю границу длин генерируемых упругих волн и нижнюю границу для волн гравитационных.

Таблица 3.5

$n \backslash Q_1$	0	$\sqrt{D_1}$	$1.5\sqrt{D_1}$	$1.8\sqrt{D_1}$
1	29.31	34.84	37.08	38.32
	29.31	21.34	15.31	9.82
2	15.30	18.16	19.32	19.95
	15.30	11.15	8.00	5.11
3	20.12	23.91	25.45	26.29
	20.12	14.65	10.51	6.71

Таблица 3.6

$n \backslash Q_1$	0	$\sqrt{D_1}$	$1.5\sqrt{D_1}$	$1.8\sqrt{D_1}$
1	418	481	521	523
	418	369	348	330
2	114	134	142	146
	114	99	94	91
3	226	232	251	253
	226	175	165	161

3.4. Волны от периодических возмущений в условиях продольного растяжения

Пусть к поверхности ледяного покрова, плывущего вместе с потоком идеальной несжимаемой жидкости и испытывающего продольное растяжение, прикладываются с момента времени $t = 0$ периодические давления вида (3.1). Изучим влияние растягивающих усилий на развитие волнового возмущения, считая, что движение жидкости потенциально, а в начальный момент времени поток не возмущен и поверхность лед-вода горизонтальна [24]. Задача заключается в решении уравнения (3.2) с граничными $\varphi_z = 0$ при $z = -H$,

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} - Q \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = -\frac{p}{\rho g} \quad \text{при } z = 0$$

и начальными (3.4) условиями. Здесь $Q_1 = Q/(\rho g)$, Q – растягивающее усилие, приходящееся на единицу ширины ледяной пластины, ζ – возвышение поверхности лед-вода (прогиб льда), u – скорость невозмущенного потока, D_1 , F , χ_1 определяются по формулам (3.10). После применения комплексного преобразования Фурье по x и удовлетворения граничных условий с учетом (3.5) придем к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (3.11), где следует положить

$$\tau(r) = [\theta(r)l(r)]^{1/2}, \quad \theta(r) = rg(1 + \chi_1 g \text{th} rH)^{-1} \text{th} rH, \\ l(r) = 1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4. \quad (3.30)$$

Из этого уравнения, после удовлетворения начальных условий и применения теоремы обращения, получим для ζ выражения (3.12), (3.7), (3.30). Запишем это интегральное представление в виде (3.8), заменив η_k ($k = 1, 2$) η на

$$\eta_k = \int_{L_k} \frac{\tau(r)}{l(r)\Delta_k} f^*(r) \exp(i|x|M_k) dr \quad (k = 1, 2), \\ \eta = \int_L \frac{2\tau^2(r)}{l(r)\Delta} f^*(r) \exp(irx) dr \exp(i\sigma t), \quad (3.31) \\ M_k = -[ur + (-1^k)\tau(r)]v + r \text{sign} x, \quad v = t/|x|.$$

Здесь L идет по действительной оси, обходя корни уравнений $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ по полуокружностям, где $\text{Re}(i\Delta_1) > 0$, $\text{Re}(i\Delta_2) > 0$ соответственно, L_1 обходит только точки, где $\Delta_1 = 0$, а L_2 – точки, где $\Delta_2 = 0$. Распределение корней этих уравнений по частоте и скорости потока качественно такое же, что и при отсутствии [171] растягивающих усилий ($Q = 0$). Оно описано в разделе 3.2. Все выведенные там формулы и оцен-

ки для корней $r = \alpha_k$ ($k=1-6$) справедливы и в случае продольного растяжения. Продольное растяжение не приводит к появлению новых корней, а только меняет их значения и деформирует область их нахождения. Для $\sigma + ur + \tau(r) = 0$ это хорошо видно из рис. 3.25, где изображена функция $u = [\tau(r) + \sigma]r^{-1}$. Сплошные линии здесь отвечают $Q_1 = 0$, а штриховые $-Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$, соответствующему растягивающему усилию $3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Представленные здесь и дальше в этом параграфе результаты численных расчетов проведены для $h = 1$ м, $H = 10^3$ м и значений (1.15).

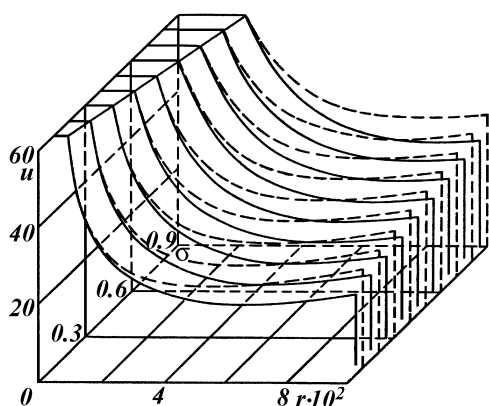


Рис. 3.25

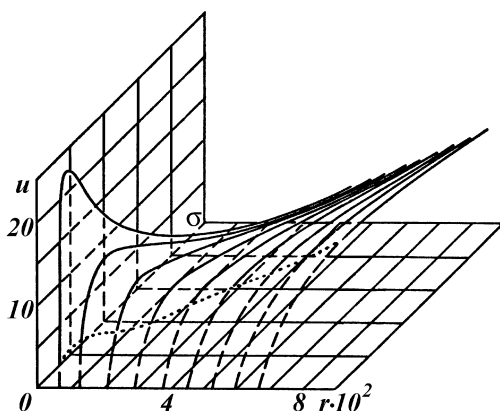


Рис. 3.26

Функция $u = [\tau(r) - \sigma]r^{-1}$, характеризующая распределение корней уравнения $\sigma + ur - \tau(r) = 0$, изображена при $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$ на рис. 3.26.

Сопоставление данных из рис. 3.26 с аналогичной зависимостью на рис. 3.4 при $Q_1 = 0$, а также сплошных кривых со штриховыми на рис. 3.26 показывает, что увеличение растягивающего усилия приводит к изменению значений u_1 , u_2 , u_3 , определяемых по формулам (3.15), (3.17) и характеризующих распределение корней рассматриваемых уравнений. Зависимость распределения u_k ($k=1,2,3$) по σ от величины Q_1 иллюстрируется рис. 3.27, где сплошными линиями представлено u_1 , а штриховыми и штрихпунктирными — u_3 и u_2 . Номера 1, 2 соответствуют растягивающим усилиям 0, $3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Точками на оси σ помечены соответствующие значения σ_0 , определяемые формулой (3.14). Видно, что рост Q_1 приводит к увеличению u_k ($k=1,2,3$). Меняются при изменении Q_1 и значения σ_0^* , $\sigma_0(c^{-1})$, $u_0(m \cdot c^{-1})$, $r_1(m^{-1})$. Они равны 0.57, 0.26, 9.52, $3.3 \cdot 10^{-2}$ для $Q_1 = 0$, 0.52, 0.21, 12.49, $2.5 \cdot 10^{-2}$ для $Q_1 = \sqrt{D_1}$ и 0.46, 0.17, 14.2, $2 \cdot 10^{-2}$ при $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$. Величина u_4

(см. формулу (3.16)) также растет с увеличением растягивающего усилия. В частности, для усилий 0 ; $1.68 \cdot 10^{-6}$, $3.03 \cdot 10^{-6}$ Н/м она равна 14.2, 16.8, 18.4 м/с.

Таким образом, учет продольного растяжения не приводит к появлению новых корней уравнений $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, а следовательно, и к появлению новых волн по сравнению со случаем отсутствия растягивающих усилий ($Q_1 = 0$). Вычислив (3.31), найдем, что незатухающее с расстоянием волновое движение на большом удалении от области приложения давлений (3.1) вниз ($x > 0$) и вверх ($x < 0$) по потоку, как и в случае $Q_1 = 0$, формируется из волн вида (3.19). Число возникающих волн и их распределение по частоте колебаний и скорости потока такое же, как и в табл. 3.4, где выписаны номера k генерируемых при $Q = 0$ волн ζ_k . Волны ζ_1 , ζ_2 , ζ_5 , ζ_6 гравитационные, а ζ_3 , ζ_4 чисто упругие. Направление перемещения каждой из волн и их передних фронтов то же, что и при $Q_1 = 0$.

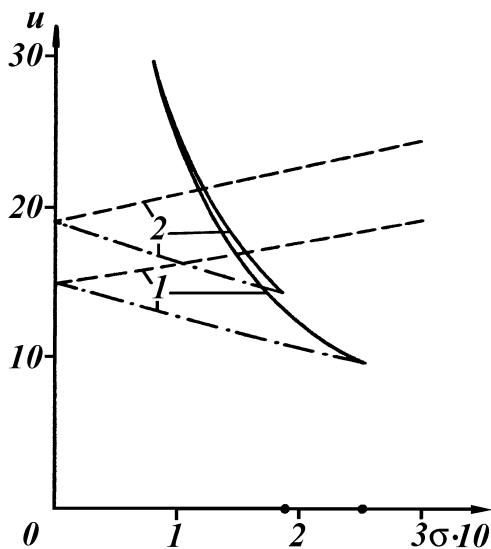


Рис. 3.27

Дисперсионные кривые для волн ζ_k ($k = 2 - 6$) приведены на рис. 3.28, а, а для ζ_1 — на рис. 3.28, б. Сплошные кривые отвечают $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$, а штриховые — $Q_1 = \sqrt{D_1}$. Цифры 1, 2, 3 соответствуют скоростям потока 0, 10, 18 м/с. Эти зависимости позволяют оценить влияние продольного растяжения на длины $\lambda_k = 2\pi/\alpha_k$ и фазовые скорости $v_k = \sigma/\alpha_k$ волн. Влияние величины растягивающего усилия на распределение фазовых и фронтальных скоростей по частоте колебаний иллюстрируется рис. 3.29–3.31, где номера кривых 1 – 4 отвечают ско-

ростам потока 0, 5, 10, 16 м/с при $Q_1 = 0$, а номера 5 – 8 – этим же u при $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$. Зависимость v_1 и $\tau'(\alpha_1) = \tau'_1$ от σ показана на рис. 3.29.

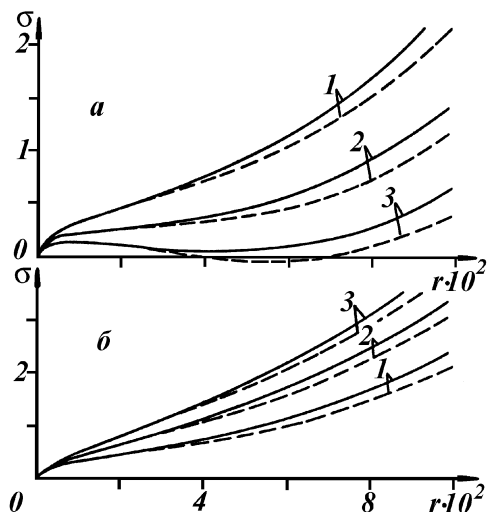


Рис. 3.28

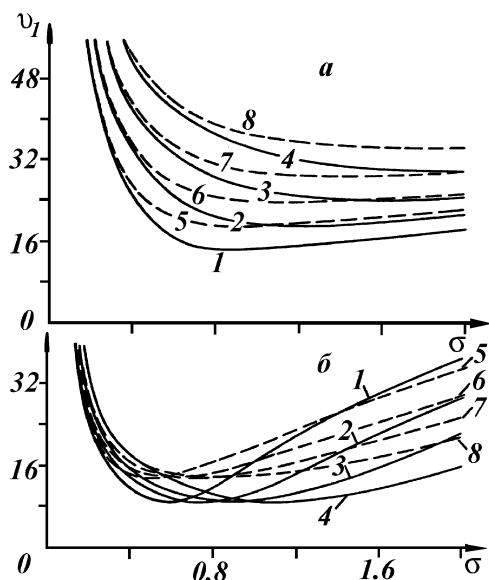


Рис. 3.29

При $\sigma \rightarrow 0$ величины v_1 и τ'_1 стремятся к $\sqrt{gH}$, а их пределы при $\sigma \rightarrow \infty$ равны ∞ для любого u и Q_1 . Минимальное значение $\tau'(\alpha_1)$, достигаемое при $\sigma = \tau(r_1) + ur_1$, практически не меняется с изменением скорости потока, а определяется растягивающим усилием. Величина минимума функции $v_1(\sigma)$, принимаемая на частоте $\sigma = \tau(\beta) + u\beta$, растет как с увеличением Q_1 , так и скорости потока. Положение же минимальных значений v_1 и τ'_1 с ростом Q_1 (или u) смещается в сторону меньших (или больших) частот. При фиксированном u продольное растяжение может приводить как к увеличению, так и к уменьшению скорости переднего фронта волны ζ_1 , что определяется частотой колебания. Фазовая скорость v_1 растет с увеличением Q_1 . Распределение фазовых v_k и фронтальных V_k скоростей волн ζ_k ($k = 2 - 6$) характеризуется рис. 3.30, 3.31.

На кривых 1, 2, 5, 6, 7 кружками помечены значения v_k и $\tau'_k = \tau'(\alpha_k)$, принимаемые на соответствующих частотах $\sigma = \sigma_4^*$. Треугольники и квадраты на кривых 3, 4, 8 рис. 3.30 отвечают значениям σ , равным σ_9 , σ_{10} (см. формулу (3.16)), а звездочка на штриховом участке линии 4 рис. 3.31 – частоте $\sigma_{11} = u\beta_3 - \tau(\beta_3)$. Напомним, что β_3 – положительный корень уравнения $r\tau'(r) - \tau - \sigma = 0$. На точечных участках кривых 3, 4, 8 рис. 3.31 крайние левые значения принимаются при $\sigma = \sigma_9$, а крайние

правые – при $\sigma = \sigma_{10}$. Сплошные участки кривых 1–8 характеризуют волну ζ_6 , точечные – волну ζ_5 , а штрихпунктирные – ζ_4 . Волны ζ_2 , ζ_3 характеризуются штриховыми участками кривых 4. Причем к v_2 относится выпуклая часть штрихового участка линии 4, а к v_3 – вогнутая.

Величина же τ'_3 определяется штриховым участком кривой 4, лежащим сверху от звездочки, а τ'_2 – снизу от нее. По данным на рис. 3.30, 3.31 можно заключить, что при фиксированных σ и u фазовые скорости v_3 , v_4 , v_6 растут, а v_2 , v_5 уменьшаются с увеличением растягивающего усилия. Величины V_5 , V_2 , V_3 , V_4 убывают при этом, а V_6 растет.

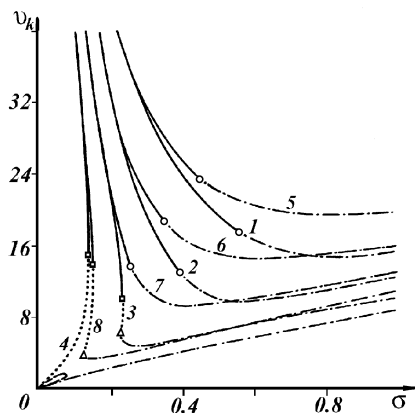


Рис. 3.30

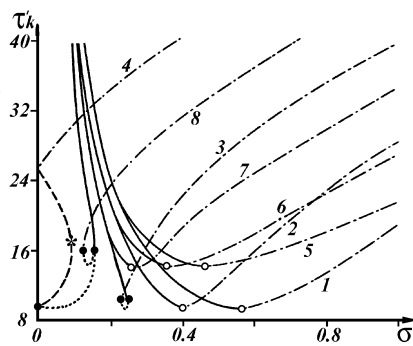


Рис. 3.31

Амплитуды A_k волн ζ_k ($k=1-6$) вычислялись для функции (3.21). Их распределение по частоте колебаний приведено на рис. 3.32, 3.33 с точностью до множителя $p_0/(pg)$. На рис. 3.32 сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые отвечают растягивающим усилиям 0; $1.68 \cdot 10^6$; $3.03 \cdot 10^6$ Н/м при скорости потока 18 м/с (рис. 3.32, а) и 10 м/с (рис. 3.32, б). Зависимость $A_k(\sigma)$ при $k=2-6$ показана на рис. 3.33, а, б соответственно линиям с двойным пунктиром, точечными, сплошными, штрихпунктирными и штриховыми. Величины A_2 и A_3 даны для $\sigma \in (-\sigma_{11}, 0]$. Причем $A_2(\sigma) = A_2(-\sigma)$, $A_3(\sigma) = A_3(-\sigma)$. Здесь рис. а, б отвечают растягивающим усилиям $1.68 \cdot 10^6$; $3.03 \cdot 10^6$ Н/м при скорости потока 18 м/с, а рис. в, г – этим же усилиям при скорости потока 10 м/с.

Треугольники на оси σ рис. 3.33, в, г характеризуют частоту, отделяющую волну ζ_6 (слева от треугольника) от ζ_4 . Можно заключить, что при фиксированной скорости потока увеличение растягивающего усилия приводит к уменьшению вертикального размаха колебаний функции $A_1(\sigma)$ и смещению ее экстремальных значений в сторону больших частот. Увеличивается при этом и расстояние между нулями функции

$A_1(\sigma)$, характеризующей амплитуду волны ζ_1 , генерируемой при любых скоростях потока.

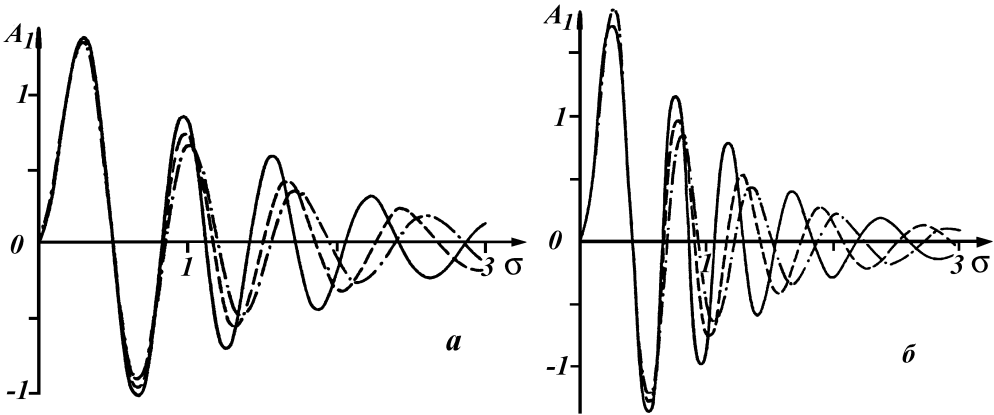


Рис.3.32

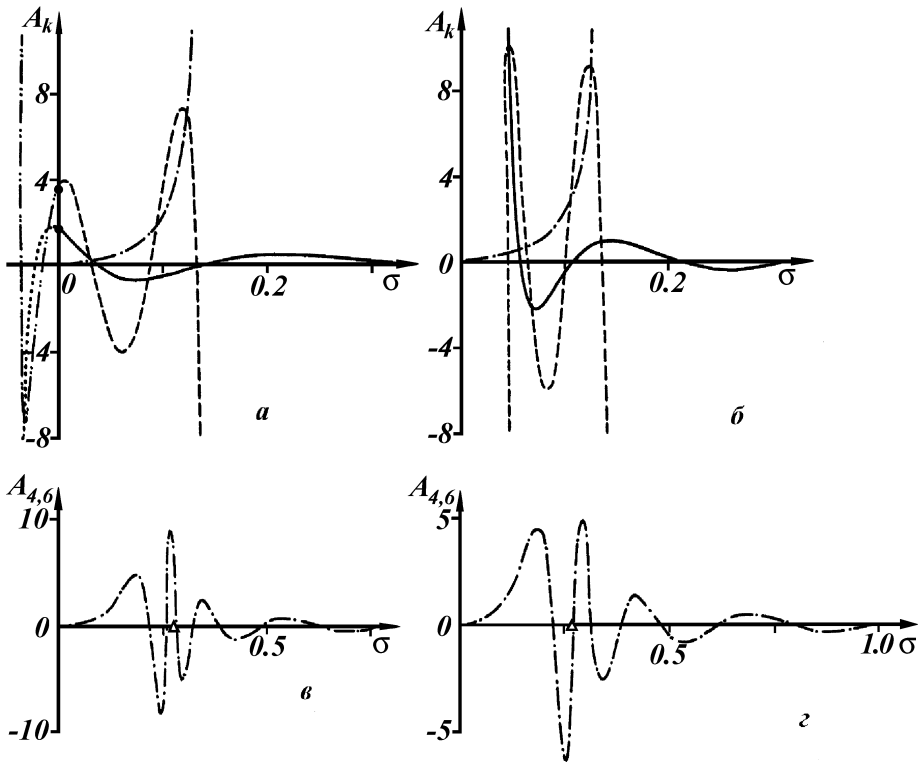


Рис. 3.33

При одинаковых скоростях потока разным величинам Q отвечают не только разные амплитуды соответствующих волн, но и разное число генерируемых волн. Кроме волны ζ_1 может возникнуть еще пять

($k = 2 - 6$), три ($k = 4 - 6$), одна ($k = 4$ или $k = 6$) волны ζ_k . Из волн ζ_4 , ζ_5 , ζ_6 наибольший вклад может давать ζ_5 . Амплитуды волн ζ_6 и ζ_5 на частоте $\sigma = \sigma_{10}$ обращаются в бесконечность. Бесконечно большое значение A_5 может принимать и при $\sigma = \sigma_9$ ($\sigma_9 < \sigma_{10}$). Для амплитуд A_2 и A_3 резонансной частотой является $\sigma = \sigma_{11}$.

Таким образом, продольное растяжение не только деформирует элементы волн, но может при соответствующих значениях u приводить и к принципиальному изменению характера волнового движения, формируемого из двух, четырех или шести волн. С увеличением растягивающего усилия сужается область значений частоты колебаний и скорости потока, при которых генерируются все шесть волн вида (3.19). Напомним, что волны ζ_k генерируются при таких σ , u , Q , при которых уравнения $\sigma + ur - \tau(r) = 0$, $\sigma + ur + \tau(r) = 0$ имеют действительные корни α_k с соответствующим индексом k .

3.5. Влияние ледового сжатия на волны от периодических поверхностных давлений

Проведем теперь анализ влияния ледового сжатия на волновое возмущение, генерируемое периодическими по времени давлениями (3.1). Давления прикладываются к поверхности ледяного покрова, плывущего на потоке идеальной несжимаемой жидкости с постоянной по глубине скоростью u в положительном направлении оси x , начиная с момента времени $t = 0$. До начала действия давлений ледяная пластина (поверхность лед-вода) горизонтальна, а поток жидкости не возмущен. Задача сводится к решению уравнения Лапласа (3.2) с граничными и начальными условиями

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = - \frac{p}{\rho g} \quad \text{при } z = 0,$$

$$\varphi_z(x, -H, t) = 0, \quad \varphi(x, z, 0) = \zeta(x, 0) = 0.$$

Здесь $Q_1 = Q/(\rho g) > 0$ – усилие сжатия, приходящееся на единицу ширины ледяной пластины, D_1 , χ_1 , F определяются по формулам (3.10), ζ и φ связаны кинематическим условием $\zeta_t = \varphi_z - u\zeta_x$.

Методом интегральных преобразований задача сводится к вычислению интегралов

$$\zeta = - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{p_0}{\rho g} (\eta_1 - \eta_2 - \eta),$$

$$\begin{aligned}\eta &= \int_L \frac{2\tau^2(r)}{l(r)\Delta} f^*(x) \exp(irx) dr \exp(i\sigma t), \\ \eta_k &= \int_{L_k} \frac{\tau(r)}{l(r)\Delta_2} f^*(r) \exp(i|x|M_k) dr \quad (k=1, 2), \\ M_k &= -[ur + (-1)^k \tau(r)]v + r \operatorname{sign} x, \quad v = t/|x|, \\ \tau(r) &= [\theta(r)l(r)]^{1/2}, \quad \theta(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \\ l(r) &= 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4, \quad \Delta = \Delta_1 \Delta_2, \quad \Delta_{1,2} = \sigma + ur \mp \tau(r),\end{aligned}$$

$f^*(r)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, контуры интегрирования L , L_1 , L_2 совпадают с действительной осью всюду, кроме окрестностей полюсов подынтегральных функций, представляющих собою вещественные корни уравнений $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. Корни уравнения $\Delta_1 = 0$ обходятся по полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_1) > 0$, а корни уравнения $\Delta_2 = 0$ – по полуокружностям, где $\operatorname{Re}(i\Delta_2) > 0$. Путь L_1 обходит только точки, где $\Delta_1 = 0$, а путь L_2 – только точки, где $\Delta_2 = 0$. При условии $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ такой обход полюсов обеспечивает затухание интегралов $\eta_{1,2}$ с течением времени для любого фиксированного x .

Число полюсов подынтегральных функций, а следовательно, и характер волнового движения определяется частотой колебаний, величиной сжимающего усилия и скоростью потока. При толщине льда $h = 1$ м, $H = 10^3$ м и значениях (1.15), отвечающих натурному льду, это иллюстрируется рис. 3.34, 3.35. На рис. 3.34 изображена функция $u = [\tau(r) - \sigma]r^{-1}$, а на рис. 3.35 – функция $u = [\tau(r) + \sigma]r^{-1}$, характеризующие соответственно распределение корней уравнений $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$. Эти функции даны только в области $r > 0$, так как при $r < 0$ картина симметрична относительно начала координат. Сплошным, штриховым и штрихпунктирным кривым на рис. 3.34, 3.35 отвечают Q_1 , равные 0, $\sqrt{D_1}$, $1/8\sqrt{D_1}$, которым соответствуют при принятых значения параметров сжимающие усилия 0, $1.68 \cdot 10^6$, $3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Кривые с номерами 1–3 на рис. 3.34 отвечают частотам колебаний $\sigma(c^{-1})$, равным 0.2, 0.5, 0.8.

Пусть $Q_1 < Q_0 = \tau_0(r_0)$, где r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau'_0(r) = 0$, $\tau_0(r)$ определяется формулой (3.27), а зависимость Q_0 от толщины льда и модуля нормальной упругости показана на рис. 2.14. При таких условиях (сплошные и штриховые кривые на рис. 3.34, 3.35) уравнение

$$\sigma + ur - \tau(r) = 0, \quad (3.32)$$

для $\sigma > \sigma_0$ (кривые 2, 3 на рис. 3.34) имеет при любых скоростях потока только один отрицательный и только один положительный корни. Как и при отсутствии сил ледового сжатия (раздел 3.2), обозначим их при $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$ через $r = -\alpha_1$, $r = \alpha_6$ и $r = -\alpha_1$, $r = \alpha_4$, если $u < u_0^*$ и $u > u_0^*$ соответственно, а при $\sigma > \sigma_0^+$ – через $r = \alpha_4$, $r = -\alpha_1$. Причем $\alpha_6 < r_1 < \alpha_4$, а для α_1 справедлива оценка $\alpha_1 < r_1$, если $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$. Если же $\sigma > \sigma_0^*$ то $\alpha_1 < r_1$ при $u > u_0^*$ и $\alpha_1 > r_1$ для $u < u_0^*$. Кроме того, $\alpha_6 > \alpha_1$ на частотах $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$. Здесь $r_1(\text{м}^{-1})$ – корень уравнения $\tau''(r) = 0$, а σ_0 , $\sigma_0^*(\text{с}^{-1})$, u_0 , $u_0^*(\text{м/с})$ определяются формулами (3.14). Эти величины при значениях параметров, отвечающих рис. 3.34, равны $3.3 \cdot 10^{-2}$, 0.57, 0.26, 9.52, если $Q_1 = 0$ и $4.4 \cdot 10^{-2}$, 0.56, 0.36, 4.34 для $Q_1 = \sqrt{D_1}$. При отсутствии сжимающего усилия [171] зависимость σ_0 и u_0 от толщины ледяной пластины приведена на рис. 3.6 (см. раздел 3.2).

Если $\sigma < \sigma_0$ (линии 1 на рис. 3.34), то корнями уравнения (3.32) будут α_4 , $-\alpha_1$ для $u > u_1$; α_4 , α_5 , α_6 , $-\alpha_1$ для $u_2 < u < u_1$ и α_6 , $-\alpha_1$ для $u < u_2$. При этом

$$u_1 = |c_1(\beta_1)|, \quad u_2 = |c_1(\beta_2)|, \quad \alpha_4 > \beta_2 > \alpha_5 > \beta_1 > \alpha_6 > \alpha_1 > 0, \quad (3.33)$$

$$c_1 = [\tau(r) - \sigma] r^{-1},$$

где β_1 и β_2 – корни уравнения $c'(r) = 0_1$. Кроме того, для любых скоростей потока $\alpha_6 < r_1 < \alpha_4$, а $\alpha_5 < r_1$, если $u_0^* < u < u_1$ и $\alpha_5 > r_1$, если $u_2 < u < u_0^*$.

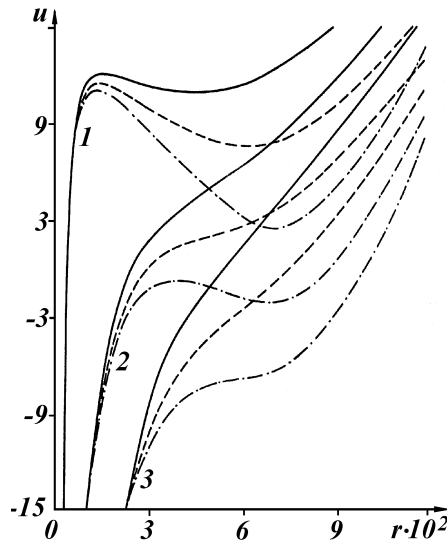


Рис. 3.34

Пусть теперь $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Этому условию удовлетворяют значения Q_1 , отвечающие штрихпунктирным кривым на рис. 3.34, 3.35. При таком условии $u_0 = -\tau'(r_1)$, а уравнение (3.32) может иметь два, четыре или шесть действительных корней, что определяется скоростью потока, а также соотношением частоты колебаний и значений

$$\sigma_1 = \tau(m_1), \quad \sigma_2 = \tau(m_2), \quad \sigma_3 = [\beta_2 \tau(\beta_1) + \beta_1 \tau(\beta_2)](\beta_1 + \beta_2)^{-1}$$

$$\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1, \quad 0 < m_1 < m_2 < D_1^{-1/4}.$$

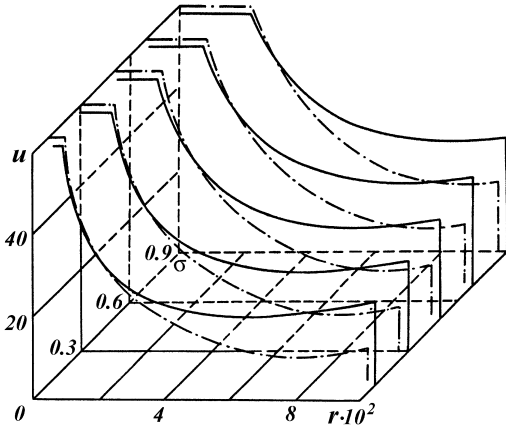


Рис. 3.35

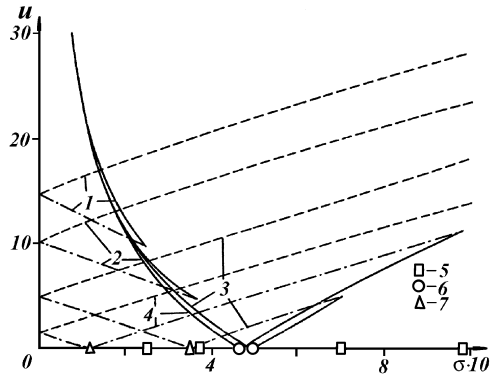


Рис. 3.36

Здесь $\sigma = \sigma_3$ – частота, при которой $u_1 = u_2$; m_1 и m_2 – точки экстремумов функции $\tau(r)$, имеющей при $r = m_1$ локальный максимум, а при $r = m_2$ – локальный минимум. При $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$ и $Q_1 = 1.5\sqrt{D_1}$ это показано двумя нижними кривыми на рис. 3.23. Если $Q_0 = Q_1$, то $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0^*$. С увеличением Q_1 от Q_0 до $2\sqrt{D_1}$ значение σ_2 уменьшается от σ_0^* до значения $\tau(r)$ в корне $r = m_1$ уравнения $\tau'(r) = 0$, полученном для $Q_1 = 2\sqrt{D_1}$. Величины σ_0 , σ_0^* , σ_1 , σ_2 , σ_3 (c^{-1}), u_0 (м/с), r_1 (m^{-1}) при $Q_1 = 1.8\sqrt{D_1}$ и значениях параметров, отвечающих рис. 3.35, равны соответственно 0.69, 0.41, 0.48, 0.35, 0.44, 5.4, $5.8 \cdot 10^{-2}$. Отметим, что при таких же значениях параметров выполнены все последующие в этом параграфе численные расчеты. Для определения m_1 и m_2 в коротковолновом приближении ($\text{th } rH \approx 1$) получим уравнение

$$4\chi_1 g D_1 r^5 + 5D_1 r^4 - 2\chi_1 g D_1 r^3 - 3Q_1 r^2 + 1 = 0,$$

имеющее только два положительных корня. Напомним, что при условии $Q_1 < Q_0$ у функции $\tau(r)$ нет экстремумов в областях $r > 0$, $r < 0$, где ее

вид качественно такой же, как и при растягивающих усилиях или при отсутствии сил ледового сжатия.

При выполнении условия $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ для частот $\sigma < \sigma_2$ справедливо неравенство $u_1 > u_2$, а уравнение (3.32) имеет такие же корни, как и на частотах $\sigma < \sigma_0$ в случае $Q_1 < Q_0$. Кроме соотношений (3.33) для α_5 верны оценки $\alpha_5 < m_1$, $m_1 < \alpha_5 < m_2$, $\alpha_5 > m_2$ соответственно при $u_4 < u < u_1$, $u_5 < u < u_4$, $u_2 < u < u_5$, а $\alpha_{1,6} < m_1$, $\alpha_4 > m_2$ при любых u . Здесь $u_4 = |\sigma - \sigma_1| m_1^{-1}$, $u_5 = |\sigma - \sigma_2| m_2^{-1}$, $u_1 > u_4 > u_5 > u_2$. При $\sigma_2 < \sigma < \sigma_3$ выполняется неравенство $u_1 > u_2$, а для $\sigma_3 < \sigma < \sigma_1$ - неравенство $u_1 < u_2$. Корнями уравнения (3.32) для $\min(u_1, u_2) < u < \max(u_1, u_2)$ будут α_4 , α_5 , α_6 , $-\alpha_1$ в первом случае и α_4 , $-\alpha_1$, $-\alpha_7$, $-\alpha_8$ во втором. Если же $u < \min(u_1, u_2)$ то это уравнение имеет корни α_4 , α_5 , α_6 , $-\alpha_1$, $-\alpha_7$ $-\alpha_8$, а при $u > \max(u_1, u_2)$ - корни α_4 , $-\alpha_2$. Причем

$$\alpha_4 > \alpha_7 > \alpha_8 > \alpha_5 > \alpha_6 > \alpha_1, \beta_1 > \alpha_{1,6} > 0, \beta_1 < \alpha_{5,8} < \beta_2, \alpha_{4,7} > \beta_2. (3.34)$$

Кроме того, $0 < \alpha_{1,6} < m_1$, $m_2 < \alpha_4 < \infty$, $m_1 < \alpha_8 < m_2$, а $\alpha_5 < m_1$, если $u_4 < u < u_1$ и $m_1 < \alpha_5 < m_2$ для $u < u_4$. Корень же α_7 больше m_2 при $u < u_5$, а для $u_5 < u < u_2$ справедливо неравенство $\beta_2 < \alpha_7 < m_2$.

В случае $\sigma_1 < \sigma < \sigma_0$ выполняются соотношения $u_2 > u_1$, $u_4 > u_1$, а уравнение (3.32) имеет два или четыре действительных корня. Четыре корня $\alpha_4, -\alpha_1, -\alpha_7, -\alpha_8$ будут при $u_1 < u < u_2$. При скоростях $u < u_2$ и $u > u_2$ есть только два корня $\alpha_4, -\alpha_7$ и $\alpha_4, -\alpha_1$ соответственно. Для них справедливы, кроме (3.34), оценки $0 < \alpha_1 < m_1$ при $u > u_4$; $m_1 < \alpha_1 < r_1$ для $u_1 < u < u_4$; $\alpha_7 > m_2$, если $u < u_5$, и $r_1 < \alpha_7 < m_2$ для $u_5 < u < u_2$. Величина же α_8 изменяется в пределах $m_1 < \alpha_8 < m_2$. В случае $\sigma > \sigma_0$ при любых u уравнение (3.32) имеет только один положительный $r = \alpha_4$ и только один отрицательный $r = -\alpha_1$ корни. Для α_1 справедливы оценки $\alpha_1 < m_1$, $m_1 < \alpha_1 < m_2$, $\alpha_1 > m_2$ соответственно для $u > u_4$, $u_5 < u < u_4$, $u < u_5$, а $\alpha_4 > m_2$.

Что касается уравнения $\sigma + ur + \tau(r) = 0$, то оно или вообще не имеет действительных корней, если $u < u_3$, или имеет для любых σ и Q_1 два отрицательных корня $r = -\alpha_2$, $r = -\alpha_3$, если $u > u_3$. Здесь

$$u_3 = [\tau(\beta_3) + \sigma] \beta_3^{-1}, \quad 0 < \alpha_1 < \beta_3, \quad \beta_3 < \alpha_3 < \infty, \quad \alpha_4 > \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_7, \quad (3.35)$$

где β_3 - положительный корень уравнения $r\tau'(r) - \tau(r) - \sigma = 0$. При этом в случае $Q_1 < Q_0$ находим $\alpha_2 > r_1$ и $\alpha_2 < r_1$ для $u_3 < u < u_7$ и $u > u_7$ соот-

ветственно, а $\alpha_3 > r_1$ – при любых u . При условии $Q_0 < Q < 2\sqrt{D_1}$, для любых скоростей потока $\alpha_3 > m_2$, а величина α_2 заключена в пределах (m_2, ∞) , (r_1, m_2) , (m_1, r_1) , $(0, m_1)$, если $u < u_6$, $u_6 < u < u_7$, $u_7 < u < u_8$, $u > u_8$ соответственно, где $u_6 = (\sigma + \sigma_2)m_2^{-1}$, $u_7 = (\sigma + \sigma_0^*)r_1^{-1}$, $u_8 = (\sigma + \sigma_1)m_1^{-1}$.

Распределение же полюсов подынтегральной функции (корней уравнения $\Delta(r) = 0$) в интеграле η по частоте колебаний и скорости потока определяется соотношением величин u_k ($k=1-8$). Зависимость u_k от σ при $k=4-8$ линейная, а поведение u_1 , u_2 , u_3 с частотой иллюстрируется рис. 3.36, где сплошными линиями изображено u_1 , штрихпунктирными – u_2 , а штриховыми – u_3 . Номера линий 1–4 отвечают величинам Q_1 , равным 0, $\sqrt{D_1}$, $1.8\sqrt{D_1}$, $1.98\sqrt{D_1}$. Цифрами 5, 6, 7 помечены значения σ_0 , σ_1, σ_2 . При этом для u_1 , u_2 , u_3 справедливы формулы (3.20).

Анализ показал, что при $Q_1 < Q_0$ имеют место следующие неравенства:

$$u_2 < u_0^* < u_3 < u_1, \quad \sigma < \sigma_4; \quad u_2 < u_3 < u_0^* < u_1, \quad \sigma \in (\sigma_4, \sigma_5), \\ u_2 < u_0^* < u_1 < u_3, \quad \sigma \in (\sigma_5, \sigma_0); \quad u_0^* < u_3, \quad \sigma \in (\sigma_0, \sigma_6); \quad u_3 < u_0^*, \quad \sigma > \sigma_6,$$

где

$$\sigma_4 = \frac{\sigma_0^* \beta_3 - \tau(\beta_3) r_1}{r_1 + \beta_3}, \quad \sigma_5 = \frac{\beta_3 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_3)_1}{\beta_1 + \beta_3}, \quad \sigma_6 = \frac{r_1 \tau(\beta_3) + \beta_3 \sigma_0^*}{\beta_3 - r_1}.$$

На этих частотах $u_0^* = u_3$, $u_1 = u_3$, $u_0^* = u_3$ соответственно. При условии же $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ справедливо $\sigma > \sigma_0 > \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_5$ ($Q_0 < Q_1 < Q_2$), $\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_5 > \sigma_2$ ($Q_2 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$), где Q_2 отвечает сжимающему усилию, при котором

$$\beta_3 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_3) = \beta_1 \tau(m_2) + \beta_3 \tau(m_2).$$

Кроме того

$$u_1 > u_3 > u_2, \quad \sigma < \sigma_5; \quad u_3 > u_1 > u_2, \quad \sigma \in (\sigma_5, \sigma_3),$$

$$u_3 > u_2 > u_1, \quad \sigma \in (\sigma_3, \sigma_0); \quad u_0^* > |u_0|, \quad \sigma > \sigma_0.$$

Для каждого конкретного случая проведем вычисление интегралов η и η_6 , имея в виду при этом, что условия $\text{Re}(i\Delta_1) \geq 0$, $\text{Re}(i\Delta_2) \geq 0$ выполняются на контуре, обходящим точки $r = \alpha_4$, $r = \alpha_6$, $\alpha = -\alpha_3$, $\alpha = -\alpha_8$ в верхней, а точки $r = \alpha_5$, $r = -\alpha_1$, $r = -\alpha_2$, $r = -\alpha_7$ в нижней полуплоскостях.

Пусть выполняется условие $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Тогда получим, что незатухающее с расстоянием волновое возмущение на большом удале-

нии от области приложения возмущений вниз ($x > 0$) и вверх ($x < 0$) по потоку формируется из нескольких волн вида

$$\zeta_k = \pm A(\alpha_k) V_k^{-1} f^*(\alpha_k^*) \sin \gamma_k, \quad k=1-8, \quad (3.36)$$

$$\gamma_k = \alpha_k x + \delta(k) \sigma t, \quad \alpha_k^* = \delta(k) \alpha_k,$$

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p_0}{\rho g} \frac{\tau(r)}{l(r)}, \quad \delta(k) = \begin{cases} -1, & k=1, 2, 3, 7, 8, \\ 1, & k=4, 5, 6, \end{cases}$$

$$V_1 = u + \tau'(\alpha_1), \quad V_2 = u - \tau'(\alpha_2), \quad V_3 = \tau'(\alpha_3) - u, \quad V_4 = \tau'(\alpha_4) - u,$$

$$V_5 = u - \tau'(\alpha_5), \quad V_6 = \tau'(\alpha_6) - u, \quad V_7 = u - \tau'(-\alpha_7), \quad V_8 = \tau'(-\alpha_8) - u,$$

где у ζ_k верхний знак берется только при $k=1, 7, 8$. Число незатухающих волн для заданного сжимающего усилия определяется величиной скорости потока и частотой колебаний. Для $\sigma < \sigma_3$ это иллюстрируется табл. 3.7, если $Q_2 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. В случае $Q_0 < Q_1 < Q_2$, $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_3)$ волны распределены по u так же, как и в табл. 3.7 для $\sigma \in (\sigma_5, \sigma_3)$. Распределение волн по скорости потока и частоте колебаний для $\sigma > \sigma_3$ при условии $Q_0 < Q_1 < Q_2$ качественно такое же, как при $Q_2 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Оно представлено в табл. 3.8. При $Q_0 < Q_1 < Q_2$ распределение волн описывается табл. 3.4, характеризующей случай отсутствия сжимающих усилий и случай продольного растяжения, а при $\sigma \in (\sigma_5, \sigma_2)$ оно то же, что и в табл. 3.4 для $\sigma \in (\sigma_5, \sigma_0)$.

Таблица 3.7

σ	u	$x > 0$	$x < 0$
$\sigma < \sigma_2$	$u > u_1$	1, 2	3, 4
	$u_3 < u < u_1$	1, 2, 5	3, 4, 6
	$u_2 < u < u_3$	1, 5	4, 6
	$u < u_2$	1	6
$\sigma_2 < \sigma < \sigma_5$	$u > u_1$	1, 2	3, 4
	$u_3 < u < u_1$	1, 2, 5	3, 4, 6
	$u_2 < u < u_3$	1, 5	4, 6
	$u < u_2$	1, 2, 5, 7	3, 4, 6, 8
$\sigma_5 < \sigma < \sigma_3$	$u > u_3$	1, 2	3, 4
	$u_1 < u < u_3$	1	4
	$u_2 < u < u_1$	1, 5	4, 6
	$u < u_2$	1, 5, 7	4, 6, 8

Таблица 3.8

σ	u	$x > 0$	$x < 0$
$\sigma_3 < \sigma < \sigma_1$	$u > u_3$	1, 2	3, 4
	$u_2 < u < u_3$	1	4
	$u_1 < u < u_2$	1, 7	4, 8
	$u < u_1$	1, 5, 7	4, 6, 8
$\sigma_1 < \sigma < \sigma_0$	$u > u_3$	1, 2	3, 4
	$u_2 < u < u_3$	1	4
	$u_1 < u < u_2$	1, 7	4, 8
	$u < u_1$	7	4
$\sigma > \sigma_0$	$u > u_3$	1, 2	3, 4
	$u < u_3$	1	4

Видно, что при условии $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ вверх и вниз по потоку от области приложения может генерироваться по одной, две, три и четыре незатухающих с расстоянием волны. Волны $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_5, \zeta_6$ гравитационные, возникающие в море со свободной поверхностью и в море, покрытом битым льдом. Волны ζ_3, ζ_4 обусловлены упругими силами ледяного покрова и генерируются в сплошном ледяном покрове, как при отсутствии сжимающих усилий, так и в условиях ледового сжатия или растяжения. Волна же ζ_8 может генерироваться только при сплошном ледяном покрове и только в условиях ледового сжатия при выполнении неравенства $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Это относится и к ζ_7 , если она возникает вместе с ζ_8 . В противном случае характер ζ_7 такой же, как и при отсутствии сил ледового сжатия. Волны ζ_k при $k = 1, 2, 3, 7, 8$ распространяются вниз, а при $k = 4, 5, 6$ – вверх по потоку с фазовыми скоростями $v_k = \sigma / \alpha_k$. Длины генерируемых волн равны $\lambda_k = 2\pi / \alpha_k$. Передние фронты волн $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_5, \zeta_7$ перемещаются вниз, а волны $\zeta_3, \zeta_4, \zeta_6, \zeta_8$ – вверх по потоку от области приложения возмущений соответственно со скоростями V_k .

При условии $Q_1 < Q_0$ может генерироваться не более шести волн ζ_k вида (3.36) для $k = 1 - 6$. Распределение их по частоте колебаний и скорости потока похоже на распределение в условиях продольного растяжения или отсутствия сил ледового сжатия и характеризуется табл. 3.4. Отметим при этом, что волна ζ_1 генерируется как в море со свободной поверхностью, так и в море, покрытом битым или сплошным упругим льдом. Однако, в море со льдом она может быть сильно деформирована под воздействием упругих сил и сил ледового сжатия. Эта деформация

зависит от длины волны и особенно сильно проявляется в случае $\alpha_1 > r_1$. При таких α_1 волна ζ_1 качественно похожа на ζ_7 , возникающую при условии $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, если волновое число последней больше r_1 .

Для количественной оценки элементов волн, генерируемых возмущениями (3.1), (3.21) на характерных для ледяных полей частотах, проводились численные расчеты при тех же значениях параметров, что и расчеты, представленные на рис. 3.35.

Дисперсионные кривые, рассчитанные при сжимающих усилиях $-1.68 \cdot 10^6$ (штриховые линии) и $3.03 \cdot 10^6$ Н/м (сплошные линии) – изображены для волн ζ_1 , ζ_7 , ζ_8 на рис. 3.37, а, а для волн ζ_k , $k=2-6$ – на рис. 3.37, б. Номера кривых 1, 2, 3 отвечают скоростям потока 0, 10, 18 м/с. Каждая из штриховых дисперсионных кривых на рис. 3.37, а, отвечающих усилию $1.68 \cdot 10^6$ Н/м, характеризует волну ζ_1 . Участки сплошных кривых 2, 3 при $r < r_1$ (слева от кружка) относятся к ζ_1 , а для $r > r_1$ – к ζ_7 . Сплошная же кривая 1 характеризует волны ζ_1 , ζ_7 , ζ_8 , волновые числа которых α_1 , α_7 , α_8 удовлетворяют неравенству (3.34). Штриховая кривая 1 на рис. 3.37, б характеризует волну ζ_6 , если $r < r_1$, или волну ζ_4 в случае $r > r_1$. Положительные участки всех остальных кривых рис. 3.37, б описывают ζ_6 , ζ_5 , ζ_4 , а отрицательные, взятые по модулю, волны ζ_2 , ζ_3 . Их волновые числа $r = \alpha_k$ удовлетворяют неравенству (3.34) при $k=4, 5, 6$ и неравенству (3.35) при $k=2, 3$.

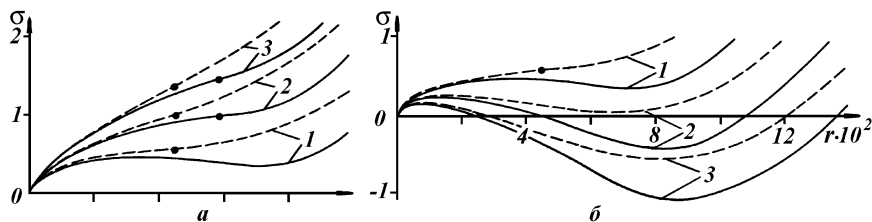


Рис. 3.37

Анализ данных на рис. 3.38 показывает, что при фиксированной скорости потока волна ζ_8 генерируется только в случае $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, если $u < u_0$ и $\sigma_7 < \sigma < \sigma_8$, где $\sigma_7 = \tau(\beta_2) + u\beta_2$, $\sigma_8 = \tau(\beta_1) + u\beta_1$. При таких условиях возникают и ζ_1 , ζ_7 . Причем ζ_7 в данном случае также обусловлена ледовым сжатием. Волны ζ_1 , ζ_7 появляются и на частотах $\sigma < \sigma_7$, $\sigma > \sigma_8$ соответственно. Рост величины сжимающего усилия увеличивает интервал $\Delta\sigma = \sigma_8 - \sigma_7$ частотного спектра, на котором генерируются вместе эти три волны. Увеличение же скорости потока при заданном Q уменьшает $\Delta\sigma$. Это иллюстрируется и рис. 3.38, где сплош-

ными, штриховыми и точечными кривыми изображено распределение амплитуд A_k волн ζ_1 , ζ_7 , ζ_8 по частоте колебаний для $Q_1 = 1.95\sqrt{D_1}$. Зависимости $A_1(\sigma)$, $A_7(\sigma)$ даны с точностью до множителя $p_0/\rho g$, а $A_8(\sigma)$ – до множителя $-p_0/\rho g$ при скоростях потока 0, 1, 18 м/с соответственно на рис. 3.38, *а*, *б*, *в*. Причем рис. 3.38, *в* характеризует ζ_1 , если $\sigma < ur_1 + \tau(r_1)$ (слева от треугольника на оси σ) и ζ_7 при $\sigma > ur_1 + \tau(r_1)$. Волна ζ_7 при данной скорости $u = 18$ м/с генерируется и при отсутствии льда, а упругие силы льда и ледовое сжатие приводит к существенной ее деформации. Амплитуда волны ζ_7 может существенно превосходить A_1 при $u = 18$ м/с. При скоростях же $u < u_0$ и $\sigma \in (\sigma_7, \sigma_8)$ определяющий вклад в волновое движение может вносить волна сжатия ζ_8 .

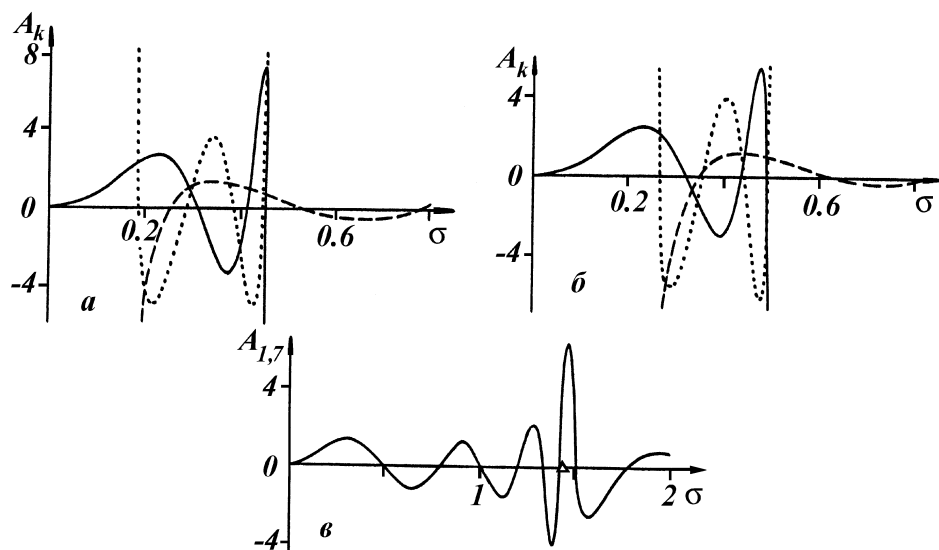


Рис. 3.38

Волны ζ_k , $k = 4, 5, 6$ при фиксированной скорости потока из интервала $u_0 < u < \sqrt{gH}$, если выполняется условие $Q_1 < Q_0$, или из интервала $0 < u < \sqrt{gH}$ при условии $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ вместе генерируются только на частотах $\sigma \in (\sigma_9, \sigma_{10})$, где $\sigma_9 = \tau(\beta_2) - u\beta_2$, $\sigma_{10} = \tau(\beta_1) - u\beta_1$. Без ζ_5 волны ζ_6 и ζ_4 возникают еще и на частотах $\sigma < \sigma_9$, $\sigma > \sigma_{10}$ соответственно. Рост величины сжимающего усилия приводит к уменьшению величин σ_9 , σ_{10} . Уменьшаются σ_9 , σ_{10} и при увеличении скорости потока. При этом $\sigma_9 = 0$, если $u = \tau(\beta_2)/\beta_2$ и $\sigma_{10} = 0$ для $u = \tau(\beta_1)/\beta_1$.

Волны ζ_2 и ζ_3 по одной не возникают. Они генерируются только вместе при скоростях потока $u > u_0$ на частотах $\sigma > \sigma_{11}$, где $\sigma_{11} = u\beta_3 - \tau(\beta_3)$.

Наглядная иллюстрация распределений ζ_k , $k = 2 - 6$ по частоте колебаний дана для $Q_1 = 1.95\sqrt{D_1}$ на рис. 3.39, где а, б, в отвечают скоростям потока 1, 10, 18 м/с. Сплошные, штриховые, штрихпунктирные, точечные кривые и кривые с двойным пунктиром иллюстрируют ζ_4 , ζ_5 , ζ_6 , ζ_3 , ζ_2 соответственно. Зависимости ζ_4 , ζ_6 , ζ_3 от σ даны с точностью до множителя $-p_0/\rho g$, а $\zeta_2(\sigma)$, $\zeta_5(\sigma)$ – с точностью до множителя $p_0/\rho g$. При этом надо иметь в виду, что для функций $\zeta_2(\sigma)$ и $\zeta_3(\sigma)$, приведенных при $\sigma \in (-\sigma_{11}, 0]$, верно $\zeta_2(\sigma) = \zeta_2(-\sigma)$, $\zeta_3(\sigma) = \zeta_3(-\sigma)$.

Распределение фазовых скоростей генерируемых волн и величин $\tau'_k = \tau'(\alpha_k)$, характеризующих скорости их переднего фронта, по частоте колебаний иллюстрируется рис. 3.40 для ζ_1 , ζ_7 , ζ_8 и рис. 3.41 для ζ_k , $k = 2 - 6$. Номера кривых 1, 2, 3 отвечают сжимающим усилиям 0, $1.68 \cdot 10^6$, $3.03 \cdot 10^6$ Н/м. Один, два и три штриха относятся к скоростям потока 0, 10, 18 м/с. Сплошные, штриховые, штрихпунктирные, точечные участки кривых и участки с двойным пунктиром при усилии $3.03 \cdot 10^6$ Н/м характеризуют на рис. 3.41 те же волны, что и на рис. 3.39, а на рис. 3.40 – те же, что и на рис. 3.38.

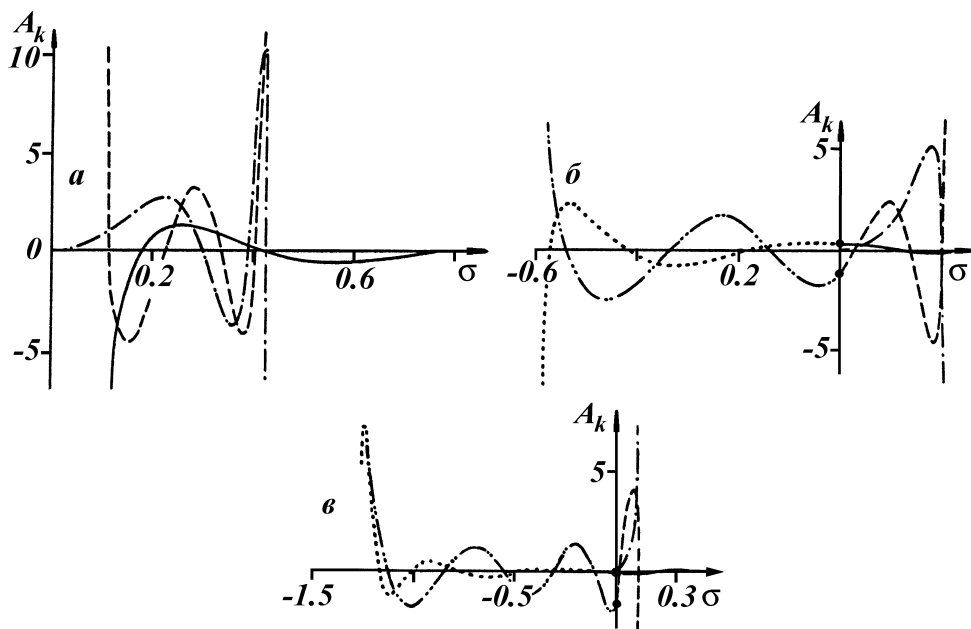


Рис. 3.39

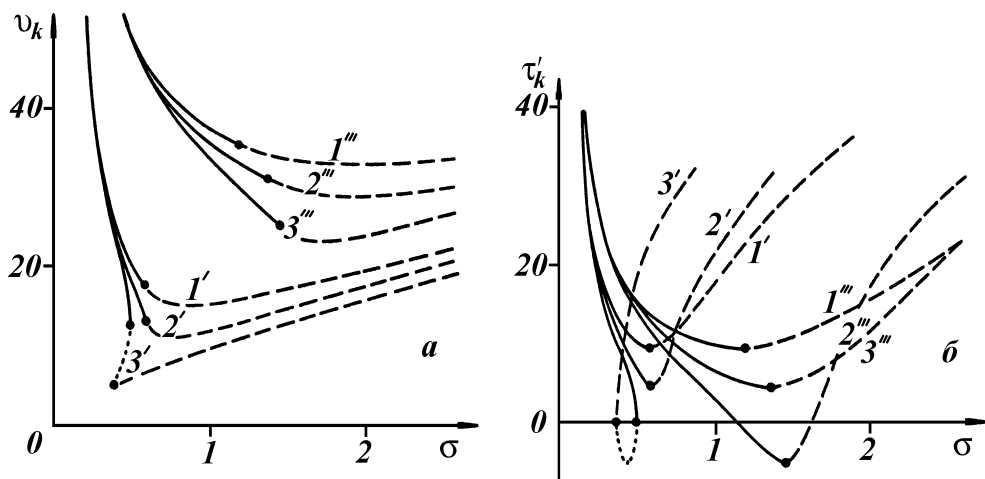


Рис. 3.40

При этом v_2 и v_3 для $0 < \sigma < \sigma_{11}$ определяется из рис. 3.41 как модули $v_{2,3}(-\sigma)$, а зависимость $\tau'(\alpha_{2,3})$ от σ четная. Если $Q_1 = 0$ или $Q_1 = \sqrt{D_1}$, то кривые 1, 2 на рис. 3.40 описывают волну ζ_{11} , возникающую и в море со свободной поверхностью, но сильно деформированную за счет упругих сил и сил ледового сжатия при $\sigma > ur_1 + \tau(r_1)$ (справа от кружков).

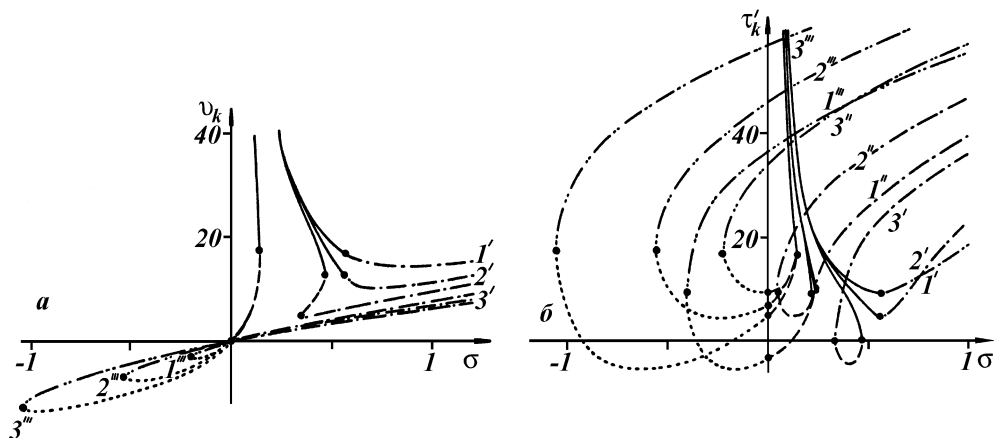


Рис. 3.41

Распределение v_k и $\tau'_k(\alpha_k)$ по скорости потока приведено на рис. 3.42–3.45 для частот $\sigma = 0.2 \text{ с}^{-1}$ (рис. а) и $\sigma = 0.4 \text{ с}^{-1}$ (рис. б). Номера кривых 1–5 отвечают Q_1 , равным 0, $\sqrt{D_1}$, $1.5\sqrt{D_1}$, $1.8\sqrt{D_1}$, $1.95\sqrt{D_1}$. На рис. 3.43, 3.45 участки сплошных кривых в отрицательной области и

характеризуют волну ζ_1 , если их взять симметрично относительно вертикальной оси, а в положительной области характеризуют волну ζ_6 .

Штриховые и штрихпунктирные линии на этих рисунках относятся к волнам ζ_5 , ζ_4 , а с двойным пунктиром и точечные, взятые симметрично относительно вертикальной оси, к волнам ζ_7 , ζ_8 соответственно. Точками на линиях 1, 2 рис. 3.43, б помечены значения v , принимаемые при $u = [\tau(r_1) - \sigma]r_1^{-1}$.

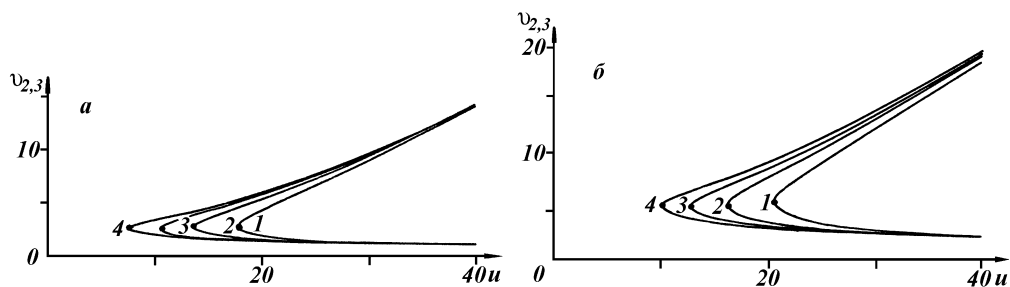


Рис. 3.42

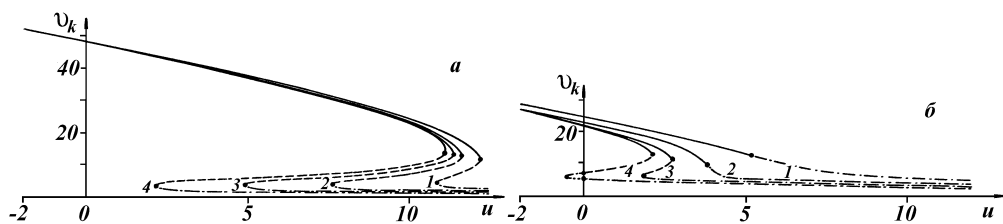


Рис. 3.43

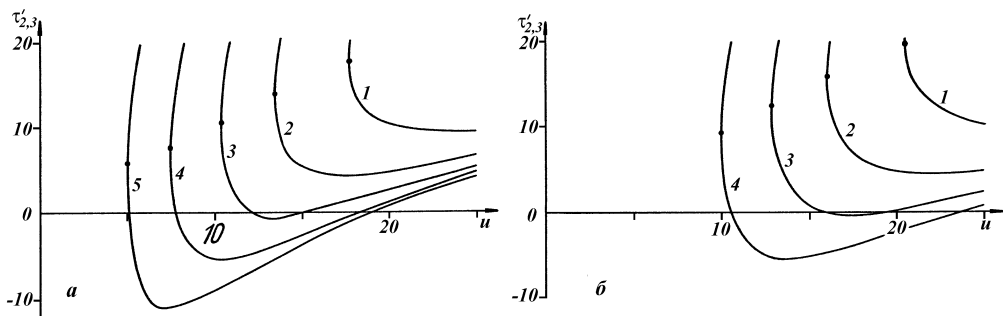


Рис. 3.44

На рис. 3.42, 3.44 сверху от точки кривые описывают волну ζ_3 , а снизу от точки — волну ζ_2 . Из данных на рис. 3.40–3.45 и формул (3.36) для фронтальных скоростей следует, что при фиксированных частоте колебаний и скорости потока увеличение сжимающего усилия приводит к умень-

шению фазовых скоростей волн $\zeta_1, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_6, \zeta_7$. Величины v_2, v_5, v_8 растут при этом. Фронтальные скорости V_2, V_3, V_4, V_5, V_8 с увеличением сжимающего усилия растут, а V_1, V_6 убывают. Величина же V_7 при этом может и расти, и убывать, если вместе с ζ_7 не генерируется ζ_8 . В противном случае V_7 растет на рассматриваемом диапазоне частоты колебаний.

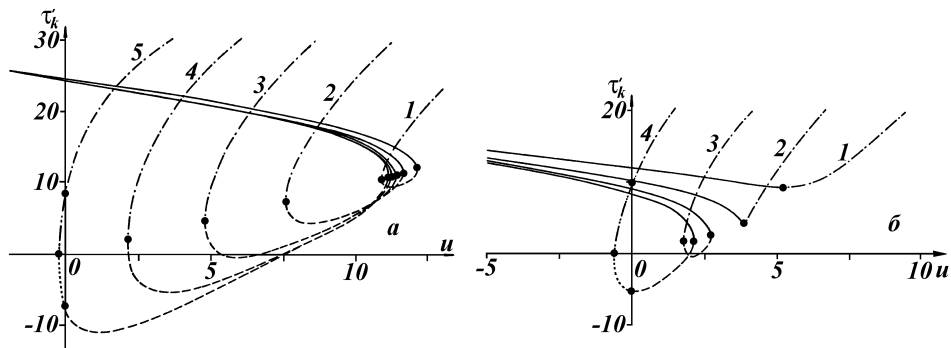


Рис. 3.45

В заключение этого параграфа отметим, что волновая картина, аналогична полученной для $Q_1 < Q_0$ и $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, формируется при отсутствии потока и под воздействием движущейся со скоростью u по поверхности продольно сжатого ледяного покрова области давлений, интенсивность которых периодически меняется со временем. При этом волны $\zeta_3, \zeta_4, \zeta_6, \zeta_8$ возникают перед областью движущихся давлений, а $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_5, \zeta_7$ — за ней.

3.6. Влияние вертикального сдвига скорости потока на волновое возмущение от постоянных поверхностных давлений при ледовом сжатии

Пусть на поверхности потока однородной идеальной несжимаемой жидкости с вертикальным сдвигом скорости плавает сплошной упругий ледяной покров. В начальный момент поток не возмущен, а поверхность лед-вода горизонтальна. Начиная с момента $t = 0$ к поверхности ледяного покрова прикладываются давления (3.22).

Исследование процесса развития волнового движения, генерируемого в условиях ледового сжатия и вертикального сдвига скорости [50, 143, 144], сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + U(z) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + U(z) \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (3.37)$$

с граничными

$$\begin{aligned}D_1 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \chi_1 F \zeta + \zeta &= \frac{1}{\rho g} (p_1 - p) \quad \text{при } z = 0, \\ w &= 0 \quad \text{при } z = -H\end{aligned}\quad (3.38)$$

и начальными

$$\zeta = u = w = p_1 = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (3.39)$$

условиями, где

$$F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad Q_1 = \frac{Q}{\rho g},$$

D_1 , χ_1 определяются по формулам (3.10), $U(z)$ – скорость невозмущенного потока, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, u , w – горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости волнового возмущения потока, p_1 – возмущение давления, ζ – прогиб льда или возвышение поверхности лед-вода, H – глубина бассейна, Q – усилие сжатия, приходящееся на единицу ширины ледяной пластины, ось z направлена вертикально вверх, начало координат выбрано на невозмущенной поверхности лед-вода. При этом w и ζ связаны между собой кинематическим условием

$$w = \zeta_t + u_0 \zeta_x, \quad u_0 = U(0).$$

Исследование волнового движения, генерируемого давлениями (3.22) в условиях ледового сжатия и вертикального сдвига скорости, проведем для скорости невозмущенного потока $U(z) = u^* + a(z + H)$, исходя из (3.37)–(3.39) и используя интегральное преобразование Фурье по x и Лапласа по t . В результате после вычисления интеграла Меллина и применения формулы обращения получим

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{p_0}{\rho \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} l_1^{-1} r f^*(r) \operatorname{th} r H \psi(r, t) \exp(irx) dr, \\ \psi(r, t) &= \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} + \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2) \Delta_1} e^{i\Delta_1 t} - \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2) \Delta_2} e^{i\Delta_2 t},\end{aligned}\quad (3.40)$$

$$\Delta_{1,2} = \gamma_{1,2} - u_0 r. \quad \gamma_{1,2} = \frac{a}{2l_1} \text{thr}H \pm \tau(r),$$

$$\tau(r) = \left[\left(\frac{1}{4} a^2 \text{th}^2 rH + rgl_1 \text{thr}H \right) l_1^{-2} \right]^{1/2},$$

$$l_1 = 1 + \chi_1 r g \text{thr}H, \quad l = 1 + D_1 r^4 - Q_1 r^2, \quad u_0 = u^* + aH,$$

$f^*(r)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$.

Вычислим (3.40) при условии $Q_1 < Q^*$, необходимом для устойчивости ледяной пластины. Здесь

$$Q^* = \tau_1(r_0), \quad \tau_1(r) = \frac{a^2 \text{thr}H}{4gl_1 r^3} + \frac{1}{r^2} + D_1 r^2,$$

r_0 – положительный корень уравнения $\tau'_1(r) = 0$. Величина Q^* определяется вертикальным сдвигом скорости течения, цилиндрической жесткостью и плотностью льда. Большему сдвигу скорости отвечает и большая величина Q^* . При $E = 3.12 \cdot 10^9 \text{ H/м}^2$, $h = 1 \text{ м}$, $H = 10^3 \text{ м}$ и значениях параметров (1.15) она равна, в частности, 346.2, 346.4, 346.6 м², если a равно 0, 0.05, 0.1 с⁻¹ соответственно. Таким Q^* отвечают сжимающие усилия $33.93 \cdot 10^5$, $33.95 \cdot 10^5$, $33.97 \cdot 10^5 \text{ H/м}$. При отсутствии потока и в случае потока с постоянной по глубине скоростью $Q^* = 2\sqrt{D_1}$.

Перепишем (3.40) в виде

$$\zeta = -\frac{p_0}{\rho\sqrt{2\pi}}(\eta + \eta_1 - \eta_2), \quad (3.41)$$

$$\eta = \int_L \frac{r \text{thr}H}{\Delta_1 \Delta_2} f^*(r) \exp(irx) dr,$$

$$\eta_k = \int_{L_k} \frac{r \text{thr}H}{(\gamma_1 - \gamma_2) \Delta_k} f^*(r) \exp(i|x|M_k) dr \quad (k = 1, 2),$$

$$M_k = (\gamma_k - u_0 r)v + r \text{sign}x, \quad v = t/|x|,$$

где контуры интегрирования L , L_1 , L_2 совпадают с действительной осью всюду, кроме окрестностей полюсов подынтегральных функций, представляющих собой вещественные корни уравнений $\gamma_1 - u_0 r = 0$, $\gamma_2 - u_0 r = 0$. Корни уравнения $\gamma_1 - u_0 r = 0$ обходятся по полуокружностям, на которых $\text{Re}(i\Delta_1) > 0$, а корни уравнения $\gamma_2 - u_2 r = 0$ – по полуокружностям, где $\text{Re}(i\Delta_2) > 0$. Причем L_1 обходит только точки, где

$\gamma_1 = u_0 r$, а путь L_2 – только точки, где $\gamma_2 = u_0 r$. При условии $Q_1 < Q^*$ такой обход полюсов подынтегральных функций обеспечивает затухание интегралов $\eta_{1,2}$ с течением времени для любого фиксированного x .

Уравнение $\gamma_1 - u_0 r = 0$ при рассматриваемом условии $Q_1 < Q^*$ имеет только один вещественный корень $r = \alpha_2$, если $u_0 > u_1$, или два корня $r = \alpha_1$, $r = \alpha_2$ – при $u_2 < u_0 < u_1$. Если же $u_0 < u_2$, то указанное уравнение не имеет действительных корней. Здесь

$u_1 = 1/2(aH + \sqrt{a^2 H^2 + 4gH})$, $u_2 = \gamma_1(r_1)/r_1$, $u_1 > u_2$, r_1 – положительный корень уравнения $r\gamma'_1 - \gamma_1 = 0$. Что касается уравнения $\gamma_2 - u_0 r = 0$, то при $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ его корни, в силу равенств $\gamma_1(r) = -\gamma_2(-r)$, $\gamma_1(-r) = -\gamma_2(r)$, при соответствующих величинах u_0 отличаются от корней уравнения $\gamma_1 - u_0 r = 0$ только знаками. При условии $2\sqrt{D_1} < Q_1 < Q^*$ уравнение $\gamma_2 - u_0 r = 0$ других корней, кроме $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, не имеет, несмотря на то, что $\gamma_2(r)$ в области $r > 0$ имеет положительный максимум. В самом де-

ле, $\gamma_2 \leq \frac{a}{2} \text{thr}H$ при $0 < r < \infty$. Кроме того, $u_0 \geq aH$. Подставка этих оценок приводит исходное уравнение к уравнению $2rH - \text{thr}H = 0$, не имеющему действительных корней. Следовательно, и $\gamma_2 \neq u_0 r$ при $r > 0$.

Проведем вычисление интегралов (3.41) для четной функции $f(x)$ методом контурного интегрирования с учетом положения стационарных точек (корней уравнений $M'_{1,2} = 0$) относительно полюсов подынтегральных функций, имея в виду при этом, что условия $\text{Re}(i\Delta_1) \geq 0$, $\text{Re}(i\Delta_2) \geq 0$ выполняются на контуре L , обходящем точки $r = \pm\alpha_1$ в нижней, а $r = \pm\alpha_2$ в верхней полуплоскостях. В результате получим выражение

$$\zeta = \begin{cases} O(1/\sqrt{|x|}), & x < -V_2 t, \\ \zeta_2 + O(1/\sqrt{|x|}), & -V_2 t < x < 0, \\ \zeta_1 + O(1/\sqrt{|x|}), & 0 < x < V_1 t, \\ O(1/\sqrt{|x|}), & x > V_1 t \end{cases}$$

При условии $u_2 < u_0 < u_1$ и выражение

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_2 + O(1/\sqrt{|x|}), & -V_2 t < x < 0, \\ O(1/\sqrt{|x|}), & u < -V_2 t, \end{cases}$$

если $u_0 > u_1$. Здесь

$$\zeta_k = A_k \sin(\alpha_k |x|) \quad (k = 1, 2),$$

$$A_k = -\sqrt{2\pi} \frac{p_0}{\rho} \alpha_k \tau^{-1}(\alpha_k) f^*(\alpha_k) V_k \operatorname{th} \alpha_k H, \quad V_1 = u_0 - \gamma'_1(\alpha_1), \\ V_2 = \gamma'_1(\alpha_2) - u_0.$$

Если $u_0 < u_2$, то $\zeta = O(1/\sqrt{|x|})$ и для $x > 0$ и для $x < 0$.

Таким образом, незатухающее волновое движение, генерируемое давлениями (3.22) при $u_2 < u_0 < u_1$, формируется двумя волнами ζ_1, ζ_2 . Из них ζ_2 упругая (в жидкости со свободной поверхностью и в случае абсолютно гибкой пластинки она не возникает), а ζ_1 гравитационная. Волна ζ_1 генерируется вниз ($x > 0$), а ζ_2 – вверх ($x < 0$) по потоку от области приложения возмущений (3.22). При условии $u_0 > u_1$ вид поверхности лед-вода формируется под воздействием только одной упругой волны ζ_2 , генерируемой только в области $x < 0$. Если же $u_0 < u_2$, то незатухающее волновое движение не генерируется ни вверх, ни вниз по потоку. Передние фронты волн ζ_1, ζ_2 перемещаются от области приложения возмущений со скоростями V_1, V_2 соответственно, а их длины определяются формулами $\lambda_1 = 2\pi/\alpha_1, \quad \lambda_2 = 2\pi/\alpha_2$. Причем $0 < \lambda_2 < 2\pi/r_1, 2\pi/r_1 < \lambda_1 < \infty$.

Для количественной оценки влияние продольного сжатия в условиях вертикального сдвига скорости потока жидкости проводились численные расчеты элементов генерируемых волн для $E = 3.12 \cdot 10^9$ Н/м², $H = 10^2$ м, $h = 1$ м, значений параметров (1.15) и функции $f(x)$, равной единице в области $|x| \leq l$ и нулю при $|x| > l$, где $l = 3 \cdot 10^2$ м.

Зависимость α_1 и α_2 от величины сжимающего усилия и вертикального сдвига скорости наглядно иллюстрируется рис. 3.46, на котором представлена в случае $a = 0$ (штриховые линии) и $a = 0.05 \text{ с}^{-1}$ (сплошные линии) функции $\gamma_1(r)$ при значениях Q_1 , равных 0, 50, 250, 346 м² (кривые 1, 2, 3, 4 соответственно). Таким Q_1 отвечают сжимающие усилия 0, $4.9 \cdot 10^5$, $2.45 \cdot 10^6$, $3.39 \cdot 10^6$ Н/м. Волновые числа α_1 и α_2 являются абсциссами точек пересечения $\gamma_1(r)$ с прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент, равный u_0 .

Угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и касающейся $\gamma_1(r)$ сверху, характеризует u_1 , а касающейся снизу – u_2 . Видно, что увеличение сжимающего усилия, также как и рост вертикального градиента скорости течения, расширяет диапазон значений скорости u_0 , когда незатухающие волны генерируются как вверх, так и вниз по потоку. Особенно значительно влияние продольного сжатия. В частности, при $a = 0.05 \text{ с}^{-1}$ указанный диапазон ($u_1 - u_2$) равен 18.9 и

33 м/с для сжимающих усилий 0 и $3.39 \cdot 10^6$ Н/м. Если же $Q = 3.39 \cdot 10^6$ Н/м, а скорость потока не меняется с глубиной, то $u_1 - u_2 = 30.8$ мс⁻¹. Причем изменение разности $u_1 - u_2$ при изменении Q_1 обусловлено, в основном, влиянием продольного сжатия на величину u_2 , убывающую как с ростом Q_1 , так и с уменьшением a . При $a = 0.05$ с⁻¹ значениям $Q_1 = 0$ и $Q_1 = 346$ м² отвечают u_2 , равные 15, 0.9 м/с, а случаю $Q_1 = 346$ м², $a = 0$ соответствует $u_2 = 0.54$ м/с. Величина же u_1 практически не зависит от Q_1 . Мало меняется она и за счет вертикального сдвига скорости. Действительно, изменение a от 0 до 0.05 с⁻¹ приводит к увеличению u_1 только на 8.3% (от 31.3 до 33.9 м/с).

Влияние сжимающего усилия и вертикального сдвига скорости течения на дисперсионную зависимость $r(u_0)$ иллюстрируется рис. 3.47, а, где обозначения те же, что и на рис. 3.46. Из данных на этом рисунке и на рис. 3.46 следует, что длина λ_1 гравитационных волн ζ_1 , возникающих только вверх по течению, не превосходит длины λ_2 упругих волн ζ_2 , генерируемых вниз по течению. Причем $\max \lambda_2 = \min \lambda_1$. При фиксированных u_0 и Q_1 учет вертикального сдвига скорости уменьшает α_2 . Однако влияние на волновое число α_2 упругих волн мало, а имеющееся отличие значений α_2 для $a = 0$ и $a > 0$ исчезает с ростом u_0 . Величина же α_1 растет с увеличением вертикального сдвига скорости течения. Большему u_0 отвечает и большее отклонение α_1 для случая $a = 0$ от случая $a > 0$. Особенно значительны эти отличия при u_0 , близких к u_1 .

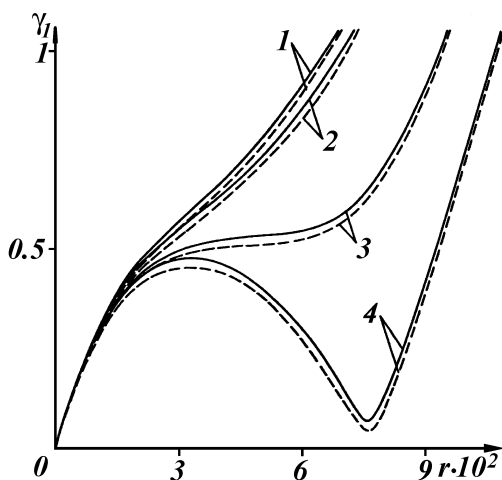


Рис. 3.46

Если фиксировано a , то большему Q_1 соответствует большее α_2 . Величина же α_1 убывает с ростом Q_1 . Однако влияние Q_1 на α_1 уменьшается с увеличением u_0 и при u_0 , близких к u_1 , практически не сказывается.

Зависимость $r(Q_1)$, характеризующая распределение α_1 и α_2 по величине сжимающего усилия, показано на рис. 3.47, б. Здесь $r(Q_1)$ дана для $Q_1 < Q^*$. Сплошные и штриховые линии отвечают тем же вертикальным градиентам скорости, что и на рис. 3.47, а, номера кривых 1, 2, 3 соответствуют значениям u_0 , равным 10, 15, 21 м/с. Из рис. 3.47, б следует, что меньшему u_0 отвечает большее сжимающее усилие $Q = Q_2$, начиная с которого давления (3.22) в условиях продольного сжатия генерируют незатухающие с расстоянием волны. Действительно, для $a = 0.05 \text{ с}^{-1}$ незатухающие волны генерируются при Q_1 , больших 210 и 10 м^2 , если u_0 равно 10 и 15 м/с соответственно. В случае $u_0 = 21 \text{ м/с}$ и $a = 0.05 \text{ с}^{-1}$ незатухающие волны генерируются как при отсутствии сжимающего усилия, так и в условиях продольного сжатия ($Q_1 > 0$) или растяжения ($Q_1 < 0$). Увеличение вертикального градиента скорости течения смещает величину Q_2 в сторону меньших значений. Если, например, для $u_0 = 15 \text{ м/с}$ волны генерируются в случае $a = 0.05 \text{ с}^{-1}$ только при $Q > 9.8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$, то при отсутствии потока или потока с постоянной по глубине скоростью $u_0 = 15 \text{ м/с}$ они возникают и при $Q = 0$ (сжимающие усилия отсутствуют) и в условиях продольного сжатия ($0 < Q_1 < Q^*$) или растяжения с усилием $0 < Q < 1.96 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$. Величина растягивающего усилия, необходимая для генерации незатухающих волн давлениями (3.22), растет с увеличением u_0 и убывает с ростом вертикального градиента скорости течения.

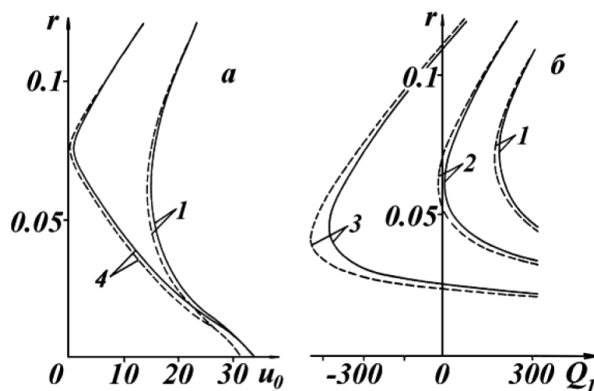


Рис. 3.47

Скорость V_2 переднего фронта упругих волн практически не зависит от вертикального профиля течения. Она определяется упругими силами ледяного покрова и сжимающим усилием. Что касается фронтальной скорости V_1 гравитационных волн, то она может меняться и под воздействием сил продольного сжатия и вертикального сдвига скорости течения. При $u_0 = u_2$ выполняется равенство $V_1 = V_2 = 0$. Скорость V_1 обращается в нуль и при $u_0 = u_1$. В диапазоне $u_2 < u < u_1$ фронтальная скорость V_1 имеет максимум, а $V_2 > V_1$. Скорость же V_2 упругих волн, возникающих при $u_0 > u_2$, неограниченно растет с увеличением u_0 . Это показано на рис. 3.48, где участки кривых в нижней полуплоскости, взятые по модулю характеризуют V_2 , а в верхней полуплоскости – V_1 . Значения u_2 помечены на оси u_0 кружками, а значения u_1 на оси u_0 – треугольниками. Другие обозначения здесь те же, что и на рис. 3.46.

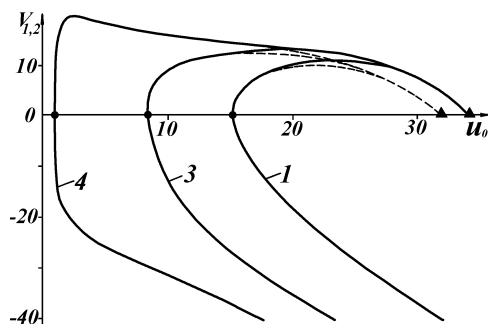


Рис. 3.48

Распределение амплитуд A_1 гравитационных (сплошные линии) и A_2 упругих (штриховые линии) волн по u_0 и r показано с точностью до множителя $\sqrt{2\pi p_0}$ для $a = 0.05 \text{ с}^{-1}$, $Q_1 = 346 \text{ м}^2$ на рис. 3.49. Сопоставление A_1 и A_2 дает наглядное представление о вкладе упругих волн в волновое движение. Видно также, что и A_1 и A_2 – осциллирующие функции u_0 и r . Причем и для A_1 и для A_2 скорость $u_0 = u_2$ (кружок на оси u_0) является резонансной. Неограниченно растет A_1 и при стремлении u_0 к u_1 . Резонансной скорости $u_0 = u_2$ на рис. 3.49, а отвечает на рис. 3.49, б значение $r = r_1$ (квадрат на оси r), к которому стремятся волновые числа α_1 и α_2 . Если $u_0 \rightarrow u_1$, то $\alpha_1 \rightarrow 0$. Отметим, что изменения r_1 , обусловленные вертикальным сдвигом скорости, не превышают 3%, в то время как увеличение сжимающего усилия приводит к его существенному росту. В частности, для $a = 0.05$ усилиям сжатия $0, 4.9 \cdot 10^5, 2.45 \cdot 10^6, 3.39 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ отвечают $r \cdot 10^2$, равные 5.9, 6.1, 7.1, 7.5 м.

Напомним, что u_2 при этом равно 15, 14.2, 8.5, 0.9 м/с, т.е. влияние Q_1 более существенно сказывается на u_2 , чем на r_1 . Если $a = 0$, то при указанных усилиях u_2 принимает значения 14.8, 13.8, 8.2, 0.54 м/с.

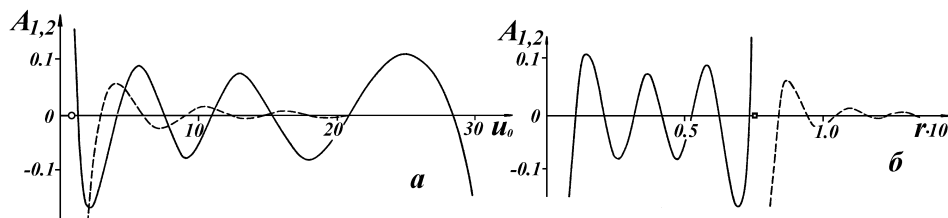


Рис. 3.49

Вклад гравитационных и упругих волн в волновое движение характеризуется и рис. 3.50, где $B_{1,2}(u_0)$ и $B_{1,2}(r)$ представляют собою функции, определяющие максимально возможные значения амплитуд $A_{1,2}(u_0)$ и $A_{1,2}(r)$. На графиках B_2 нанесены сплошными, а B_1 – штриховыми, если $a = 0.05 \text{ с}^{-1}$, и штрихпунктирными при $a = 0$ линиями. Треугольником, квадратами и кружками помечены соответствующие значения u_1 , r_1 , u_2 для потока без сдвига скорости ($a = 0$). Номера кривых 1, 4 отвечают сжимающим усилиям 0 и $3.39 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$.

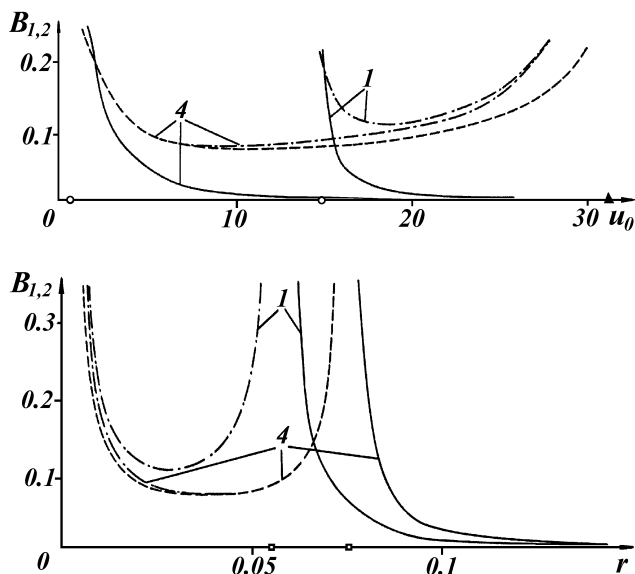


Рис. 3.50

Численный анализ зависимости $B_{1,2}$ от a показал, что для упругих волн она практически не проявляется. Исключение составляет окрест-

ность резонансных значений, меняющихся, хотя и незначительно, с изменением a . Влияние вертикального сдвига скорости на величину B_1 (гравитационные волны) заметнее. Оно сказывается в уменьшении B_1 и растет с ростом u_0 (уменьшением r). Это видно из сопоставления штриховых и штрихпунктирных кривых с номером 4 на рис. 3.50.

Распределение $B_{1,2}$ по Q_1 иллюстрируется рис. 3.51 для потока с постоянной по глубине скоростью (штриховые линии) и потока с вертикальным градиентом $a = 0.05 \text{ с}^{-1}$ (сплошные линии). Номера кривых 1, 2, 3 отвечают тем же u_0 , что и на рис. 3.47, б. Видно, что возможность существования резонансных величин сжимающего (или растягивающего) усилия определяется значением u_0 и вертикальным сдвигом скорости течения. С увеличением сжимающего усилия (начиная с резонансной) до критической величины, приводящей к потере устойчивости пластины, значения $B_{1,2}$ убывают. В случае же продольного растяжения большому усилию (до резонансного) отвечает большая амплитуда незатухающих с расстоянием упругих и гравитационных волн.

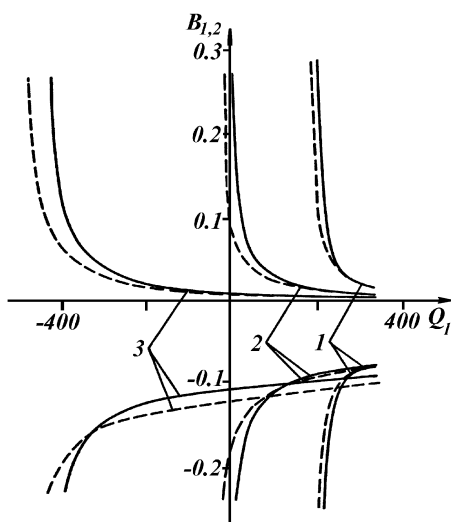


Рис. 3.51

ГЛАВА 4. ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ОБЛАСТИ ПОСТОЯННЫХ ДАВЛЕНИЙ

4.1. Изгибно-гравитационные колебания ледяного покрова

Пусть на поверхности несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает тонкая изотропная упругая ледяная пластина. В горизонтальных направлениях пластина и жидкость не ограничены. По поверхности пластины перемещается со скоростью v нагрузка

$$p = p_0 f(x_1, y), \quad x_1 = x + vt. \quad (4.1)$$

Рассмотрим влияние равномерного растяжения на возникающие изгибно-гравитационные корабельные волны, считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластины ζ малыми.

С учетом равномерного растяжения в системе координат $x_1 y$, связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости ϕ

$$\Delta \phi = 0, \quad -H \leq z \leq 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty \quad (4.2)$$

с граничными условиями

$$D_1 \nabla^4 \zeta - Q_1 \Delta_1 \zeta + \chi_1 v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -p_1 f(x, y), \quad z=0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z=-H, \quad (4.3)$$

где

$$D_1 = D/\rho g, \quad Q_1 = Q/\rho g, \quad \chi_1 = \rho_1 h/\rho g, \quad D = Eh^3/[12(1-\mu^2)], \quad p_1 = p_0/\rho g, \\ \nabla^4 = \Delta_l^2, \quad \Delta_l = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad \Delta = \Delta_l + \partial^2/\partial z^2,$$

ρ – плотность жидкости; E , h , ρ_1 μ – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки; Q – растягивающее усилие; ζ и ϕ связаны кинематическим условием $\phi_z = v\zeta_x$ при $z = 0$. При этом здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

Применив для решения задачи (4.2), (4.3) преобразование Фурье по горизонтальным координатам, получим в случае осесимметричной нагрузки интегральное представление для прогиба пластинки (возвышения поверхности пластинка-жидкость):

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{r}{\tau} f^*(r) M(r) J(r, R, \gamma) dr \right\}, \quad (4.4)$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{k_0} \exp[irR \cos(\theta - \gamma)] d\theta, \quad (4.5)$$

где $M(r) = rg(1 + \chi_1 r g t h r H)^{-1} t h r H$, $k_0 = r v \cos \theta - \tau$, $\tau = [1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4] M(r)]^{1/2}$, $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $x = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$,

$f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Рассмотрим три диапазона изменения скорости перемещения области возмущений:

$$0 < v < v_0, \quad v_0 < v < \sqrt{gH}, \quad v > \sqrt{gH}.$$

Подынтегральное выражение в (4.4) при $0 < v < v_0$ не имеет особенностей на пути интегрирования, а при условиях $v_0 < v < \sqrt{gH}$, $r_1 \leq r \leq r_2$ или $v > \sqrt{gH}$, $0 < r < r_2$ имеет полюсы $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$. Здесь $\tau_0 = (rv)^{-1}\tau$, $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau'_0(r) = 0$, штрих означает производную по r , $r_{1,2}$ – вещественные корни уравнения $\tau_0(r) = 1$. При этом $\tau'_0 < 0$ для $0 < r < r_0$ и $\tau'_0 > 0$ для $r_0 < r < \infty$. Кроме того, $\tau_0(0) = \sqrt{gH}/v$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \tau_0 = \infty$, $\tau'_0(0) = \tau'_0(r_0) = 0$. В случае $rH \gg 1$

$$v_0 = \sqrt{g/r_0} [1 + Q_1 r_0^2 + D_1 r_0^4] / (1 + \chi_1 r_0 g)^{1/2}, \quad (4.6)$$

где r_0 – положительный корень уравнения

$$2\chi_1 g D_1 r^5 + 3D_1 r^4 + Q_1 r^2 - 2\chi_1 r g - 1 = 0.$$

Если $rH \ll 1$, то

$$v_0 = \sqrt{gH} [1 + Q_1 r_0^2 + D_1 r_0^4] / (1 + \chi_1 g H r_0^2)^{1/2}, \quad (4.7)$$

а r_0 удовлетворяет уравнению

$$\chi_1 g H D_1 r^4 + 2D_1 r^2 + Q_1 - \chi_1 g H = 0.$$

Удовлетворяя условию изучения [5], заменим путь интегрирования в (4.5) на контур L , идущий по действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ с обходом точек $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ в комплексной плоскости θ по малым полуокружностям снизу и сверху соответственно.

Если $0 < v < v_0$, то, применяя к (4.5) метод стационарной фазы и интегрируя после этого (4.4) по частям, получим, что ζ имеет для больших R порядок не ниже $O(R^{-1})$.

Пусть $v_0 < v < \sqrt{gH}$. Представим в этом случае интеграл (4.4) в виде суммы трех интегралов по отрезкам $[0, r_1]$, $[r_1, r_2]$, $[r_2, \infty]$. Так как подынтегральное выражение в (4.5) на отрезках $[0, r_1]$, $[r_2, \infty]$ не имеет особенностей, то последовательное применение метода стационарной фазы и интегрирование по частям показывают, что двойные интегралы, соответствующие первому и третьему отрезкам, имеют порядок $O(R^{-1})$. Следовательно,

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left\{ \int_{r_1}^{r_2} r \tau^{-1} f^*(r) M(r) J dr \right\} + O(R^{-1}), \quad (4.8)$$

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_L k_0^{-1} \exp[irR \cos(\theta - \gamma)] d\theta. \quad (4.9)$$

Вычисляя контурный интеграл (4.9) с учетом знаков выражения $\text{Re}[i\cos(\theta-\gamma)]$ на малых полуокружностях, обходящих точки $\theta = \theta_{1,2}$ и подставляя в (4.8) полученное выражение для J , найдем

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \text{Re} \sum_{j=1}^5 \eta_j + O(R^{-1}), \quad (4.10)$$

$$\eta_1 = \int_{r_1}^{r_2} B_1 e^{iR\Phi_1} dr, \quad 0 \leq \gamma \leq \bar{\gamma}, \quad \eta_2 = \int_{r_1}^{n_1} B_1 e^{iR\Phi_1} dr, \quad \bar{\gamma} < \gamma \leq \pi,$$

$$\eta_3 = \int_{n_2}^{r_2} B_1 e^{iR\Phi_1} dr, \quad \bar{\gamma} < \gamma \leq \pi, \quad \eta_4 = \int_{n_3}^{n_4} B_2 e^{iR\Phi_2} dr, \quad 0 \leq \lambda \leq \pi - \bar{\gamma},$$

$$\eta_5 = R^{-1/2} \int_{r_1}^{r_2} B_3 \cos(rR - \pi/4) dr, \quad r_1 < n_1 < n_2 < r_2,$$

$$B_{1,2} = irf^*(r)M(r)\tau^{-1}(\nu r \sqrt{1-\tau_0^2})^{-1}, \quad \bar{\gamma} = \pi - \arctg \max \tau_1(r),$$

$$B_3 = grf^*(r)M(r)\tau^{-1}, \quad \Phi_{1,2} = r(\tau_0 \cos \gamma \mp \sqrt{1-\tau_0^2} \sin \gamma),$$

$$q = 2[\sqrt{2\pi r}(\nu^2 r^2 \cos^2 \gamma - \tau^2)]^{-1}, \quad \tau_1 = \tau_0^{-1}(1-\tau_0^2)^{1/2},$$

где $n_{1,2}$ – вещественные корни уравнения $\tau_1 = -\text{tg} \gamma$, а $n_{3,4}$ – вещественные корни уравнения $\tau_1 = \text{tg} \gamma$.

Фазовые функции Φ_1 и Φ_2 интегралов η_2 и η_4 не имеют стационарных точек, а $\eta_5 = O(R^{-1})$. Следовательно, $\eta_2 + \eta_4 + \eta_5 = O(R^{-1})$.

Стационарные точки фазовой функции Φ_1 в интегралах η_1, η_3 являются корнями уравнения

$$\text{tg} \gamma = \tau_2(r), \quad \tau_2 = (r\tau_0)'(1-\tau_0^2)^{1/2}[1-\tau_0(r\tau_0)']^{-1}. \quad (4.11)$$

Это уравнение при $\nu_0 < \nu < \nu_1$ имеет в рассматриваемых диапазонах изменения r один зависящий от γ действительный корень $r = \alpha_3$. Здесь

$$\nu_1 = \tau_3(r_3), \quad \tau_3 = \left[\tau_{01}^2 - \frac{(\tau_{01}')^2 r (\tau_{01} + r\tau_{01}')}{(r\tau_{01})''} \right]^{1/2},$$

r_3 – действительный корень уравнения $\tau_2''(r) = 0$, $r_3 < r_0$, $\tau_{01} = \tau/r$.

Один корень имеет уравнение (4.11) и при $\nu_1 < \nu < \sqrt{gH}$, если $0 < \gamma < \gamma_2$ или $\gamma_1 < \gamma < \pi$. Обозначим его через α_1 в первом случае и через α_3 во втором. Если же $\nu_1 < \nu < \sqrt{gH}$, а $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$, то имеется три корня $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. При этом

$$\gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = \arctg \tau_2(\alpha_5), \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3,$$

$\alpha_{4,5}$ – действительные корни уравнения $\tau_2'(r) = 0$. Отметим, что $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2$ при $\gamma = \gamma_1$ и $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_3$ при $\gamma = \gamma_2$.

На основании проведенного анализа расположения стационарных точек фазовых функций интегралов η_1, η_3 получим из (4.10)

$$\zeta = \zeta_3 + O(R^{-1}) \quad \text{при } 0 < |\gamma| < \pi,$$

если $v_0 < v < v_1$. Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_1 + O(R^{-1}) & \text{при } 0 < |\gamma| < \gamma_2, \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_1 < |\gamma| < \pi. \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{Здесь } \zeta_k = R^{-1/2} \psi(\alpha_k) \cos \left[R \Phi_1(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \frac{\pi}{4} \right],$$

$$\psi = -f_1(r)M(r) \cdot [v\tau\sqrt{1-v_0^2}]^{-1} (2\pi|\Phi_1'|)^{-1/2}, \quad f_1(r) = f^*(r)p_1.$$

Видно, что при скоростях $v_0 < v < v_1$ движущиеся возмущения генерируют только одну систему волн ζ_3 , затухающих с расстоянием как $1/\sqrt{R}$. Эти волны покрывают всю поверхность пластинки (границы пластинка-жидкость). Направление гребней этих волн на большом удалении от оси x определяется углом

$$\gamma_0 = \arctg[(v/v_0)^2 - 1]^{-1/2}.$$

Расстояние между соседними гребнями волн на лучах $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$ равно соответственно $\lambda_1 = 2\pi/r_1$, $\lambda_2 = 2\pi/r_2$. Расстояние от движущегося возмущения до гребня волны, бегущей за возмущением, равно $l_1 = \pi/4r_1$, а до гребня волны, бегущей впереди, $l_2 = 3\pi/4r_2$.

При скоростях $v_1 < v < \sqrt{gH}$, образуются три системы волн: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Из них система волн ζ_1 носит характер поперечных, а ζ_2 продольных гравитационных корабельных волн [139, 159, 160], деформированных за счет растягивающих усилий, упругих и массовых сил пластинки. Волны ζ_3 , образующиеся в этом случае в области $\gamma_2 < |\gamma| < \pi$, обусловлены, как и при $v_0 < v < v_1$, исключительно упругими силами пластинки, а направление их гребней также характеризуется углом γ_0 .

Пусть теперь $v > \sqrt{gH}$. В этом случае $r_1 = 0$, а уравнение $\tau'_2(r) = 0$ имеет только один действительный корень α_5 . Фазовая функция интегралов η_1, η_3 не имеет при $0 < \gamma < \gamma_2$ стационарных точек — действительных корней уравнения (4.11). При $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$, где $\gamma_3 = \arctg[v^2(gH)^{-1} - 1]^{-1/2}$, имеются две стационарные точки α_2, α_3 , а при $\gamma_3 < \gamma < \pi$ — только одна α_3 . Принимая это во внимание, из (4.10) найдем

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 < |\gamma| < \gamma_2, \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } \gamma_3 < |\gamma| < \pi, \end{cases}$$

где ζ_2 и ζ_3 те же, что и в (4.12).

Следовательно, возмущения, перемещающиеся со скоростью $v > \sqrt{gH}$, возбуждают две системы волн: ζ_2, ζ_3 . Волны ζ_3 образуются вне угла $\gamma < |\gamma_2|$. Внутри его за движущимся возмущением волны с амплитудой, затухающей как $1/\sqrt{R}$, вообще не возникают. Волны ζ_2 генерируются внутри угловых зон $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3$.

Волновое движение, генерируемое в случае равномерно сжатой пластинки при величине сжимающего усилия, удовлетворяющего условию

$$Q_1 < Q_0 = \tau_4(r_4),$$

$$\tau_4 = \frac{(1 + D_1 r^4) \tau_5(r) + 4 D_1 r^4 \tau_6(r)}{[\tau_5(r) + 2 \tau_6(r)] r^2},$$

$$\tau_5(r) = \text{th} r H + r H \text{ch}^{-2} r H, \quad \tau_6(r) = (1 + \chi_1 r g \text{th} r H) \text{th} r H, \quad \tau'_4(r_4) = 0,$$

описывается теми же формулами, что и при равномерном растяжении, если в них заменить Q_1 на $-Q_1$.

Для количественной оценки влияния равномерного растяжения и сжатия на возникающие волны проводились расчеты в случае ледяной пластины [64] толщиной 0.2, 0.5, 1 м при значениях параметров:

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3, \quad \mu = 0/34, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad H = 10^2 \text{ м.} \quad (4.13)$$

Величина растягивающего усилия изменялась в диапазоне $[0, 2\rho g \sqrt{D_1}]$, а сжимающего – в диапазоне $[0, \rho g Q_0]$. Здесь Q_0 при $h = 0.2, 0.5, 1$ м равно $1.479\sqrt{D_1}, 1.478\sqrt{D_1}, 1.476\sqrt{D_1}$ соответственно. Результаты расчетов представлены на рис. 4.1–4.6, где $Q_2 = Q_1/\sqrt{D_1}$. Отрицательные значения Q_2 характеризуют растяжение, а положительные – сжатие. Величина $Q_2 = 0$ отвечает случаю отсутствия сжимающих и растягивающих усилий. Зависимость v_0 и v_1 (м/с) от Q_2 иллюстрируется рис. 4.1. Сплошные (v_0) и штриховые (v_1) линии по порядку сверху вниз соответствуют толщине пластины 1, 0.5, 0.2 м. Видно, что значения критических скоростей v_0 и v_1 , в окрестности которых меняется характер волнового движения, растут с увеличением растягивающих и убывают с ростом сжимающих усилий. Причем эти изменения могут быть значительными. Например, при толщине пластины 1 м значения v_0 и v_1 равны соответственно 18.3, 26.2 м/с при $Q_2 = -1.476$; 14.6, 22.5 м/с при $Q_2 = 0$, 7.9, 11.0 м/с при $Q_2 = 1.476$.

Фазовые портреты образующихся волн изображены на рис. 4.2 – 4.4 для $h = 0.2$ м при скоростях перемещения возмущений, равных 10 (рис. 4.2), 20 (рис. 4.3), 35 м/с (рис. 4.4) из диапазонов $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$ соответственно.

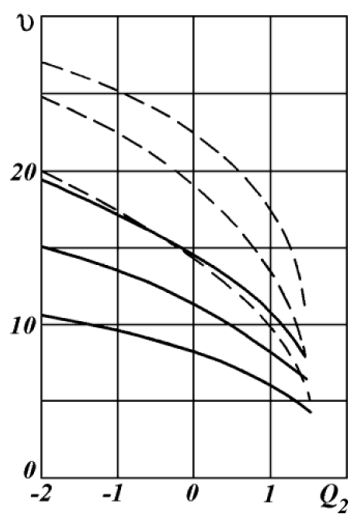


Рис. 4.1

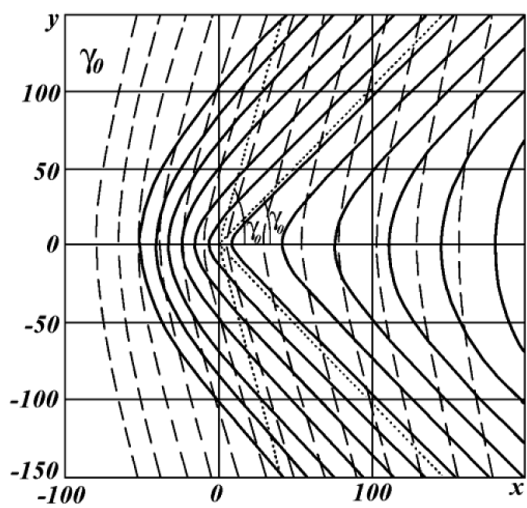


Рис. 4.2

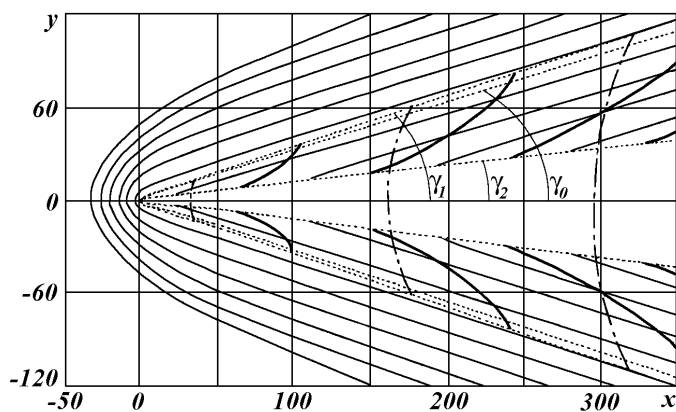


Рис. 4.3

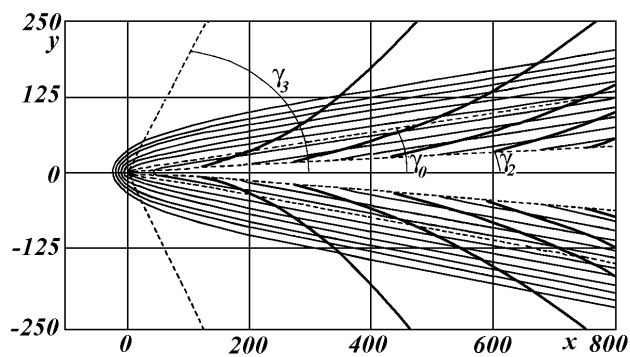


Рис. 4.4

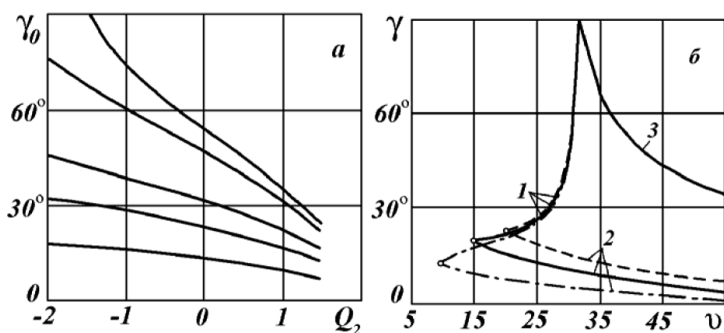


Рис. 4.5

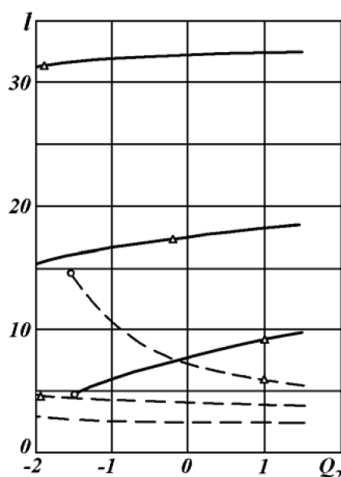


Рис. 4.6

Сплошные ($Q_2 = 0.5$) и штриховые ($Q_2 = -1$) кривые на рис. 4.2 представляют собой узловые линии волн ζ_3 . Узловым линиям волн ζ_3 , ζ_2 , ζ_1 в случае $Q_2 = 1$ отвечают тонкие сплошные, жирные сплошные и штрихпунктирные кривые на рис. 4.3, 4.4. Качественно такие же волновые картины образуются и при отсутствии сжимающих и растягивающих усилий ($Q_2 = 0$). Однако диапазоны изменения скорости v , при которых они имеют место, меняются с изменением Q . Меняются и величины угловых зон, где генерируются волны ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 . Влияние сжимающих и растягивающих усилий на величину угла γ_0 характеризуется зависимостями, представленными на рис. 4.5, а, а на величины углов γ_1 , γ_2 , γ_3 – на рис. 4.5, б. Кривые по порядку сверху вниз на рис. 4.5, а отвечают скоростям перемещения возмущений, равным 10, 11, 15, 20, 35 м/с. Штриховые ($Q_2 = -1.9$), сплошные ($Q_2 = 0$) и штрихпунктирные ($Q_2 = 1$) кривые 1–3 соответствуют на рис. 4.5, б углам γ_1 , γ_2 , γ_3 . Кружками помечены значения $\gamma_{1,2}$, отвечающие скорости v_1 . Отметим при этом, что $\gamma_1 = \gamma_3 = \pi/2$ при $v = \sqrt{gH}$, $\gamma_0 = \pi/2$ при $v = v_0$.

Из данных рисунков следует, что угол γ_0 при растяжении больший, чем при сжатии и при $Q_2 = 0$. Величина угла γ_3 практически не зависит от изменений Q_2 . Что касается углов γ_1 и γ_2 , то они растут с увеличением растягивающего усилия и убывают с ростом сжимающего. Следовательно, при $v > \sqrt{gH}$ большему сжимающему (растягивающему) усилию отвечает меньшая (большая) угловая зона за движущимися возмущениями, в которой амплитуда волн имеет порядок не ниже R^{-1} . Область $\gamma_3 < |\gamma| < \gamma_2$, где генерируются волны ζ_2 совместно с ζ_3 , уменьшается при увеличении растягивающего усилия и расширяется с увеличением усилия сжатия.

Если $v_0 < v < \sqrt{gH}$, то увеличение растягивающего (сжимающего) усилия приводит к расширению (сужению) области образования поперечных волн ζ_1 . При этом область $\gamma_1 < |\gamma| < \gamma_2$, в которой образуются поперечные ζ_1 , продольные ζ_2 и изгибные ζ_3 волны, уменьшается с ростом растягивающего усилия и увеличивается с ростом усилия сжатия.

С изменением Q_2 уменьшается и расстояние l вдоль оси x от области возмущений до первого гребня впереди бегущей волны ζ_3 и позади бегущей волны ζ_1 . При $h = 0.2$ м это иллюстрируется соответственно штриховыми и сплошными линиями на рис. 4.6. По порядку сверху вниз сплошные линии отвечают скоростям перемещения возмущений 20, 15, 10 м/с, а штриховые – скоростям 10, 20, 35 м/с. Значения l , помеченные треугольниками и кружками, характеризуют расстояния при величине Q_2 , отвечающей критическим скоростям v_1 и v_0 . Видно, что с увеличением сжимающего усилия расстояние от первого гребня волны ζ_1 до области возмущений растет, а с увеличением растягивающего усилия убывает. Расстояние от первого гребня волны ζ_3 до области возмущений имеет обратную зависимость от изменений Q .

4.2 Развитие колебаний плавающей упругой равномерно растянутой ледяной пластины

Пусть по поверхности пластины перемещается с постоянной скоростью v нагрузка (4.1). Рассмотрим влияние равномерного растяжения на неустановившиеся изгибно-гравитационные корабельные волны, считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб пластины ζ малыми. С учетом равномерного растяжения в системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа (4.2) для потенциала скорости ϕ с граничными

$$D_1 \nabla^4 \zeta - Q_1 \Delta_1 \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = -p_1 f(x, y), z=0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, z = -H$$

и начальными

$$\varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0 \quad (4.15)$$

условиями, где

$$F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

ζ и φ связаны кинематическим условием $\zeta_t = \varphi_z - v \zeta_x$ при $z = 0$. Все другие обозначения приведены в (4.3).

С помощью преобразования Фурье по x_1, y и Лапласа по t из (4.2), (4.14), (4.15) для ζ получим в осесимметричном случае интегральное представление

$$\zeta = -\frac{p_1}{4\pi^2} \operatorname{Im} \int_0^\infty \int_0^t \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} r \tau^{-1} M(r) f^*(r) e^{i\Phi(r, \theta, \xi)} d\theta d\xi dr, \quad (4.16)$$

$$\tau = [l(r)M(r)]^{1/2}, \quad l(r) = 1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4,$$

$$M(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \quad \Phi = rR \cos(\theta - \gamma) - \Delta_1 \xi,$$

$$\Delta_1 = vr \cos \theta - \tau, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad r = (m^2 + n^2)^{1/2},$$

$$x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta,$$

$f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$. Отсюда методом стационарной фазы для больших значений R и t найдем асимптотическое выражение

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 < v < v_0, \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_0 < v < v_1, \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_1 < v < \sqrt{gH}, \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v > \sqrt{gH}, \end{cases} \quad (4.17)$$

причем

$$\zeta_3 = \begin{cases} \eta_3, & 0 < |\gamma| < \pi, \quad R < u_3 t, \\ 0, & 0 < |\gamma| < \pi, \quad R > u_3 t \end{cases} \quad (4.18)$$

для $v_0 < v < v_1$. Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то

$$\zeta_1 = \begin{cases} \eta_1, & 0 < |\gamma| < \gamma_1, \quad R < u_1 t, \\ 0, & \gamma_1 < |\gamma| < \pi, \quad R > 0, \quad 0 < |\gamma| < \gamma_1, \quad R > u_1 t, \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_2, & \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, \quad R < u_2 t, \\ 0, & 0 < |\gamma| < \gamma_2, \quad \gamma_1 < |\gamma| < \pi, \quad R > 0; \quad \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1, \quad R > u_2 t, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\zeta_3 = \begin{cases} \eta_3, & \gamma_2 < |\gamma| < \pi, \quad R < u_3 t, \\ 0, & 0 < |\gamma| < \gamma_2, \quad R > 0; \quad \gamma_2 < |\gamma| < \pi, \quad R > u_3 t. \end{cases} \quad (4.21)$$

В случае $v > \sqrt{gH}$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \eta_2, & \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, \quad R < u_2 t, \\ 0, & 0 < |\gamma| < \gamma_2, \quad \gamma_3 < |\gamma| < \pi, \quad R > 0; \quad \gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3, \quad R > u_2 t, \end{cases} \quad (4.22)$$

а ζ_3 имеет такой же вид, что и для $v_1 < v < \sqrt{gH}$. Здесь

$$\eta_k = R^{-1/2} \Psi(\alpha_k) \cos[R\Phi_1(\alpha_k, \gamma) - (-1)^k \pi/4],$$

$$u_k = u(\alpha_k, \gamma), \quad u(r, \gamma) = v(1 - \tau_0^2)^{1/2} [\tau_0 \sin \gamma + (1 - \tau_0^2) \cos \gamma]^{-1},$$

$$\Psi(r) = -p_1 f^*(r) M(r) [v \tau (1 - \tau_0^2)^{1/2}]^{-1} (2\pi |\Phi_1''|)^{-1/2},$$

$$\Phi_1(r, \gamma) = r[\tau_0 \cos \gamma - (1 - \tau_0^2)^{1/2} \sin \gamma], \quad \gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4),$$

$$\gamma_2 = \arctg \tau_2(\alpha_5), \quad \gamma_3 = \arctg[v^2 (gH)^{-1} - 1]^{-1/2},$$

$$\tau_0 = \tau_{01}/v, \quad \tau_{01} = \tau/r, \quad \tau_2 = (r\tau_0)'(1 - \tau_0^2)^{1/2} [1 - \tau_0(r\tau_0)']^{-1},$$

$$v_0 = \tau(r_0)/r_0; \quad v_1 = \tau_3(r_3), \quad \tau_3 = [\tau_{01}^2 - r(\tau_{01}')^2 (\tau_{01} + r\tau_{01}')/(r\tau_{01})']^{1/2},$$

r_0 и r_3 – положительные корни уравнений $\tau_{01}'(r) = 0$ и $\tau_3'(r) = 0$ соответственно, α_k – положительные корни уравнения $\tg \gamma = \tau_2(r)$ при $k = 1, 2, 3$ и уравнения $\tau_2'(r) = 0$ при $k = 4, 5$; штрих означает производную по r .

Число корней уравнений $\tg \gamma = \tau_2$ и $\tau_2'(r) = 0$ зависит от скорости перемещения давлений. Распределение корней по γ и v качественно такое же, как и при отсутствии растягивающих усилий. Для $v_0 < v < v_1$ уравнение $\tg \gamma = \tau_2$ имеет только один корень α_3 , а $\tau_2'(r) > 0$. Один корень имеет это уравнение и при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, если $0 < \gamma < \gamma_2$ или $\gamma_1 < \gamma < \pi$. Ими являются α_1 и α_3 соответственно, а $\tau_2'(r) = 0$ в двух точках α_4 и α_5 . В случае $v_1 < v < \sqrt{gH}$ и $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$ рассматриваемое уравнение имеет три корня $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Если же $v > \sqrt{gH}$, то $\tg \gamma = \tau_2$ при $\gamma_2 < \gamma < \pi$ в одной (α_3), а при $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ в двух (α_2, α_3) точках. Для $0 < \gamma < \gamma_2$ это уравнение не имеет действительных корней. Уравнение $\tau_2'(r) = 0$ при скоростях $v > \sqrt{gH}$ имеет только один действительный корень α_5 . Отметим, что $r_1 < \alpha_1 < \alpha_4 < \alpha_2 < \alpha_5 < \alpha_3 < r_2$, где $r_{1,2}$ – положительные корни уравнения $\tau_{01} = v$. Кроме того, $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_2$ при $\gamma = \gamma_1$, $\alpha_2 = \alpha_5 = \alpha_3$ при $\gamma = \gamma_2$.

Из формул (4.17) – (4.22) следует, что колебания ледяной пластинки и волновое движение жидкости под ней формируются одной ζ_3 , если $v_0 < v < v_1$, двумя ζ_2, ζ_3 при $v > \sqrt{gH}$ или тремя $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ для

$v_1 < v < \sqrt{gH}$ системами волн. Их амплитуды затухают с расстоянием R как $1/\sqrt{R}$.

Волны ζ_3 изгибные, обусловленные упругими силами пластинки. Они распространяются впереди давлений и участвуют в формировании волнового следа за ними. Гребни волн ζ_3 на большом удалении от оси x направлены под углом $\gamma_0 = \arctg[(v/v_0)^2 - 1]^{-1/2}$. Поперечные ζ_1 и продольные ζ_2 гравитационные корабельные волны образуются в волновом следе за давлениями. Волны ζ_1 , возникающие при $v_1 < v < \sqrt{gH}$, сосредоточены внутри сектора с углом $|\gamma| < \gamma_1$, а волны ζ_2 внутри секторов, симметрично расположенных относительно оси перемещения давлений, с углами $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1$ для $v_1 < v < \sqrt{gH}$ и $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3$ для $v > \sqrt{gH}$. При фиксированных v , Q и заданных характеристиках пластины величины указанных углов не меняются с течением времени, а границы секторов, занятых каждой из волн, перемещаются в радиальном направлении со скоростями u_k . Эти границы характеризуют передние фронты соответствующих волн. При $v > \sqrt{gH}$ в волновом следе есть и зона $|\gamma| < \gamma_2$ в которой волны с амплитудами порядка $1/\sqrt{R}$ не образуются. Величина угла этой зоны для заданной скорости v определяется характеристиками пластины и величиной растягивающего усилия. Отметим, что при отсутствии пластины такой зоны в волновом следе нет, так как при этом $\gamma_2 = 0$.

Для оценки влияния равномерного растяжения на скорости перемещения передних фронтов образующихся волн проводились [68] численные расчеты при значениях (4.13). Результаты расчетов при $h = 0.2$ м изображены на рис. 4.7 – 4.9. Так как волновая картина симметрична относительно оси x , то узловые линии волн и границы их передних фронтов представлены только для $y > 0$.

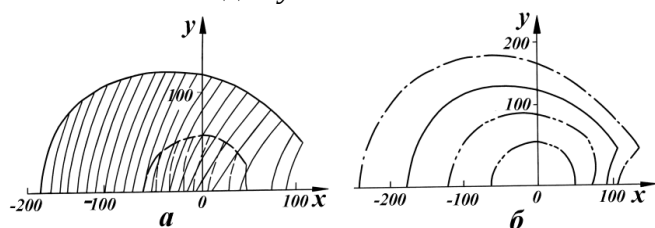


Рис. 4.7

На рис. 4.7, а, 4.8, а, 4.9, а приведены фазовые портреты при значениях скорости 10, 25, 35 м/с из соответствующих интервалов (v_0, v_1) , $(v_1, \sqrt{gH})$, $(\sqrt{gH}, \infty)$. Сплошные кривые на рис. 4.7, а отвечают $Q_1 = 0$, а штриховые – $Q_1 = \sqrt{D_1}$. Из них тонкие характеризуют узловые линии, а жирные – границы передних фронтов волн ζ_3 при $t = 20$ с. Сплошные

тонкие линии отвечают волнам ζ_3 и на рис. 4.8, а, 4.9, а, причем рис. 4.8, а иллюстрирует фазовые портреты при $Q_1 = 0.5\sqrt{D_1}$, $t = 40$ с, а рис. 4.9, а – при $Q_1 = 1.9\sqrt{D_1}$, $t = 20$ с. Узловые линии волн ζ_1 и ζ_2 представлены соответственно пунктирными и штрихпунктирными кривыми. Участки ab и da сплошных жирных кривых на рис. 4.8, а, 4.9, а характеризуют границы передних фронтов волн ζ_2 и ζ_1 , а дуги bc – часть границы фронта волн ζ_3 .

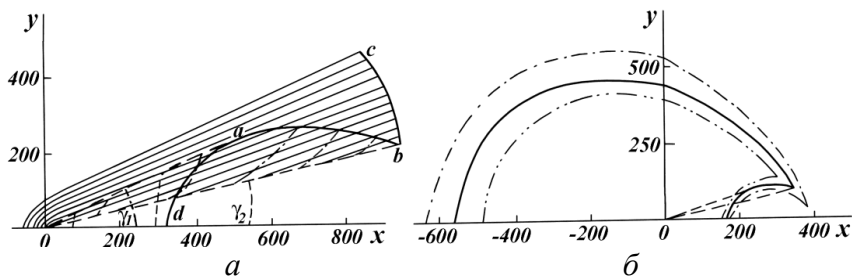


Рис. 4.8

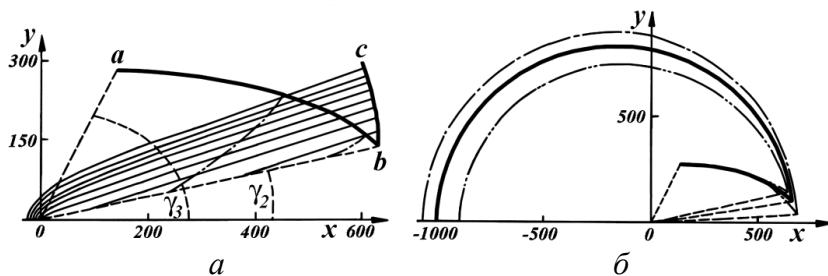


Рис. 4.9

Внешние границы фазовых картин, характеризующие линии передних фронтов при $t = 20$ с, представлены на рис. 4.7, б, 4.8, б, 4.9, б для значений v , равных 10, 20, 35 м/с. Сплошные кривые отвечают случаю $Q_1 = 0$.

Штриховые с двумя точками линии на рис. 4.7, б ниже от сплошной соответствуют значениям $Q_1 = 0.5\sqrt{D_1}$, $Q_1 = \sqrt{D_1}$ в порядке возрастания, а на рис. 4.8, б и 4.9, б – значениям $Q_1 = \sqrt{D_1}$ и $Q_1 = 1.9\sqrt{D_1}$. Штриховые линии на рис. 4.8, б образуют с осью x углы γ_1 и γ_2 ($\gamma_1 > \gamma_2$) и угол γ_2 на рис. 4.9, б, причем γ_1 и γ_2 на рис. 4.8, б обозначены только для $Q_1 = 0$. Пунктирная линия на рис. 4.9, б характеризует угол γ_3 .

Из данных рисунков следует, что увеличение растягивающего усилия приводит к уменьшению фронтальных скоростей u_3 , u_1 волн ζ_3 , ζ_1 . Скорость u_2 переднего фронта волн ζ_2 при этом растет. Величина угла ζ_3 практически не зависит от Q . Углы γ_0 , γ_1 , γ_2 растут с увеличением растягивающего усилия. Кроме того, численный анализ показал, что при равномерном растяжении значения критических скоростей перемещения v_0

и v_1 , в окрестности которых меняется характер волнового движения, также растут с увеличением Q .

В случае равномерного сжатия при $Q_1 < Q_0$, где Q_0 определяется выражением приведенном на странице 117 раздела 4.1, волновое движение имеет качественно такой же характер, как и в случае равномерного растяжения. Оно описывается формулами (4.17)–(4.22) при

$$l = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4.$$

С увеличением сжимающего усилия углы $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ и скорости v_0, v_1, v_2 убывают, а скорости u_1, u_3 растут. Граница переднего фронта волнового движения в условиях равномерного сжатия иллюстрируется штрихпунктирными линиями на рис. 4.8, б, 4.9, б для $Q_1 = \sqrt{D_1}$.

4.3 Развитие изгибно-гравитационных волн в условиях равномерного ледового сжатия

Пусть теперь начиная с момента времени $t = 0$ нагрузка (4.1) перемещается по поверхности равномерно сжатого упругого ледяного покрова.

Исследуем влияние равномерного сжатия на развитие трехмерных волн, считая движение жидкости потенциальным, а скорости движения частиц жидкости и прогиб льда ζ малыми.

В системе координат x, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа (4.2) для потенциала скорости ϕ со следующими граничными и начальными условиями

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_l \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} = -p_1 f(x, y), \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -H; \quad \phi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0; \quad \zeta_t = \phi_z - v \zeta_x, \quad z = 0.$$

Здесь Q – сжимающее усилие, а все другие обозначения такие же, как и в (4.14).

Применив для решения задачи комплексное преобразование Фурье по горизонтальным координатам x, y и преобразование Лапласа по t , в случае осесимметричного распределения давлений получим для возвышения поверхности лед-вода (прогиба льда) выражение (4.16) с той разницей, что в рассматриваемом случае $l(r) = 1 - Q_1 r^2 + D_1 r^4$.

Найдем асимптотическое выражение ζ для больших значений R и t при условии $Q_1 < 2\sqrt{D_1}$, необходимом для устойчивости пластинки.

Пусть $0 < Q_1 < Q_0 = \tau_4(r_4)$. Применив к (4.16) метод стационарной фазы последовательно по θ и ξ , получим

$$\zeta = -\frac{p_1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{s=1}^4 I_s + O(R^{-1}), \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{r_1}^{r_2} N_1 dr, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad \cos \gamma < v; \quad I_2 = \int_{n_2}^{r_2} N_1 dr, \quad \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi, \\ I_3 &= \int_{r_1}^{r_2} N_2 dr, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < 0, \quad \cos \gamma < v; \quad I_4 = \int_{n_4}^{r_2} N_2 dr, \quad -\pi < \gamma < -\frac{\pi}{2}, \\ N_{1,2} &= B_1 \exp(iR\Phi_{1,2}), \quad \Phi_{1,2} = (\tau_0 \cos \gamma \mp \tau^* \sin \gamma)r, \quad \tau^* = \sqrt{1 - \tau_0^2}, \\ B_1 &= \frac{M(r)f^*(r)}{\tau\tau^*}, \quad v = \frac{vt}{R}, \quad \tau_0 = \frac{\tau}{vr}, \quad n_2 > n_1, \quad n_4 > n_3. \end{aligned}$$

Здесь r_1, r_2 – положительные корни уравнения $\tau = vr$, а n_2, n_1 и n_3, n_4 – положительные корни уравнений $\operatorname{tg} \gamma = -\tau_1(r)$ и $\operatorname{tg} \gamma = \tau_1(r)$ соответственно, где $\tau_1 = \tau^*/\tau_0$. При этом принадлежность стационарных точек области интегрирования характеризуется условием

$$0 \leq \xi_0 \leq t, \quad \xi_0 = \left(\frac{\tau_0}{\tau^*} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \frac{R}{v}.$$

Стационарными точками фазовых функций Φ_k ($k = 1, 2$) в интегралах $I_{1,2}$ ($k = 1$), $I_{3,4}$ ($k = 2$) являются корни уравнений

$$\operatorname{tg} \gamma = (-1)^{k+1} \tau_2(r), \quad \tau_2(r) = \frac{\tau' \tau^*}{v - \tau_0 \tau'}. \quad (4.24)$$

Анализ показал, что поведение функции $\tau_2(r)$ качественно такое же, как и при отсутствии сжимающего усилия [89]. Асимптотическое выражение для ζ в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta &= O(R^{-1}) \quad (0 < v < v_0), \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) \quad (v_1 < v < \sqrt{gH}), \\ \zeta &= \zeta_3 + O(R^{-1}) \quad (v_0 < v < v_1), \quad \zeta = \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) \quad (v > \sqrt{gH}), \quad (4.25) \\ v_0 &= \frac{\tau(r_0)}{r_0}, \quad v_1 = \tau_3(r_3), \quad \tau_3 = \sqrt{\left(\frac{\tau}{r} \right)^2 - \frac{\tau'(r\tau' - r)^2}{r\tau''}}, \end{aligned}$$

где r_0 и r_3 – действительные корни уравнений $r\tau' - \tau = 0$ и $r_3'(r) = 0$, соответственно, $0 < r_3 < r_0$. При этом $\zeta_3 = \eta_{31}$ в области $(0 < |\gamma| < \pi, R < u_3 t$

для $v_0 < v < v_1$. В случае $v_1 < v < \sqrt{gH}$ $\zeta_1 = \eta_{11}$ ($0 < |\gamma| < \gamma_1$, $R < u_{1t}$), $\zeta_2 = \eta_{21}$ ($\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1$, $R < u_{2t}$), $\eta_3 = \eta_{31}$ ($\gamma_2 < |\gamma| < \pi$, $R < u_{3t}$).

Если $v > \sqrt{gH}$, то $\zeta_2 = \eta_{21}$ в областях $R < u_{2t}$ угловых зон $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3$, а $\zeta_3 = \eta_{31}$ при $\gamma_2 < |\gamma| < \pi$, $R < u_{3t}$. Здесь

$$\eta_{kj} = \frac{1}{\sqrt{R}} \psi_j(\alpha_k) \cos \left[R\Phi_j(\alpha_k \gamma) - (-1)^k \frac{\pi}{4} \right], \quad u_k = u(\alpha_k, \gamma),$$

$$\psi_j(r) = -\frac{p_1 f^*(r) M(r)}{v \tau \tau^* \sqrt{2\pi |\Phi_j''|}}, \quad u(r, \alpha) = \frac{v r^*}{\tau_0 \sin \gamma + \tau^* \cos \gamma}, \quad (4.26)$$

$$\gamma_1 = \arctg \tau_2(\alpha_4), \quad \gamma_2 = \arctg \tau_2(\alpha_3), \quad \gamma_3 = \arctg \sqrt{\frac{v^2}{gH}} - 1,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни уравнения (4.24) при $k = 1$, а α_4, α_5 – уравнения $\tau'_2(r) = 0$. Причем $\alpha_4 < \alpha_5$.

Пусть $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$. Тогда

$$\zeta = -\frac{p_1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{s=1}^6 I_s + O(R^{-1}),$$

$$I_5 = \int_{n_1}^{n_2} N_1 dr, \quad -\frac{\pi}{2} < \gamma < 0, \quad \cos \gamma < v; \quad I_6 = \int_{n_3}^{n_4} N_2 dr, \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2},$$

а I_s ($s = 1-4$) определяются из (4.23).

В интегралах I_s стационарными точками фазовых функций Φ_1 ($s = 1, 2, 5$) и Φ_2 ($s = 3, 4, 6$) являются корни уравнений (4.24) при $k = 1$ и 2 соответственно.

Если $v_0 < v < v_1$, то Φ_1 при $0 < \gamma < \pi$ имеет одну (α_3), а при $-\gamma_2 < \gamma < 0$ две (α_2, α_3) стационарные точки. Причем $\tau'_2(r) = 0$ только при $r = \alpha_5$. В этом случае v_0 определяется формулой (4.25), а $v_1 = \tau(r_5)/r_5$, $0 < r_5 < r_6$, где $r_{5,6}$ – действительные корни уравнения $\tau'(r) = 0$.

Если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, то $\tau'_2(\alpha_4) = \tau'_2(\alpha_5) = 0$, $\alpha_4 < \alpha_5$. Уравнение (4.24) при $k = 1$ имеет один (α_3), два (α_2, α_3) или три ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) корня соответственно при $\gamma_1 < \gamma < \pi$, $-\gamma_2 < \gamma < 0$ или $0 < \gamma < \gamma_1$.

Для $v > \sqrt{gH}$ стационарными точками Φ_1 будут: α_2, α_3 в случае $-\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ и α_3 в случае $\gamma_1 < \gamma < \pi$. Причем $\tau'_2(\alpha_5) = 0$. Аналогичным образом можно определить угловые зоны, в которых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ удовлетворяют уравнению (4.24) и при $k = 2$. Углы γ_1, γ_3 определяются формулами (4.26), а $\gamma_2 = -\arctg \tau_2(\alpha_5)$.

Таким образом, вычисляя I_s ($s = 1-6$) методом стационарной фазы, получим

$$\zeta = O(R^{-1}) \quad (O < v < v_0), \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) \quad (v_1 < v < \sqrt{gH}), \quad (4.27)$$

$$\zeta = \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) \quad (v_0 < v < v_1, \quad v > \sqrt{gH}).$$

Здесь $\zeta_k = 0$ для $R > u_{kt}$, а при $R < u_{kt}$

$$\zeta_2 = \eta_{2j} \quad (-\gamma_2 < \gamma < 0, \quad j=1; \quad 0 < \gamma < \gamma_2, \quad j=2), \quad (4.28)$$

$$\zeta_3 = \eta_{3j} \quad (-\gamma_2 < \gamma < \pi, \quad j=1; \quad -\pi < \gamma < \gamma_2, \quad j=2), \quad (4.29)$$

в случае $v_0 < v < v_1$. В случае $v_1 < v < \sqrt{gH}$ ζ_3 определяется по формуле (4.29), а

$$\zeta_1 = \eta_{1j} \quad (0 < \gamma < \gamma_1, \quad j=1; \quad -\gamma_1 < \gamma < 0, \quad j=2), \quad (4.30)$$

$$\zeta_2 = \eta_{2j} \quad (-\gamma_2 < \gamma < \gamma_1, \quad j=1; \quad -\gamma_1 < \gamma < \gamma_2, \quad j=2). \quad (4.31)$$

Если $v > \sqrt{gH}$, то

$$\zeta_2 = \eta_{2j} \quad (-\gamma_2 < \gamma < \gamma_3, \quad j=1; \quad -\gamma_3 < \gamma < \gamma_2, \quad j=2), \quad (4.32)$$

а ζ_3 имеет вид (4.29). Вне указанных угловых зон $\zeta_k = 0$.

Из формулы (4.25) видно, что при движении области давлений (4.1) колебания равномерно сжатого ледяного покрова и волновое движение жидкости под ним в случае $Q_1 < Q_0$ формируются одной (ζ_3) если $v_0 < v < v_1$, двумя (ζ_2, ζ_3) при $v > \sqrt{gH}$ или тремя ($\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$) для $v_1 < v < \sqrt{gH}$ системами волн. Их амплитуды затухают с расстоянием R как $1/\sqrt{R}$. Волны ζ_3 обусловлены упругими силами ледяной пластины. Гребни этих волн на большом удалении от оси x направлены под углом $\gamma_0 = \arctg[(v/v_0)^2 - 1]^{-1/2}$. Волны ζ_1 носят характер поперечных, а ζ_2 — продольных гравитационных корабельных волн, деформированных за счет сжимающего усилия, упругих и массовых сил ледяного покрова.

Фазовые портреты образующихся волн качественно такие же, как и при $Q = 0$. Границы областей, занятых волнами ζ_k , в соответствующих угловых зонах, перемещаются в радиальном направлении со скоростью u_k . Они характеризуют передние фронты волн ζ_k . При $v > \sqrt{gH}$ в волновом следе за давлениями есть и зона $|\gamma| < |\gamma_2|$ с амплитудами колебаний, имеющими порядок затухания не ниже $1/R$. Она уменьшается с увеличением сжимающего усилия, и при $Q_1 = Q_0$ весь волновой след покрывают волны, затухающие как $1/R$. При отсутствии льда такой зоны нет, так как при этом $\gamma_2 = 0$.

Проведенный численный анализ [66] показал, что углы $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ уменьшаются с увеличением сжимающего усилия. Следовательно, для $v > \sqrt{gH}$ угловые зоны $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ волнового следа, покрытые волнами ζ_2, ζ_3 , при этом расширяются по сравнению со случаем $Q = 0$. Для $v_1 < v < \sqrt{gH}$ увеличение Q приводит к расширению зон $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_1$ с волнами $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Значения критических скоростей v_0 и v_1 , в окрестностях которых меняется характер колебаний, убывает с ростом Q . Боль-

шему сжимающему усилию отвечают и большие скорости u_1 , и u_3 передних фронтов волн ζ_1 , ζ_3 . Фронтальная скорость u_2 волн ζ_2 убывает с ростом Q . Чем больше цилиндрическая жесткость ледяной пластины, тем больше и величина Q_0 .

При $Q_0 < Q < 2\sqrt{D_1}$ колебания ледяной пластины и жидкости формируются, как следует из формул (4.27) – (4.32), волнами ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , если $v_1 < v < \sqrt{gH}$, и волнами ζ_2 , ζ_3 , если $v_0 < v < v_1$ или $v > \sqrt{gH}$. Из них ζ_3 распространяются как перед областью давлений, так и за ней. Волны ζ_1 и ζ_2 вместе с ζ_3 формируют волновой след за областью. При этом в волновом следе левая и правая угловые зоны для ζ_1 симметрично расположены по разные стороны от линии перемещения области. Левая и правая угловые зоны волн ζ_3 , образующихся за областью, для $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$ так же, как и волн ζ_2 для $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$, заходят за эту линию, частично перекрывая друг друга.

На рис. 4.10 – 4.14 приведены фазовые портреты колебаний и их внешние границы, характеризующие линии передних фронтов образующихся волн. Они получены в случае $h = 0.2$ м и значений (4.13). При этом рис. 4.10, 4.13 даны для $v = 5$ м/с, рис. 4.11, 4.14 – для $v = 10$ м/с, а рис. 4.12 – для $v = 35$ м/с. Из них рис. 4.10, 4.11, 4.13, 4.14 отражают волновую картину через $t = 20$ с, а рис. 4.12 – через $t = 6$ с при $Q_1 = 1.9\sqrt{D_1}$. Значения скорости 5 и 35 м/с удовлетворяют условиям $v_0 < v < v_1$ и $v > \sqrt{gH}$ соответственно. Условию $v_1 < v < \sqrt{gH}$ удовлетворяет скорость 10 м/с, при которой $\gamma_1 < \gamma_2$. В случае $\gamma_1 > \gamma_2$ фазовая картина в качественном отношении такая же, как и при $\gamma_1 < \gamma_2$.

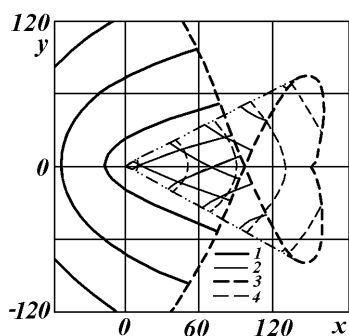


Рис. 4.10

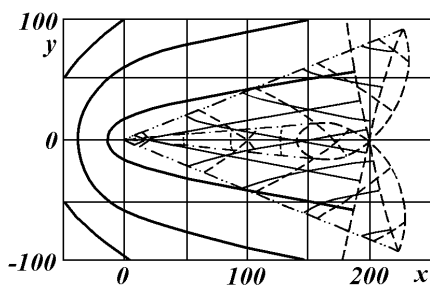


Рис. 4.11

Отметим, что $v_0 = 1.9$ м/с и $v_1 = 7.1$ м/с при рассматриваемых параметрах и $Q_1 = 1.9\sqrt{D_1}$. Увеличение Q приводит к уменьшению v_0 и росту v_1 .

На Рис. 4.10 – 4.12 прямые штрихпунктирные линии с одной, двумя и тремя точками ограничивают углы γ_1 , γ_2 , γ_3 соответственно. На рис. 4.10 кривые 1 отвечают узловым линиям волн ζ_3 , возбуждаемым

перед областью давлений; кривые 2 и 4 – узловым линиям волн ζ_3 и ζ_2 , распространяющимся только за давлениями в волновом следе; кривая 3 представляет передние фронты возникающих волн. Аналогичные обозначения приняты и на рис. 4.11, 4.12. Кроме того, на рис. 4.11 пунктирными кривыми иллюстрируются узловые линии волн ζ_1 . Причем для волн ζ_1 приведены все узловые линии, для волн ζ_2, ζ_3 (линия 2) они даны через одну, а для волн ζ_3 (линия 1) – через три.

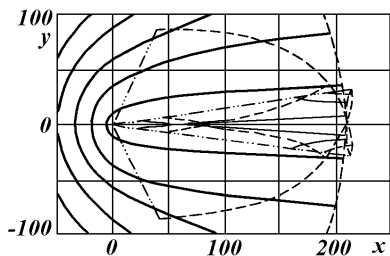


Рис. 4.12

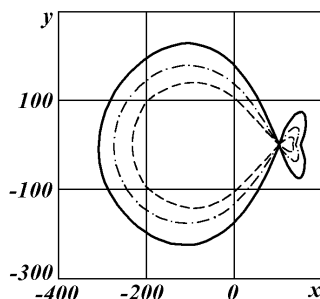


Рис. 4.13

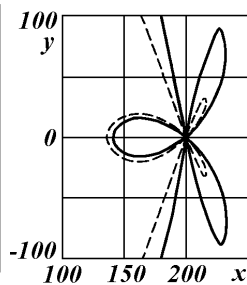


Рис. 4.14

Зависимость скоростей передних фронтов волн от величины сжимающего усилия для $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$ иллюстрируется рис. 4.13 и 4.14 соответственно. Здесь сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые изображают границы фронтов при $t = 20$ с для Q_1 , равного $1.9\sqrt{D_1}$, $1.8\sqrt{D_1}$, $1.7\sqrt{D_1}$. В случае $v > \sqrt{gH}$ очертания границ фронтов волн ζ_2, ζ_3 и их зависимость от изменений Q в качественном отношении такие же, как и при $v < \sqrt{gH}$.

Выполненный анализ показал, что вне угловых зон волнового следа фронтальная скорость u_3 волн ζ_3 растет с увеличением сжимающего усилия. С увеличением Q растет и фронтальная скорость u_1 волн ζ_1 , возникающих в случае $v_1 < v < \sqrt{gH}$. Аналогичная зависимость от Q характерна и для скорости u_2 волн ζ_2 , генерируемых при $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$. Для этих диапазонов изменения v большему Q отвечает и большая скорость удаления границы области волнового следа, где происходит наложение левых и правых угловых зон волн ζ_3 , возникающих за областью давлений. Скорость же перемещения в волновом следе границы области с волнами ζ_3 убывает с ростом Q . Данная граница является и внешней границей колебаний, формируемых в следе волнами ζ_2 совместно с ζ_3 . Скорость ее перемещения при увеличении Q уменьшается и в случае $v > \sqrt{gH}$. При этом в зоне $|\gamma| < \gamma_2$ скорость движения внешней границы, покрытой волнами ζ_3 убывает, а волнами ζ_2 – растет с увеличением сжимающего усилия.

4.4. Пространственная структура поля скорости горизонтальных волновых течений под ледяным покровом

Рассмотрим горизонтальные волновые течения, генерируемые в жидкости конечной глубины H движущейся по дрейфующему ледяному покрову нагрузкой постоянной интенсивности. Нагрузка вида (4.1) перемещается вдоль оси x со скоростью v . Лед дрейфует в направлении, составляющем с осью x угол α . Компоненты вектора скорости потока в системе координат, связанной с движущейся областью давлений, равны соответственно

$$U_x = U \cos \alpha; \quad U_y = U \sin \alpha, \quad (4.33)$$

где U – модуль вектора скорости потока.

Проведем анализ пространственного распределения амплитуд скоростей горизонтальных волновых течений, обусловленных генерируемыми в жидкости изгибно-гравитационными поверхностными волнами [49]. В предположении потенциальности движения жидкости задача о возмущениях малой амплитуды сводится к решению уравнения Лапласа (4.2) с граничными

$$(D_1 \nabla^4 + Q_1 \nabla^2 + \chi_1 F^2 + 1) \zeta + \frac{1}{g} F \varphi = -p_1 f(x - vt, y), \quad z = 0; \quad (4.34)$$

$$F \zeta = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad z = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = -H$$

и начальными (4.15) условиями.

Здесь

$$F = \frac{\partial}{\partial t} + (U_x - v) \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y},$$

а все другие обозначения такие же, как и в (4.3).

Применяя метод интегральных преобразований Фурье по пространственным координатам и преобразование Лапласа по времени при осесимметричном распределении давлений из (4.2, 4.34, 4.15) в полярных координатах для продольной u_1 и поперечной u_2 составляющих скорости волновых возмущений жидкости, получим выражения

$$u_k = -\frac{p_1 g}{4\pi} \int_0^\infty f_0(r) I_k(r, R, y) dr,$$

$$I_k = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \psi_k(\theta) \psi_0(r, \theta) \exp(i[rR \cos(\theta - \gamma)]) d\theta,$$

$$\begin{aligned}\psi_0(r, \theta) &= \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{\exp(-i\Delta_1 t)}{p_n \Delta_1} + \frac{\exp(-i\Delta_2 t)}{p_n \Delta_2}, \quad \psi_k(\theta) = (-1)^k U^* \cos\left(\frac{\pi}{k} - \theta\right), \\ f_0(r) &= f^*(r) r^2 c^{-1}, \quad \Delta_1 = rU^* - p_n, \quad \Delta_2 = rU^* + p_n, \\ m &= r \cos \theta, \quad x = R \cos \gamma, \quad U^* = (u_x - v) \cos \theta + U_y \sin \theta, \\ n &= r \sin \theta, \quad y = R \sin \gamma, \quad r^2 = m^2 + n^2, \quad p_n^2 = \lg \operatorname{th}(rH) \kappa^{-1}, \\ l &= D_1 r^4 - Q_1 r^2 + 1, \quad \kappa = 1 + \chi_1 r g \operatorname{th}(rH), \quad k = 1, 2,\end{aligned}\quad (4.35)$$

$f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Волновые возмущения потока U , направленного под углом α к оси x , вдоль которой со скоростью v перемещается нагрузка, аналогичны возмущениям, генерируемым при отсутствии потока областью, движущейся со скоростью $v = [(U \cos \alpha - v)^2 + (U \sin \alpha)^2]^{1/2}$ в направлении, составляющем с осью x угол $\beta = \arctan[(U \sin \alpha)/(U \cos \alpha - v)]$. Исходя из этого, осуществим поворот системы координат на угол β , обеспечивая тем самым симметричность волновой картины относительно новой оси абсцисс. Тогда составляющие скорости $u_{1,2}$ волновых возмущений жидкости характеризуются формулами (4.35) при $U^* = v_1 \cos \theta$.

Для установившихся колебаний после вычисления интегралов $I_{1,2}$ методом контурного интегрирования при $v > v_0$ найдем:

$$\begin{aligned}u_k &= (-1)^k iA \int_0^\infty \frac{r}{\kappa} f^*(r) \left[\frac{\tau_1}{(1 - \tau_1^2)^{1/2}} \right]^{2-k} \exp(iRr \cos(\tau_1 - \gamma)) dr, \\ A &= \frac{p_1 g}{v}, \quad \tau_1 = \frac{p_n}{rv},\end{aligned}\quad (4.36)$$

здесь v_0 – минимум фазовой скорости свободных изгибно-гравитационных волн. При $v < v_0$ движущаяся нагрузка не возбуждает волновые движения. Проведем асимптотический анализ выражений (4.36) методом стационарной фазы [111] в случае сосредоточенной нагрузки, которой, в частности, можно аппроксимировать воздействие на лед низко летящего самолета [169]. В результате получим:

$$\begin{aligned}u_k &= (-1)^{k+1} (k - 1 + (-1)^{k+1} \tau_1^2)^{1/2} AKM \sin[R\varphi(r_0) \pm \pi/4], \\ K &= \frac{H^2 r_0}{2\sqrt{\pi\kappa}}, \quad M = \left[\frac{r_0 \sqrt{1 - 2\tau_1 \tau_2 + \tau_2^2}}{R|\tau_2(\tau_2 - \tau_1)^2 + (1 - \tau_1^2)\tau_3|} \right]^{1/2}, \\ \tau_2 &= p'_n / v, \quad \tau_3 = r_0 p''_n / v, \quad \varphi(r_0) = r_0 [\tau_1 \cos \gamma - (1 - \tau_1^2) \sin \gamma],\end{aligned}\quad (4.37)$$

где r_0 – действительный корень уравнения $\varphi'(r) = 0$. Штрих означает производную по r .

Для количественной оценки скорости горизонтальных волновых течений, обусловленных возбуждаемыми в жидкости изгибно-гравитационными волнами, проводились численные расчеты по формулам (4.37). При этом скорость перемещения нагрузки выбиралась из интервалов, охватывающих возможные режимы генерации возмущений с различными волновыми структурами, формируемыми изгибными и гравитационными волнами типа корабельных. Погрешность полученных таким образом оценок скорости волновых течений даже в окрестности первого гребня изгибных волн не превышает 20%, причем с увеличением u она убывает [92].

При численных расчетах величины $E, \mu, \rho_1, h, \rho, H, p_1$ полагались равными $5 \cdot 10^9$ Н/м², 1/3, 917 кг/м³, 2.5 м, 1024 кг/м³, 350 м, $1.25 \cdot 10^{-3}$ м, что соответствует условиям посадки самолета весом 160 т на ледовый аэродром в районе McMurdo (Антарктика) [169, 190]. Расчеты выполнялись как с учетом, так и без учета силы ледового сжатия. Изолинии на рис. 4.15 иллюстрируют распределение скорости волновых течений (см/с) вблизи поверхности лед-вода при $u = 25$ м/с (рис. 4.15, а) и $u = 50$ м/с (рис. 4.15, б). Ввиду симметричности волновых картин относительно трассы перемещения нагрузки они приведены лишь для верхней полуплоскости. Так как при малых значениях u погрешность метода стационарных фаз даже в окрестности первого гребня гравитационных волн в следе за давлениями не превышает 10%, то на рис. 4.15, а даны изолинии и для изгибных (перед нагрузкой) и для изгибно-гравитационных (за нагрузкой) волн. В случае $u = 50$ м/с приведено поле скорости только изгибных волн вне зоны волнового следа (где, кроме них, генерируются продольные и поперечные гравитационные корабельные волны), так как в области трехволновых возмущений применение метода стационарных фаз может привести к существенным погрешностям. Пространственное распределение амплитуды скорости течений у границы лед-вода при $u = 30$ м/с показано на рис. 4.16. Из рис. 4.15, 4.16 видно, что величины скорости течений перед нагрузкой больше, чем на таком же расстоянии вдоль трассы за ней (рис. 4.15, а, 4.16). С удалением от трассы следования давлений величина u убывает, причем тем быстрее, чем больше скорость u (рис. 4.15, а). Ледовое сжатие увеличивает значение скорости, меняя при этом и кривизну ее изолиний. Они вытягиваются (рис. 4.17, а) вдоль трассы, что характеризует усиление интенсивности течений, обусловленных изгибными волнами за давлениями на параллельных трассе направлениях. Затухание течений с глубиной перед и за давлениями различное. Меняется оно и с удалением от курса следования нагрузки. Волновая картина на рис. 4.17, б построена для горизонта залегания $z = -50$ м и условий генерации, соответ-

ствующих рис. 4.15, *а*. Горизонтальные скорости гравитационных волн убывают с глубиной медленнее, чем скорости изгибных, наиболее быстрое затухание которых происходит непосредственно под трассой.

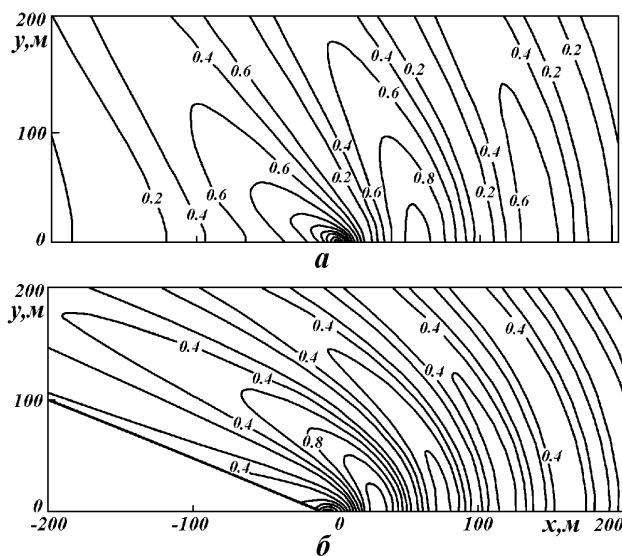


Рис. 4.15

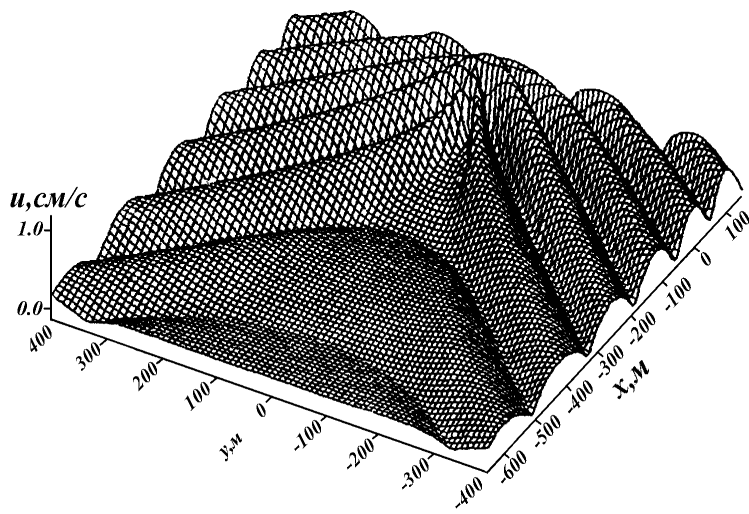


Рис. 4.16

Приведем теперь результаты количественного анализа влияния условий генерации на величину первого от нагрузки максимума скорости течений в окрестности трассы. Амплитуда горизонтальной скорости гравитационных волн монотонно убывает с увеличением ν , обращаясь в

нуль при $v = \sqrt{gH}$. Для волн, обусловленных изгибной жесткостью льда и распространяющихся перед нагрузкой, амплитуда скорости течений вблизи поверхности лед-вода как функция v может иметь локальный минимум, после которого распределение u по v близко к линейному. Это иллюстрируют графики на рис. 4.18, где зависимость $u(v)$ для изгибных и гравитационных волн характеризуются соответственно линиями 1, 2. Сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные линии отвечают величинам $Q_1/\sqrt{D_1}$, равным 0, 1, 1.5, 1.9. Кругками отмечены значения амплитуды u при $v = v^+$, превышающей v_0 на 5%.

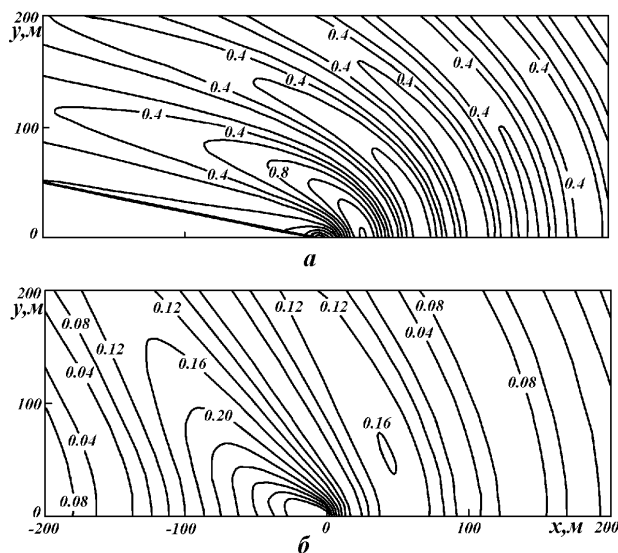


Рис. 4.17

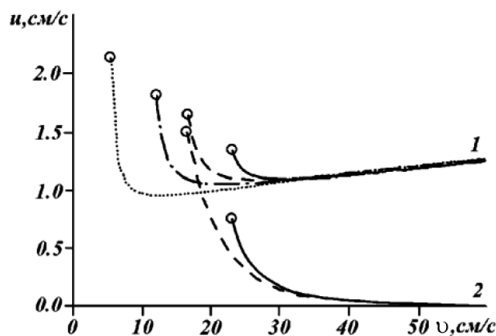


Рис. 4.18

Ледовое сжатие уменьшает минимум u , смещая его в сторону меньших значений v . Уменьшается $\min u$ и с ростом толщины льда. Однако в этом случае для больших h он достигается на более высоких ско-

ростях движения нагрузки. Это видно из сопоставления численных значений амплитуд, представленных при отсутствии ледового сжатия для горизонта $z = 0$ в таблице 4.1, где v^* отвечает скорости нагрузки, при которой достигается минимум u . Величины v_0 и v^* для толщин льда 2, 3, 4, 5 м равны соответственно 201, 233, 259, 281 м/с и 28.6, 32.9, 36.7, 39.5 м/с. Влияние ледового сжатия сказывается и на разности $\Delta v = v^* - v_0$, которая на интервале $0 \leq Q_1 \leq 2\sqrt{D_1}$ может иметь выраженный максимум. На больших глубинах он достигается при меньших Q_1 . При фиксированном Q_1 величина Δv растет с погружением. Это следует из сравнения графиков на рис. 4.19, где приведена зависимость Δv от ледового сжатия и глубины погружения при $h = 2.5$ м. Кривые по порядку снизу вверх относятся к глубинам 0, 1, 2, 3, 4.5 м. Отметим, что наличие минимума $u(v)$ изгибных волн имеет место в достаточно тонком (~ 5 м для рассматриваемых условий) приповерхностном слое воды. По мере продвижения вглубь жидкости величины тангенсов углов наклона линейных участков кривых 1 (рис. 4.18) относительно положительного направления оси абсцисс уменьшаются, переходя через нуль в области отрицательных значений. При этом функция $u(v)$ становится монотонно убывающей и для гравитационных, и для изгибных волн.

Таблица 4.1

$h, \text{ м}$	$v, \text{ м/с}$				
	v^*	v^+	30	40	50
2	2.05	1.64	1.66	1.74	1.84
3	0.96	0.76	0.78	0.79	0.83
4	0.56	0.45	0.48	0.43	0.47
5	0.37	0.29	0.35	0.30	0.31

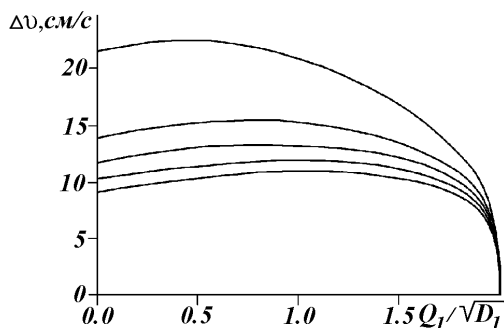


Рис. 4.19

Как для изгибных, так и для гравитационных волн характерен рост амплитуды горизонтальных волновых течений u с увеличением ледового сжатия. Причем на течениях, обусловленных гравитационными волна-

ми, это проявляется в большей мере. Зависимость скорости течений u от величины сжимающих усилий для изгибных и гравитационных волн характеризуется соответственно сплошными и штриховыми линиями на рис. 4.20. Номера линий 1, 2, 3, 4 представляют зависимость $u(Q_1/\sqrt{D_1})$ на горизонтах 0; 10; 25; 50 м.

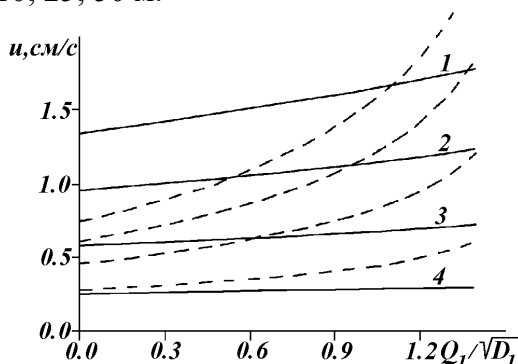


Рис. 4.20

Таким образом, рассмотрены горизонтальные волновые течения, возбуждаемые в покрытой льдом жидкости конечной глубины движущейся областью постоянного давления. Выявлены зависимости пространственного распределения поля горизонтальных волновых скоростей от ледовых условий и скорости движения области давлений. Показано, что во всей толще жидкости скорость волновых течений, обусловленных гравитационными волнами, монотонно убывает с увеличением скорости движения нагрузки. В приповерхностном слое жидкости скорость горизонтальных течений, вызванных изгибными волнами, как функция скорости перемещения нагрузки имеет минимум. Рост толщины льда, как и ослабление ледового сжатия, смещает положение минимума в сторону больших значений скорости движения нагрузки. На больших глубинах характер рассматриваемой зависимости для изгибных волн такой же, как и для гравитационных. Ледовое сжатие увеличивает скорость горизонтальных волновых течений, причем это влияние проявляется в большей степени в следе за областью давлений. Для гравитационных волн скорость волновых течений убывает с глубиной медленнее, чем для изгибных, наиболее быстро затухающих непосредственно под трассой движения нагрузки.

4.5 Генерация изгибных деформаций ледяного покрова при движении сосредоточенной нагрузки по сложной траектории

В реальных условиях нагрузка может перемещаться и по криволинейной траектории. Такой нагрузкой, в частности, является самолет,

разворачивающийся перед посадкой на ледовую полосу или непосредственно после взлета. При этом нагрузка становится более сосредоточенной по мере снижения самолета [169]. Кроме того, техническим средством, генерирующим колебания ледяного покрова, может быть взлетающий или летающий на небольшой высоте вертолет. Он создает возмущение атмосферного давления типа вихревого образования в области, движущейся под вращающимися лопастями надо льдом. Колебания ледяного покрова могут возбуждаться также и движущимися атмосферными образованиями циклонического вида.

Рассмотрим задачу о изгибных колебаниях ледяного покрова, возбуждаемых сосредоточенной нагрузкой

$$p = p_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad x_0 = vt + r \cos(\omega t + \varphi_0), \quad y_0 = r \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4.38)$$

движущейся с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса r , центр которой перемещается прямолинейно [44, 166] с постоянной скоростью v . В начальный момент времени ($t = 0$) нагрузка находится в точке $(r \cos \varphi_0, r \sin \varphi_0)$ на окружности.

Считая движение жидкости потенциальным, а волновые скорости ее частиц и амплитуды безотрывных колебаний пластинки – малыми, приведем задачу к решению уравнения Лапласа (4.2) с граничными

$$D_1 \nabla^4 \zeta + \chi_1 \zeta_{tt} + \zeta + \varphi_t / g = -p_1, \quad \zeta_t = \varphi_z, \quad z = 0; \quad \varphi_z = 0, \quad z = -H \quad (4.39)$$

и начальными (4.15) условиями. Здесь обозначения те же, что и в (4.3).

Применяя для решения задачи (4.2), (4.15), (4.38), (4.39) комплексное преобразование Фурье по переменным x, y , в системе координат, связанной с центром круговой траектории, получим уравнение

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikv \cos \theta \right)^2 + \tau^2 \right] \zeta^* = (2\pi)^{-1} \tau_0^2 p_1^* \exp(-irk \cos \alpha), \quad (4.40)$$

где

$\tau_0^2 = (1 + \chi_1 kg \operatorname{th} kH)^{-1} kg \operatorname{th} kH$, $\tau^2 = \tau_0^2 D_0(k)$, $D_0 = D_1 k^4 + 1$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, $\alpha = \omega t + \varphi_0 - \theta$, $k_x = k \cos \theta$ и $k_y = k \sin \theta$ – переменные преобразования Фурье, ζ^* и p_1^* – трансформанты Фурье для ζ и p_1 соответственно.

Используя известное для $\exp(-irk \cos \alpha)$ разложение в ряд по функциям Бесселя [4, 101], из (4.40) после удовлетворения начальным условиям в полярных координатах для изгиба ледяной пластинки (возвышения поверхности лед-вода) имеем выражение

$$\zeta = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty B(k_x, k_y) (M_1 + M_2) \exp(i\lambda) dk d\theta. \quad (4.41)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
M_1 &= S_1[\tau \cos(n\alpha) - N_1 \exp(-ik\upsilon t \cos \theta)], \\
M_2 &= iS_2[\tau \sin(n\alpha) + N_2 \exp(-ik\upsilon t \cos \theta)], \\
N_1 &= \tau \cos(\tau t) \cos(n\theta) + [ik\upsilon \cos \theta \cos(n\theta) + n\omega \sin(n\theta)] \sin(\tau t), \\
N_2 &= \tau \cos(\tau t) \sin(n\theta) + [ik\upsilon \cos \theta \sin(n\theta) - n\omega \cos(n\theta)] \sin(\tau t), \\
S_1 &= \tau^2 - (k\upsilon \cos \theta)^2 - (n\omega)^2, \quad S_2 = 2n\omega k\upsilon \cos \theta, \\
B &= i^n [D_0(S_1^2 - S_2^2)]^{-1} (2 - \delta_{n,0}) J_n(kr) k\tau p_1^*, \quad \lambda = kR \cos(\theta - \gamma), \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \\
x &= R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad \delta_{n,0} - \text{символ Кронекера.}
\end{aligned}$$

На пути интегрирования по θ могут быть особенности в точках $\theta = \theta_{ln}$ ($l = 1, 2, \dots, 8$), где $\theta_{1n} = \arccos \tau_{1n}$, $\theta_{2n} = -\theta_{1n}$, $\theta_{3n} = \pi - \theta_{1n}$, $\theta_{4n} = \pi + \theta_{1n}$, $\theta_{5n} = \arccos \tau_{2n}$, $\theta_{6n} = -\theta_{5n}$, $\theta_{7n} = \pi - \theta_{5n}$, $\theta_{8n} = \pi + \theta_{5n}$, $\tau_{sn} = (k\upsilon)^{-1} [\tau + (-1)^s n\omega]$ ($s = 1, 2$).

Плюсы θ_{ln} ($l = 1, \dots, 4$) располагаются на отрезке $[-\pi/2, 3\pi/2]$ действительной оси θ , если $\tau_{1n}^2 \leq 1$. При этом условие волновое число k изменяется в интервале (k_1, k_2) при выполнении одного из неравенств

$$n\omega \geq \sigma_0, \quad \upsilon \leq \upsilon_{01}, \quad \upsilon \geq \upsilon_{02}. \quad (4.42)$$

Если

$$n\omega < \sigma_0, \quad \upsilon_{01} < \upsilon < \upsilon_{02}, \quad (4.43)$$

то условию $\tau_{1n}^2 \leq 1$ соответствуют два интервала изменения волнового числа: (k_1, k_1^*) и (k_2^*, k_2) .

Действительные полюсы θ_{ln} ($l = 5, \dots, 8$) существуют на оси θ при $\tau_{2n}^2 \leq 1$, если

$$\upsilon \geq \upsilon_{03}. \quad (4.44)$$

Волновое число k при выполнении (4.44) изменяется в интервале (k_3, k_4) . В случае $\upsilon < \upsilon_{03}$ полюсы на действительной оси θ отсутствуют при любом действительном значении k , так как $\tau_{2n}^2 > 1$. Если $n = 0$ при $\tau_{2n}^2 \leq 1$, а $\upsilon > C$, то $k_3 = 0$. Здесь $\sigma_0 = [\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2)](\beta_2 - \beta_1)^{-1}$, $\upsilon_{01} = \upsilon \tau_{1n}(\beta_2)$, $C = (gH)^{1/2}$, $\upsilon_{02} = \upsilon \tau_{1n}(\beta_1)$, $\upsilon_{03} = \upsilon \tau_{2n}(\beta_3)$, $\tau_{1n}^*(\beta_1) = \tau_{1n}^*(\beta_2) = \tau_{2n}^*(\beta_3) = 0$, $\tau_{sn}^* = \tau_{sn} - \tau_1$ ($s = 1, 2$), $\tau_1 = (1/\upsilon) \partial \tau / \partial k$, k_1, k_1^*, k_2^*, k_2 — положительные корни уравнения $\tau_{1n} = 1$, а k_3 (если $n \neq 0$ или $n = 0, \upsilon \leq C$) и k_4 — уравнения $\tau_{2n} = 1$.

Выберем обходы полюсов θ_{ln} в комплексной плоскости таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\text{Re}(-i\upsilon k t \cos \theta) < 0$. Это обеспечит затухание N_1 и N_2 и установление периодической со временем волновой картины, характеризуемой интегралом (4.41). Так как υ , k и t положительные, то θ_{ln} обойдем сверху при нечетном и снизу при четном значении l . Полученные контуры интегрирования обозначим через L_{mn} и запишем (4.41) в виде

$$\zeta = (8\pi^2)^{-1} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} (I_{1mn} - I_{2mn}) + O(R^{-1}),$$

$$I_{1mn} = \int_{L_{mn}} \int_{L_{mn}^*} B_{mn}(k, \theta) \tau \exp[i(\lambda - (-1)^m n \alpha)] dk d\theta,$$

$$I_{2mn} = \int_{L_{mn}} \int_{L_{mn}^*} B_{mn}(k, \theta) N^* \exp[i(\lambda - kv t \cos \theta - (-1)^m n \alpha)] dk d\theta, \quad (4.45)$$

$$N^* = \tau \cos(\tau t) + i[kv \cos \theta + (-1)^m n \omega] \sin(\tau t),$$

$$B_{mn} = i^n (2 - \delta_{n,0}) D_0^{-1} [S_1 - (-1)^m S_2]^{-1} J_n(kr) k \tau p_1^*,$$

где контуры L_{1n} обходят полюсы θ_{ln} ($l = 3, 4, 5, 6$), а L_{2n} — полюсы θ_{ln} ($l = 1, 2, 7, 8$). Интегрирование по волновому числу проводится вдоль отрезков L_{mn}^* действительной оси k , являющихся областями определения полюсов θ_{ln} при выполнении условий (4.42) — (4.44).

Дополним контуры L_{mn} до замкнутых с учетом условий

$$\operatorname{Re}[i(\lambda - (-1)^m n \theta)] \leq 0, \quad \operatorname{Re}[i(\lambda - kv t \cos \theta - (-1)^m n \theta)] \leq 0,$$

обеспечивающих ограниченность интегралов I_{1mn} и I_{2mn} при $R \rightarrow \infty$. Внутри каждого из полученных замкнутых контуров при фиксированных m и n содержатся одни и те же полюсы, если $\operatorname{sign}[kR \sin(\theta - \gamma) + (-1)^m n] = \operatorname{sign}[kR \sin(\theta - \gamma) + (-1)^m n - kv t \sin \theta]$.

Это равенство выполняется при $R > R_{mn} + Ut$ или $R < R_{mn} - Ut$ ($R_{mn} = (-1)^{m+1} n / [k \sin(\theta - \gamma)]$, $U = v |\sin \theta / \sin(\theta - \gamma)|$). Для таких условий I_{1mn} и I_{2mn} компенсируют друг друга с точностью до возмущений, затухающих с расстоянием как $O(R^{-1})$. Вычеты в соответствующих полюсах θ_{ln} представляют периодическое волновое движение в областях $0 \leq R \leq R_{mn} + Ut$, если $t \geq t_n = n / (kv |\sin \theta|)$, и в областях $R_{mn} - Ut \leq R \leq R_{mn} + Ut$, если $R_{mn} \geq 0$ и $t < t_n$. Следовательно, величина $U = U_{ln}$ является скоростью переднего фронта возмущений, характеризуемых полюсом $\theta = \theta_{ln}$.

Применяя теорему о вычетах, из (4.45) получим

$$\zeta = K_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{1n} + K_{2n}) + O(R^{-1}), \quad (4.46)$$

где для фиксированного n выражение K_{1n} имеет вид

$$K_{1n} = \sum_{l=1}^4 \int_{k_1}^{k_2} G_{ln}^*(k) dk, \quad K_{1n} = \sum_{l=1}^4 \left(\int_{k_1}^{k_1^*} G_{ln}^*(k) dk + \int_{k_2}^{k_2^*} G_{ln}^*(k) dk \right)$$

при выполнении условий (4.42) и (4.43) соответственно. Если $v < v_{03}$, то $K_{2n} = 0$, а при условии (4.44)

$$K_{2n} = \sum_{l=5}^8 \int_{k_3}^{k_4} G_{ln}^*(k) dk.$$

Здесь

$$G_{ln}^*(k) = \begin{cases} G_{ln}(k), & \theta_{1n}(k) - \pi + \chi_n(k) < \gamma < \theta_{1n}(k) - \chi_n(k), \\ 0, & \theta_{1n}(k) - \chi_n(k) \leq \gamma \leq \theta_{1n}(k) + \pi + \chi_n(k) \text{ для } l = 1, 4, \end{cases}$$

$$G_{ln}^*(k) = \begin{cases} G_{ln}(k), & -\theta_{1n}(k) - \chi_n(k) < \gamma < \pi - \theta_{1n}(k) + \chi_n(k), \\ 0, & \pi - \theta_{1n}(k) + \chi_n(k) \leq \gamma \leq 2\pi - \theta_{1n}(k) - \chi_n(k) \text{ для } l = 2, 3, \end{cases}$$

$$G_{ln}^*(k) = \begin{cases} G_{ln}(k), & -\theta_{5n}(k) - \pi - \chi_n(k) < \gamma < \theta_{5n}(k) + \chi_n(k), \\ 0, & \theta_{5n}(k) + \chi_n(k) \leq \gamma \leq \theta_{5n}(k) + \pi - \chi_n(k) \text{ для } l = 5, 8, \end{cases}$$

$$G_{ln}^*(k) = \begin{cases} G_{ln}(k), & -\theta_{5n}(k) + \chi_n(k) < \gamma < \pi - \theta_{5n}(k) - \chi_n(k), \\ 0, & \pi - \theta_{5n}(k) - \chi_n(k) \leq \gamma \leq 2\pi - \theta_{5n}(k) + \chi_n(k) \text{ для } l = 6, 7, \end{cases}$$

$$\chi_n(k) = \begin{cases} \arcsin(n/(kR)), & k > n/R, \\ \pi/2, & k \leq n/R, \end{cases} \quad G_{ln}(k) = (8\pi^2)^{-1} \Psi_{ln}(k) J_n(kr) \exp[i\psi_{ln}(k)],$$

$$\psi_{ln}(k) = kR \cos(\theta_{ln} - \gamma) + (-1)^m n[\omega t + \varphi_0 (-1)^j \theta_{bn}] + n_0 \pi/2,$$

$$\Psi_{ln}(k) = (2 - \delta_{n,0}) (D_0 \sigma_{sn}^* v)^{-1} \tau p_1^*,$$

$$\sigma_{sn}^* = (1 - \tau_{sn}^2)^{1/2}, \quad n_0 = n + [(-1)^n + 1](s - m + 1) + 1, \quad b = 4s - 3 \text{ для } l = 1, 2, \dots, 8.$$

Значению l полюса θ_{ln} отвечают j, m, s из табл.4.2

Таблица 4.2

l	j	m	s	l	j	m	s
1	1	2	1	5	1	1	2
2	2	2	1	6	2	1	2
3	2	1	1	7	2	2	2
4	1	1	1	8	1	2	2

Используя представление $J_n(kr) \approx (2/\pi kr)^{1/2} \cos(kr - n\pi/2 - \pi/4)$, запишем выражение для G_{ln} в виде

$$G_{ln}(k) = \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{2\pi kr}} \Psi_{ln}(k) \sum_{q=1}^2 \exp \left[i \left(\psi_{ln}(k) + (-1)^q \left(rk - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

и проведем анализ интегралов (4.46) методом стационарной фазы. В результате для амплитуды возмущений вдоль линии постоянной фазы получим выражение

$$A(k) = \frac{(2 - \delta_{n,0}) \tau p_1^*}{8\pi^2 v D_0} \left[\frac{k \tau_{sn}^* \sigma_{sn}^*}{r |Z(k)|} \right]^{1/2}, \quad (4.47)$$

а уравнение линии постоянной фазы запишем в виде

$$x(k)=[(1-\tau_{sn}\tau_1)\mu^0+\sigma_{sn}^*\eta](k\tau_{sn}^*)^{-1}, y(k)=(-1)^j(\tau_1\sigma_{sn}^*\mu^0+\tau_{sn}\eta)(k\tau_{sn}^*)^{-1}. \quad (4.48)$$

Здесь $\mu^0=(-1)^s n\varphi_1-(-1)^q kr+\pi\varphi_2$, $\eta=(-1)^q kr\sigma_{sn}^*-(-1)^s n\tau_{sn}^*$,

$$\varphi_1=\omega t+\varphi_0+(-1)^j \arccos\tau_{sn}, \quad \varphi_2=2(N-n^*)+\xi_0+[(1)^q(n+1/2)+n_0]/2,$$

$$Z(k)=\mu^0\sigma_{sn}^*Z_1(k)+\eta Z_2(k)-(-1)^s n\tau_{sn}^*Z_3(k), \quad Z_1(k)=\tau_2(\sigma_{sn}^*)^2+\tau_1(\tau_{sn}^*)^2,$$

$$Z_2(k)=\tau_2(\sigma_{sn}^*)^2+\tau_{sn}(\tau_{sn}^*), \quad Z_3(k)=[\tau_{sn}(\tau_{sn}+\tau_1)-2]\tau_{sn}^*-\tau_2(\sigma_{sn}^*)^2, \quad \tau_2=\frac{k}{v}\frac{\partial^2\tau}{\partial k^2},$$

k изменяется на соответствующих условиях (4.42)–(4.44) интервалах определения полюсов θ_{ln} , которым отвечают s и j из табл. 4.2, N – номер рассматриваемой линии от начала координат; $\pi\xi_0$ – ее фазовый сдвиг, определяемый знаком $Z(k)$; n^* – целая часть $n/4$; q принимает значения 1 и 2.

Анализ полученного решения показал, что структура и характер возбуждаемого периодического волнового движения определяются главным образом изгибной жесткостью пластинки, угловой и поступательной скоростью перемещения нагрузки.

Для каждой фиксированной моды с номером n существуют семь критических значений скорости поступательного движения нагрузки ($v_{01}, v_{02}, v_{03}, v_{10}, v_{11}, v_{12}, C$) и одна ее критическая угловая частота σ_0 , при переходе через которые меняются характер и структура периодических возмущений. Из них величины $\sigma_0, v_{01}, v_{02}, v_{03}, C$ те же, что и в (4.42) – (4.44), а для v_{10}, v_{11}, v_{12} справедливы формулы

$$v_{11}=[\tau_3(\beta_4)]^{1/2}, \quad v_{12}=[\tau_4(\beta_6)]^{1/2}, \quad v_{10}=[\tau_5(\beta_8)]^{1/2},$$

$$\tau_3=\tau_{1n}^2-(\tau_{1n}-\tau_1)^2\tau_1/\tau_2, \quad \tau_4=\tau_{2n}^2-(\tau_{2n}-\tau_1)^2\tau_1/\tau_2,$$

$$\tau_5=\tau_{1n}\tau_1, \quad \tau_6=(\tau_1)^2-\tau_{1n}(\tau_1-\tau_2), \quad \tau_6(\beta_8)=\tau_6(\beta_9)=0,$$

$$\theta_1''(\beta_4)=\theta_1''(\beta_5)=\theta_2''(\beta_6)=\theta_2''(\beta_7)=0, \quad \theta_s(k)=\tau_1\sigma_{sn}^*(1-\tau_{sn}\tau_1)^{-1} \quad (s=1, 2),$$

$$\beta_4<\beta_5, \quad \beta_6<\beta_7, \quad \beta_8<\beta_9$$

(штрихи означают производные по k).

В зависимости от условий генерации может возбуждаться от одной до семи ($i^*=1, \dots, 7$) пар ($q=1$ и 2) волновых систем; $i^*=1, 5$ соответствует гравитационным поперечным, а $i^*=2, 6$ – гравитационным продольным волнам типа корабельных. Волны с $i^*=3, 7$ изгибные, обусловленные жесткостью пластинки; $i^*=4$ отвечает системам волн спиралевидной формы, обусловленным угловой скоростью перемещения давлений. В (4.48) $i^*=1, \dots, 4$ соответствует $s=1$, а $i^*=5, \dots, 7$ – $s=2$. Для гребней гравитационных продольных волн $\xi_0=-1/4$.

Границам угловых зон волновых систем на фазовой картине соответствуют каустики, спад амплитуд вдоль которых происходит по закону $R^{-1/3}$. Их можно определить по точкам излома линий постоянной фазы, происходящих при $Z(k)=0$ и отвечающих переходу на новую систе-

му. С удалением от нагрузки в области $R \geq r$ углы растворов зон волновых возмущений, обусловленных подсистемами $q = 1, 2$ каждой пары i^* , асимптотически приближаются к величинам $\gamma_2 = \arctg \theta_1(\alpha_2)$, $\gamma_{11} = \arctg \theta_2(\alpha_3)$, $\gamma_{22} = \arctg \theta_2(\alpha_4)$, $\gamma_1 = \arctg \theta_1(\alpha_1)$ для $v_{11} < v < v_{02}$, $\gamma_3 = \arctg \theta_1(\alpha_1)$ для $v > v_{02}$, $\gamma_{12} = \arctg \theta_2(0)$ для $n\omega = 0$, $v > c$, $\theta'_1(\alpha_1) = \theta'_1(\alpha_2) = \theta'_2(\alpha_3) = \theta'_2(\alpha_4) = 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_3 < \alpha_4$.

Их соответствие номеру i^* приведено в табл.4.3 ($s = 1$) и 4.4 ($s = 2$), характеризующих фазовую структуру волновых возмущений в области $R \geq r$.

Зависимость величин γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{11} , γ_{22} , характеризующих угловые зоны обусловленных модой n установившихся возмущений, и критических значений v_{01} , v_{02} , v_{03} , v_{10} , v_{11} , v_{12} скорости перемещения нагрузки от $n\omega$ такая же как и от частоты пульсации σ поступательно движущегося источника переменной интенсивности.

Таблица 4.3

v	$\gamma(\pm 2\pi)$	i^*	$n\omega$
$0 < v < v_{01}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	4	$0 < n\omega < \sigma_0$
$v_{01} < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	3, 4	
$v_{11} < v < v_{02}$	$-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$	1, 4	
	$-\gamma_1 \leq \gamma \leq -\gamma_2$	1, 2	
	$\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$	3, 4	
$v_{02} < v < v_{10}$	$\gamma_1 < \gamma < 2\pi - \gamma_1$	3, 4	
	$-\gamma_2 < \gamma < \gamma_2$	4	
	$-\gamma_3 \leq \gamma \leq -\gamma_2$	2, 3,	
$v > v_{10}$	$\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$	4	
	$\gamma_3 < \gamma < 2\pi - \gamma_3$	3	
$v > v_{10}$	$-\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_2$	1	
	$-\gamma_1 \leq \gamma \leq -\gamma_2$, $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$	1, 2, 3	
	$\gamma_1 < \gamma < 2\pi - \gamma_1$	3	
$0 < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	4	$n\omega > \sigma_0$
$v > v_{11}$	$-\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_2$	4	
	$-\gamma_3 \leq \gamma \leq -\gamma_2$, $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$	2, 3, 4	
	$\gamma_3 < \gamma < 2\pi - \gamma_3$	3	

Таблица 4.4

	$\gamma(\pm\pi/2)$	i^*	$n\omega$
$v < v_{03}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	–	$n\omega \geq 0$
$v_{03} < v < v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq 2\pi$	7	
$v_{12} < v < C$	$-\gamma_{22} < \gamma < \gamma_{22}$	5	
	$-\gamma_{11} \leq \gamma \leq -\gamma_{22},$ $\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	5,6 7	
	$\gamma_{11} < \gamma < 2\pi - \gamma_{11}$	7	
$v > C$	$-\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{22}$	5	$n\omega > 0$
	$-\gamma_{11} \leq \gamma \leq -\gamma_{22},$ $\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	5,6 7	
	$\gamma_{11} < \gamma < 2\pi - \gamma_{11}$	7	
	$-\gamma_{12} \leq \gamma \leq \gamma_{12}$	–	
	$-\gamma_{11} \leq \gamma \leq -\gamma_{12},$ $\gamma_{12} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	6,7	$n\omega = 0$
	$\gamma_{11} < \gamma < 2\pi - \gamma_{11}$	7	

Фазовая структура возмущений, обусловленных каждой парой возбуждаемых волновых подсистем первой и второй моды, анализировалась по выражениям (4.48) для E , μ , ρ_1 из (4.13). При этом глубина бассейна 10^3 м, толщина ледяного покрова 2 м и плотность воды $10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$. Радиус траектории перемещения нагрузки $r = 10^2 \div 10^3$ м, ее поступательная скорость $v = 10^{-1} \div 40 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, угловая скорость $\omega = 5 \cdot 10^{-2} \div 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ при $\varphi_0 = 0$ для различных фаз периода колебаний. Поступательное движение нагрузки осуществляется в отрицательном направлении оси x , а вращательное – по часовой стрелке.

Анализ показал, что при значениях v , удовлетворяющих неравенствам $v_{01} < v < v_{02}$, $n\omega < \sigma_0$ или $v_{11} < v < c$, $n\omega > 0$, структура генерируемых волновых возмущений является суперпозицией семи пар волновых подсистем.

Их фазовые картины приведены на рис. 4.21 – 4.23 для $v = 40 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, $\omega = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $r = 3 \cdot 10^2$ м и фазы вращения нагрузки π . На этих рисунках изображены линии постоянных фаз (гребней) спиралевидных ($i^* = 4$, рис. 4.21), гравитационных поперечных, продольных корабельных и изгибных волн ($i^* = 1, \dots, 3$, рис. 4.22; $i^* = 5, \dots, 7$, рис. 4.23) первой моды. Жирные и тонкие линии отвечают $q = 1$ и 2. Сплошными кривыми на рис. 4.22 и 4.23 изображены изгибные волны, а штрихпунктирными с одной и двумя точками – продольные и поперечные гравитационные волны типа корабельных. Границы угловых зон соответствующих подсистем показаны штриховыми линиями. Пунктиром на рис. 4.22, 4.23

обозначена траектория кругового перемещения давлений в связанной с ее центром системе координат. Эту же траекторию характеризует и кружок в центре на рис. 4.21.

Видно, что гребни спиралевидных волн начинаются в точках, расположенных от траектории перемещения давлений на расстояниях, примерно равных половине длины волн. С каждым разворотом спирали номер гребня увеличивается. Длины волн для обеих подсистем приблизительно одинаковы. Причем они минимальны на оси абсцисс перед нагрузкой и максимальны за ней. Минимальная длина волны существенно превышает радиус круговой траектории движения нагрузки. Кроме того, длины спиралевидных волн слабо зависят от этого радиуса. Различие в длинах волн и за нагрузкой определяется поступательной скоростью ее движения. С уменьшением скорости до нуля различия убывают.

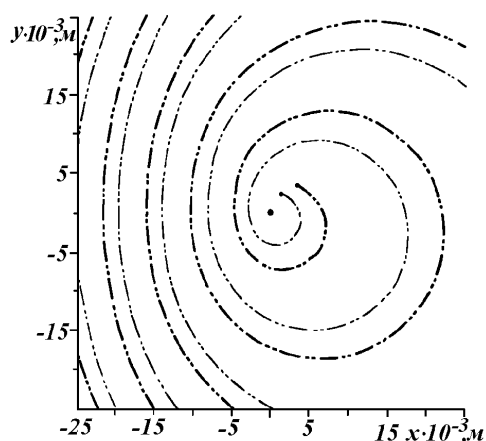


Рис.4.21

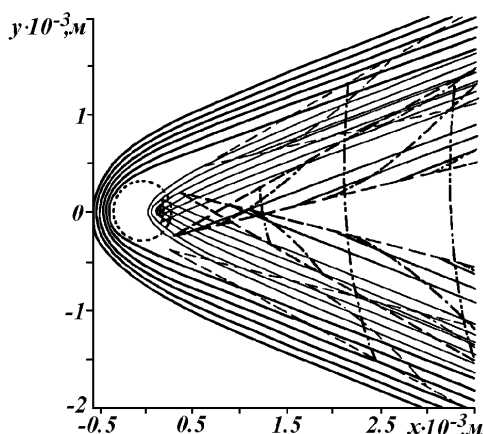


Рис.4.22

Система спиралевидных возмущений генерируется при любом значении скорости из диапазона $0 \leq v < v_{10}$, если $n\omega < \sigma_0$ и диапазона $v \geq 0$, если $n\omega < \sigma_0$.

Отметим, что гравитационные волны типа спиралевидных возбуждаются и в жидкости со свободной поверхностью при движении источника возмущений по круговой траектории [3, 139].

Системы изгибных, продольных и поперечных гравитационных волн каждой из двух подсистем образуют два накладывающихся портрета, похожих на известные [66, 150, 191] для поступательно движущегося генератора постоянной интенсивности. Это справедливо для $s = 1$ и 2 (рис. 4.22 и 4.23). Диапазоны изменения длины волн обеих подсистем одинаковые. Минимальную длину имеют изгибные волны (на трассе

центра круговой траектории нагрузки), а максимальную – поперечные гравитационные. Угловые зоны, где генерируются возмущения, обусловленные совместным вкладом систем изгибных, продольных и поперечных гравитационных волн, при $s = 2$ значительно меньше, чем при $s = 1$.

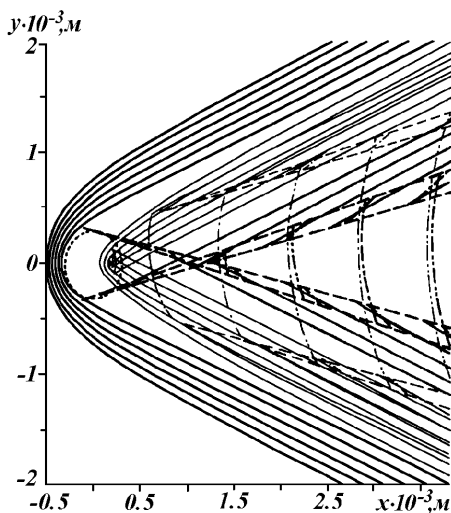


Рис.4.23

В отличие от случая поступательно движущейся нагрузки, здесь наблюдается несимметричность фазовых портретов относительно трассы перемещения центра ее траектории. Это особенно заметно в конфигурации гребней гравитационных поперечных волн и в расположении вершин угловых зон трехволновых возмущений.

Для подсистемы с $q = 1$ (тонкие линии) изгибные волны предвестники окаймляют круговую траекторию перед нагрузкой. Угловые зоны трехволновых возмущений за нагрузкой пересекаются, переходя через ось абсцисс. Первые гребни гравитационных поперечных волн образуются только за областью пересечения угловых зон. Для подсистемы с $q = 2$ (жирные линии) гребни изгибных волн могут как заходить в область круга, ограниченного траекторией, так и располагаться впереди области. При этом возможны излом первых линий постоянной фазы внутри этой области и их пересечение с осью x за ней. Угловые зоны трехволновых возмущений не пересекаются между собой. Их вершины расположены на большом удалении от нагрузки, а углы их раствора в рассматриваемой зоне меньше, чем при $q = 1$. Зона генерации поперечных корабельных волн в этом случае значительно шире, чем при $q = 1$.

Отметим, что с ростом r количество изламываемых гребней изгибных волн увеличивается. При достаточно больших r могут подвергаться излому и первые гребни поперечных гравитационных волн. Изменение

ωt приводит к фазовым сдвигам в каждой из рассматриваемых волновых подсистем.

Первый гребень гравитационной поперечной волны из подсистемы с $q = 2$ переходит в гребень изгибной, минуя вершины зон генерации трехволновых возмущений (рис. 4.23). С убыванием скорости v до критической v_{11} ($s = 1$, рис. 4.22) или v_{12} ($s = 2$, рис. 4.23) такие зоны сужаются, а их вершины удаляются от нагрузки. При этом количество гребней поперечных гравитационных волн, переходящих в изгибные, увеличивается. Качественно аналогичный вид имеют все гребни волн за нагрузкой в диапазоне скорости $v_{01} < v < v_{11}$ ($s = 1$) или $v_{03} < v < v_{12}$ ($s = 2$). Зоны генерации трехволновых возмущений для таких значений v отсутствуют. С уменьшением скорости до v_{01} ($s = 1$) или v_{03} ($s = 2$) гребни волн выпрямляются перпендикулярно трассе. При $v < v_{01}$ или $v < v_{03}$ в формировании возмущений отсутствуют вклады изгибных и гравитационных волн, соответствующих $s = 1$ или $s = 2$.

Если $v_{02} < v < v_{10}$, $n\omega < \sigma_0$ или $v > v_{11}$, $n\omega > \sigma_0$, то в формировании возмущений, отвечающих $s = 1$, отсутствует вклад поперечных гравитационных волн типа корабельных. Перед нагрузкой в этом случае могут возбуждаться только изгибные волны. В волновом следе образуются угловые зоны, где структуру возмущений формируют волны типа спиралевидных либо вместе с продольными гравитационными и изгибными волнами, либо без них.

Фазовую картину в рассматриваемых условиях иллюстрирует рис. 4.24 для значений параметров, соответствующих рис. 4.21–4.23 при $\omega = 10^{-1} \text{с}^{-1}$. Здесь штрихпунктирными линиями с двумя точками обозначены гребни волн типа спиралевидных. Гребни изгибных (сплошные линии) и продольных гравитационных (штрихпунктирные с одной точкой) волн даны через один. Видно, что угловые зоны генерации трехволновых возмущений для обеих подсистем ($q = 1$ и 2) больше, чем для других рассматриваемых диапазонов скорости. Линии первых гребней волн типа спиралевидных могут не доходить до одной из границ своей угловой зоны. Характерные черты подсистем с $q = 1$ и 2 качественно такие же, как и для условий рис. 4.22, 4.23.

Если $v > v_{10}$, $n\omega < \sigma_0$, то волны типа спиралевидных не возбуждаются, а фазовый портрет для $s = 1$ аналогичен представленному на рис. 4.22.

Фазовая структура возмущений, отвечающих $s = 2$, в рассматриваемых диапазонах скорости качественно такая же, как и при значениях v из других диапазонов (см. табл. 4.3), соответствующих $s = 1$.

Фазовые картины возмущений, обусловленных первой модой при частоте $n\omega$, аналогичны картинам, формируемым модой с номером n при частоте ω .

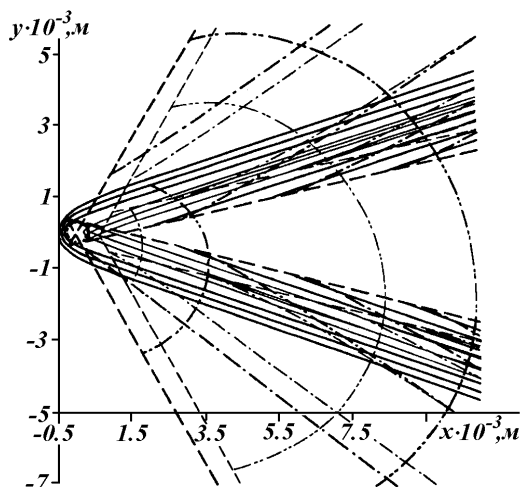


Рис. 4.24

Количественное сопоставление возможных вкладов возбуждаемых волн в изгибные колебания пластинки проведено по формулам (4.47), (4.48) при значениях исходных параметров, отвечающих условиям рис. 4.21–4.23 (вариант I) и рис. 4.24 (вариант II). Амплитуды изгиба $A(k)$, обусловленного каждой из волновых подсистем q систем i^* , приведены с точностью до множителя $10/p_1$ в табл. 4.5 для трех фиксированных точек плоскости справа от трассы перемещения центра траектории нагрузки. Эти точки удалены от начала координат на расстояние 5 км вдоль лучей, составляющих с осью x углы $\gamma = 20, 40$ и 120° соответственно. Знаком плюс отмечены амплитуды подсистем с $q = 1$ и 2 изгибных волн ($i^* = 3, 7$), для которых линии постоянных фаз начинаются от границ соответствующих угловых зон волнового следа, знак минус характеризует изгибные волны с линиями постоянных фаз, окаймляющими (в движущейся системе координат) круговую траекторию перемещения нагрузки (при $q = 1$ и 2) или заходящими внутрь ограниченного этой траекторией круга (при $q = 2$) (в скобках даны местные значения длин соответствующих волн $\Lambda = 2\pi/k$). Прочерк означает отсутствие данной волновой системы в рассматриваемой точке. Отметим, кроме того, что в этих точках отсутствуют и волны, отвечающие $i^* = 5, 6$ для вариантов I, II и $i^* = 1$ для варианта II.

Из приведенных в табл. 4.5 данных видно, что амплитуды обусловленных изгибными и гравитационными корабельными волнами колеба-

ний пластинки в выбранных точках сопоставимы между собой по порядку величин, несмотря на заметные различия местных значений длин этих волн. Влияние спиралевидных волн на изгиб пластинки здесь менее значительно. Однако с изменением условий генерации происходят деформация фазовой картины колебаний и, следовательно, перераспределение вкладов возбуждаемых волн в изгиб пластинки в фиксированной точке. Напомним, что при $\nu < \min(\nu_{01}, \nu_{03})$ колебания формируются только спиралевидными волнами.

Таблица 4.5

Вариант	i^*	q	γ , град		
			20	40	120
			$A(k) \cdot 10/p_1$ (Λ , м)		
I	1	1	0.99 (1890)	—	—
		2	1.02 (1850)	—	—
	2	1	3.27 (704)	—	—
		2	3.53 (354)	—	—
	3	1	—	1.57 _– (78.7)	0.43 _– (39.0)
		2	3.18 ₊ (129)		
			2.13 _– (101)	1.30 _– (71.9)	0.40 _– (38.5)
	4	1	0.10 (14710)	0.13 (11430)	0.14 (7500)
		2	0.01 (17480)	0.01 (17310)	0.16 (7930)
	7	1	1.76 ₊ (103)	1.52 _– (78.9)	0.44 _– (39.4)
2		3.16 ₊ (128)			
		2.53 _– (95.8)	1.31 _– (72.0)	0.41 _– (38.8)	
II	2	1	2.06 (670)	1.53 (1510)	—
		2	3.46 (340)	—	—
	3	1	—	1.51 _– (78.2)	0.41 _– (38.8)
		2	2.26 _– (100)	1.30 _– (71.23)	0.39 _– (38.3)
	4	1	0.40 (7180)	0.43 (5860)	—
		2	0.05 (8270)	0.07 (7700)	—
	7	1	1.95 ₊ (101)	1.55 _– (79.1)	0.44 _– (39.6)
		2	3.12 ₊ (127)	1.36 _– (72.2)	0.42 _– (39.1)

ГЛАВА 5. ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ОБЛАСТИ ДАВЛЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

5.1 Влияние битого льда на неустановившиеся волны

Пусть на невозмущенной поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный в горизонтальных направлениях бассейн конечной глубины H , плавает битый лед. Рассмотрим влияние льда на развитие трехмерных волн, возбуждаемых при движении области периодических давлений

$$p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\sigma t), \quad x_1 = x + vt \quad (5.1)$$

с постоянной скоростью v . Давления прикладываются, начиная с момента времени $t = 0$. Исследование проведем в предположениях линейной теории волн для ледяного покрова постоянной сплоченности и толщины. В системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости φ с граничными и начальными условиями

$$\chi_1 F \zeta + \zeta + (\varphi_t + v \varphi_x) g^{-1} = -p_1 f(x, y) \exp(i\sigma t), \quad z = 0; \quad \varphi_z = 0, \quad z = -H, \quad (5.2)$$

$$\varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0. \quad (5.3)$$

Здесь

$$\chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}, \quad P_1 = \frac{p_0}{\rho g}, \quad F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где ρ – плотность жидкости; h, ρ_1 – толщина и плотность льда. Кроме того, возвышение поверхности лед-вода ζ и потенциал скорости φ при $z = 0$ связаны кинематическим условием $\zeta_t = \varphi_z - v \zeta_x$. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

Применяя для решения задачи (5.2) – (5.3) преобразование Фурье по x, y и преобразование Лапласа по t , получим при осесимметричном распределении давлений (5.1) такое интегральное представление для возвышения поверхности лед-вода

$$\zeta = -\frac{P_1}{8\pi^2} \operatorname{Im} e^{i\sigma t} \int_0^{\infty} \int_0^{3/2\pi} \int_{-\pi^{1/2}}^{\pi^{1/2}} r f^* \tau(r) (e^{-i\Delta_1 \xi} - e^{-i\Delta_2 \xi}) e^{i\Phi} d\theta d\xi dr,$$

$$\tau(r) = [rg \operatorname{th} rH / (1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)]^{1/2}, \quad \Phi = rR \cos(\theta - \gamma),$$

$$\Delta_j = \sigma + v r \cos \theta + (-1)^j \tau, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma,$$

$$r = (m^2 + n^2)^{1/2}, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta,$$

f^* – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$.

Отсюда при больших R и t методом стационарной фазы найдем $\zeta = \sum_i \zeta_i + O(R^{-1})$, где суммирование ведется для i от 1 до 5, если

$0 < \nu < \nu_2$, и от 2 до 5 для $\nu > \nu_2$. При этом

$$\zeta_k = \eta_{1k}, \quad 0 < |\gamma| < \gamma_1, \quad R < u_{1k}t, \quad k=1,2,$$

$$\zeta_3 = \eta_{13}, \quad 0 < |\gamma| < \pi, \quad R < u_{13}t$$

в первом случае и

$$\zeta_k = \eta_{1k}, \quad 0 < |\gamma| < \gamma_3, \quad R < u_{13}t, \quad k=2,3$$

во втором, а

$$\zeta_4 = \eta_{21}, \quad 0 < |\gamma| < \gamma_2, \quad R < u_{21}t; \quad \zeta_5 = \eta_{22}, \quad 0 < |\gamma| < \gamma_2, \quad R < u_{22}t$$

при любом $\nu > 0$. Вне указанных областей угловых зон $\zeta_k = 0$.

Здесь

$$\eta_{jk} = R^{-1/2} \operatorname{Im} \{ \psi_j(\alpha_{jk}) \exp i [R \Phi_j(\alpha_{jk}, \gamma) + \delta_1^{j+k} \pi / 4] \},$$

$$\psi_j = -ip_1 f^* \exp(i\sigma t) \tau [\nu(1 - \tau_j^2)^{1/2}]^{-1} (2\pi |\Phi_j'|)^{-1/2},$$

$$\Phi_j = [(1 - \tau_j^2)^{1/2} \sin \gamma - \tau_j \cos \gamma] r \delta_j, \quad \tau_j = (\tau + \delta_j \sigma) / (\nu r),$$

$$u_{jk} = u_j(\alpha_{jk}, \gamma), \quad u_j = \nu(1 - \tau_j^2)^{1/2} [\tau_j \sin \gamma + (1 - \tau_j^2)^{1/2} \cos \gamma]^{-1},$$

$$\nu_2 = \tau_3(\beta_1), \quad \tau_3 = (\tau - \sigma) / r, \quad \gamma_2 = \operatorname{arctg} \kappa_2(\alpha_2), \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1,$$

штрих означает производную по r ; $\alpha_{1,2}$ – положительные корни уравнений $\kappa'_{1,2}(r) = 0$ соответственно, где $\kappa_j = (r\tau_j)'(1 - \tau_j^2)^{1/2} [1 - \tau_j(r\tau_j)']^{-1}$, а β_1 – уравнения $\tau'_3(r) = 0$; α_{jk} при $k = 1, 2, 3$ и $j = 1$ являются корнями уравнения $\kappa_1 = \operatorname{tg} \gamma$, а при $k = 1, 2$ и $j = 2$ – уравнения $\kappa_2 = \operatorname{tg} \gamma$. Отметим, что первое из этих уравнений для $0 < \nu < \nu_2$ имеет либо три корня ($\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$), если $0 < \gamma < \gamma_1$, либо один (α_{13}), если $\gamma_1 < \gamma < \pi$. В случае $\nu > \nu_2$ корнями этого уравнения являются α_{12}, α_{13} для $0 < \gamma < \gamma_3$ а при $\gamma_3 < \gamma < \pi$ корней нет. Причем

$$0 < r_1 < \alpha_{13} < r_2 < r_3 < \alpha_{11} < \alpha_1 < \alpha_{12},$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_1 \text{ для } \gamma = \gamma_1, \quad \alpha_{13} = \alpha_{12} = \alpha_1 \text{ для } \gamma = \gamma_3,$$

r_1 – корень уравнения $\tau_1 = -1$, а r_2, r_3 – корни уравнения $\tau_1 = 1$. Уравнение $\kappa_2 = -\operatorname{tg} \gamma$ для $\nu > 0$ имеет только два корня α_{21}, α_{22} и только при условии $0 < \gamma < \gamma_2$. Эти корни удовлетворяют неравенству $0 < r_{11} < \alpha_{21} < \alpha_{12} < \alpha_{22}$, где r_{11} – корень уравнения $\tau_2 = 1$. Кроме того $\alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_2$ при $\gamma = \gamma_2$.

Величины углов γ_1 и γ_3 определяются по формуле $\gamma = \operatorname{arctg} \kappa_1(\alpha_1)$ соответственно при $0 < \nu < \nu_2$ и $\nu > \nu_2$. Если $\nu = \nu_0$, то $\gamma_3 = \pi/2$. Здесь $\nu_0 = [\tau_4(\beta_2)]^{1/2}$, $\tau_4 = \tau_3 \tau'$, β_2 – корень уравнения $\tau'_4(r) = 0$.

Таким образом, колебания жидкости с битым ледяным покровом формируются, как и при отсутствии льда [90, 152, 158], четырьмя или пятью системами гравитационных волн. Из них ζ_1 и ζ_2 образуются при $\sigma \geq 0$ соответственно для $0 < v < v_2$ и $v > 0$, а $\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$ возникают при любых значениях скорости v , но только для $\sigma > 0$. Волны ζ_3 в случае $0 < v < v_2$ распространяются в области $|\gamma| < \pi$ перед давлениями и за ними, а при $v > v_2$ находятся в угловой зоне $|\gamma| < \gamma_3$. Поперечные ζ_1, ζ_4 и продольные ζ_2, ζ_5 корабельные волны образуются в волновом следе за давлениями. Причем ζ_4, ζ_5 распространяются внутри угла $|\gamma| < \gamma_2$. Волны ζ_1 сосредоточены в зоне $|\gamma| < \gamma_1$. Здесь распространяются и ζ_2 , если $0 < v < v_2$. В случае $v > v_2$ волны ζ_2 находятся в угловой зоне $|\gamma| < \gamma_3$. Величины углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, не меняются со временем, а границы областей, занятых каждой из волн внутри соответствующих угловых зон, перемещаются со скоростями u_{jk} . Из них u_{1k} соответствуют волнам ζ_k ($k = 1, 2, 3$), а u_{21}, u_{22} – волнам ζ_4, ζ_5 .

Для количественной оценки влияния битого льда на волновое движение проводились [67] численные расчеты при значениях $\rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3$, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $H = 100 \text{ м}$. Они показали, что увеличение толщины льда приводит к уменьшению v_0 и v_2 . Это влияние усиливается с ростом частоты σ . Численные значения v_0 и v_2 представлены для сравнения в таблице 5.1. Влияние льда на распределение γ_k по v иллюстрируется рис. 5.1, 5.2.

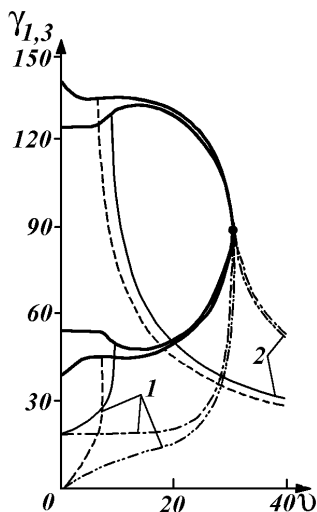


Рис. 5.1

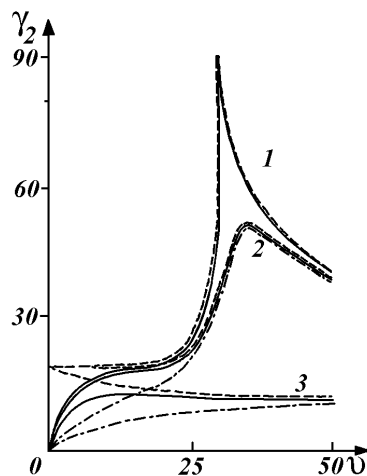


Рис. 5.2

На рис. 5.1 сплошным и штриховым линиям соответствуют толщины льда 1, 10 м при $\sigma = 0.25 \text{ с}^{-1}$, а штрихпунктирные с одной и двумя

точками – толщина 0 и 10 м при $\sigma = 0$. Причем γ_1 характеризуется кривыми 1, а γ_3 – кривыми 2. Жирные сплошные линии представляют максимальные значения углов γ_1 (снизу от кружка) и γ_3 (сверху от кружка), достигаемые при $v = v_2$. Из них внутренняя кривая отвечает $h = 0$, а внешняя $h = 10$ м. Если $\sigma = 0$, то $v_0 = v_2 = \sqrt{gH}$, а максимальным для γ_1 и γ_3 является угол 90° , отмеченный кружком.

Видно, что максимальное значение γ_3 , достигаемое при $v = v_2$, изменяется в пределах примерно от 141° до 90° , если $h = 10$ м, и примерно от 133° до 90° в случае $h = 0$. Максимум γ_1 при этом находится соответственно в диапазонах примерно от 39° и 47° до 90° . Для любого фиксированного σ минимальным значением γ_1 при отсутствии льда является угол $19^\circ 28'$, а в условиях ледяного покрова ($h > 0$) – угол равный нулю. Рост толщины льда в зависимости от скорости перемещения возмущений может привести как к увеличению, так и к уменьшению угла γ_1 .

Таблица 5.1

$\sigma, \text{с}^{-1}$	$v_0, \text{м/с}$		$v_2, \text{м/с}$	
	$h = 0$	$h = 10 \text{ м}$	$h = 0$	$h = 10 \text{ м}$
0	31.32	31.32	31.32	31.32
0.1	19.56	18.54	17.81	16.71
0.2	13.38	11.78	11.75	10.12
0.3	9.17	7.12	8.17	6.09
0.4	6.70	4.29	6.13	3.71
0.5	5.34	2.65	4.91	2.26

При фиксированных v и h большему σ отвечает и больший угол γ_1 . Угол γ_3 уменьшается при увеличении и частоты колебаний и толщины льда и скорости v . При этом влияние льда на γ_3 убывает с уменьшением σ и увеличением v . В частности, для $\sigma = 0,25 \text{ с}^{-1}$ лед толщиной 10 м уменьшает γ_3 по сравнению со случаем $h = 0$ на 9.9, 7.2, 6.9% при скоростях 20, 25, 30 м/с соответственно. Отметим, что $\gamma_3 \rightarrow 0$, если $v \rightarrow \infty$.

Сплошные ($h = 1 \text{ м}$), штриховые ($h = 0$) и штрихпунктирные ($h = 10 \text{ м}$) линии с номерами 1, 2, 3 на рис. 5.2 отвечают частотам 0, 0.01, 0.3 с^{-1} . Анализ поведения этих кривых показывает, что при фиксированном $h \geq 0$ большей частоте σ отвечает меньший угол γ_2 . Уменьшается γ_2 и с ростом h при фиксированных σ и v . Однако это влияние существеннее проявляется при малых скоростях, чем при больших. Кроме того, оно зависит и от σ . Например, для $v > 25 \text{ м/с}$ уменьшение γ_2 за счет увеличения h от 0 до 10 м составляет не более 8, 10.4, 38.8% при частоте 0, 0.01, 0.3 с^{-1} . Если $v \rightarrow 0$, то $\gamma_2 \rightarrow 19^\circ 28'$ при $\sigma > 0$, $h = 0$, а в слу-

чае $\sigma \geq 0$ и $h > 0$ угол γ_2 убывает до нуля. Для $\sigma = 0$ угол γ_2 совпадает с γ_1 при $v < \sqrt{gH}$ и с γ_3 при $v > \sqrt{gH}$.

Фазовые портреты образующихся волн представлены на рис. 5.3 для $h = 1$ м, $\sigma = 0.3$ с⁻¹. Они даны при $t = 40$ с (рис. 5.3, а, 5.3, б) и $t = 20$ с (рис. 5.3, в) только для верхней полуплоскости, так как волновая картина симметрична относительно оси x . Линии равной фазы волн ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 при значении $v = 7$ м/с из диапазона $(0, v_2)$ изображены на рис. 5.3, а пунктирной, тонкой сплошной и штрихпунктирной кривыми соответственно. Внешняя жирная кривая здесь характеризует передний фронт волн ζ_3 , а внутренняя справа от точки ее касания с прямой штриховой линией, ограничивающей угол γ , – передний фронт волн ζ_2 . Часть внутренней жирной кривой слева от точки касания представляет границу фронта волн ζ_1 .

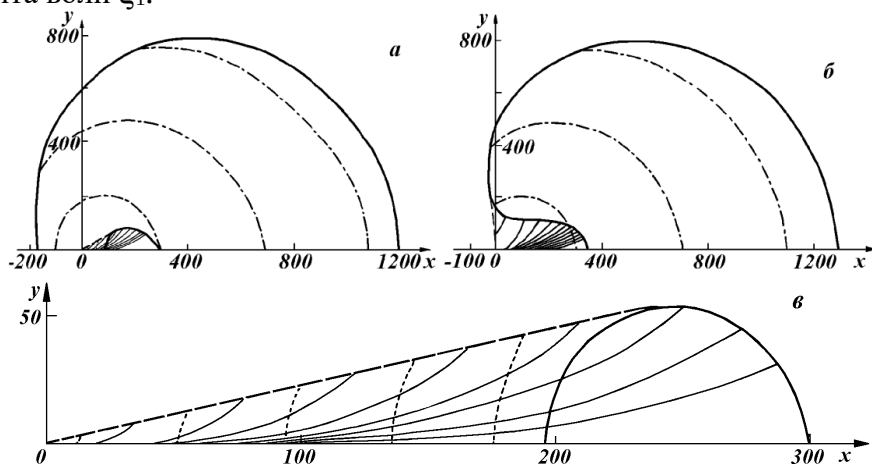


Рис. 5.3

Линии равной фазы волн ζ_2 , ζ_3 для скорости $v = 8.5$ м/с, удовлетворяющей условию $v_2 < v < v_0$ даны на рис. 5.3, б. Системы волн ζ_1 здесь нет, так как она возбуждается только при $0 < v < v_2$. Прямая штриховая линия на этом рисунке ограничивает угол γ_3 . Внешний участок жирной кривой, начиная от точки ее касания с границей угловой зоны γ_3 , является передним фронтом волн ζ_3 , а внутренней – волн ζ_2 .

Фазовые линии волн ζ_4 , ζ_5 , образующихся в случае $\sigma > 0$, $v > 0$, имеют качественно такой же вид, как и волн ζ_1 , ζ_2 при $0 < v < v_2$ (рис. 5.3, а). Для $v = 15$ м/с эти линии показаны на рис. 5.3, в. Прямая штриховая линия на рис. 5.3, в характеризует угол γ_2 . Участок жирной сплошной кривой слева от точки ее касания с этой прямой представляет границу фронта волн ζ_4 , а справа – волн ζ_5 .

Видно, что фазовые портреты волн в жидкости с битым ледяным покровом похожи на портреты в жидкости со свободной поверхностью.

Однако рост толщины льда, как и увеличение σ , увеличивает длины волн ζ_1 , ζ_2 и уменьшает длину волн ζ_3 . Длины волн ζ_4 , ζ_5 растут с увеличением h и убывают с ростом σ .

При $h = 0$ узловые линии волн ζ_5 выходят из начала координат. Это справедливо и для ζ_2 , если $v < v_2$. В случае $v > v_2$ узловые линии ζ_2 исходят не только из начала координат, но и с границы угловой зоны γ_3 . В жидкости с битым льдом линии равной фазы волн $\zeta_{2,5}$ начинаются на оси x [88] в точках, отстоящих от начала координат на расстояниях

$\pi \kappa_1^{1/2} (k \pm 3/4) (1 \mp \sigma \kappa_1^{1/2})^{-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Здесь верхние знаки берутся для ζ_2 , а нижние для ζ_5 . Указанные расстояния зависят от толщины льда и частоты колебаний. Кроме того, узловые линии волн ζ_2 для $v > v_2$ начинаются, как и при $h = 0$, на границе угловой зоны γ_3 .

Границы фазовых картин, характеризующие линии передних фронтов волн ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , представлены на рис. 5.4 для $t = 40$ с. Причем передние фронты волн ζ_1 , ζ_2 изображены на вставке рис. 5.4, а в увеличенном масштабе.

Сплошным кривым на рис. 5.4, а отвечает $h = 0$, а штриховым $h = 1$ м при скорости 5 м/с и частоте 0.3 с^{-1} . Штрихпунктирные линии с одной и двумя точками представляют фронтальные границы соответственно для частот 0.2 и 0.3 с^{-1} при $v = 7 \text{ м/с}$, $h = 1 \text{ м}$.

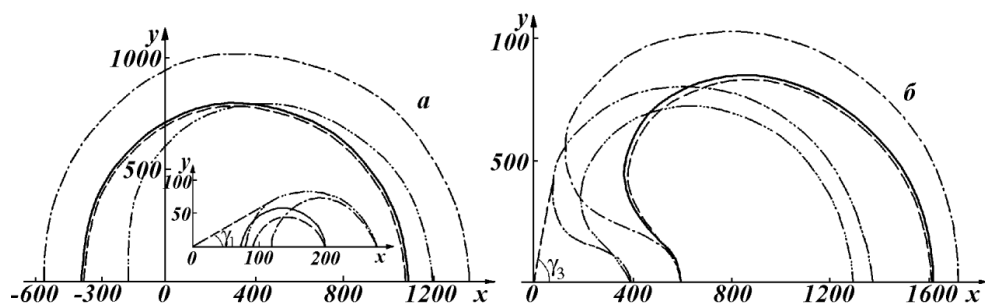


Рис. 5.4

Сплошные, штриховые и штрихпунктирные (с одной точкой) кривые на рис. 5.4, б характеризуют передние фронты волн ζ_2 , ζ_3 в случае $v = 15 \text{ м/с}$ при тех же h и σ , что и на рис. 5.4, а. Двойной и тройной пунктир соответствует здесь толщинам $h = 1$ и 10 м в случае $\sigma = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $v = 10 \text{ м/с}$.

Фронты волн ζ_4 , ζ_5 показаны на рис. 5.5 для скоростей 7 (кривые 1), 10 (кривые 2), 15 м/с (кривые 3). Сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые на этом рисунке иллюстрируют границы фазовых картин при значениях h и σ , что и на рис. 5.4. Линии с двойным и тройным

пунктиром характеризуют фронты соответственно при $h = 0$ и $h = 1$ м в случае нулевой частоты, а пунктирные – фронты при $h = 10$ м, $\sigma = 0.2 \text{ с}^{-1}$.

Для наглядности на каждом из рис. 5.4, 5.5 показана одна из угловых зон, характеризуемых величиной соответствующего γ_k .

Приведенные на рис. 5.4, 5.5 зависимости показывают, что при фиксированных h и σ увеличение скорости перемещения давлений обуславливает рост скоростей передних фронтов волн ζ_2 , ζ_4 , ζ_5 и уменьшение скорости фронта волн ζ_1 . Меняется при этом и скорость удаления границы области, занятой волнами ζ_3 . На одном участке границы она растет, а на другом убывает. Уменьшение характерно в направлении перемещения давлений, а увеличение в противоположном. Это иллюстрируют кривые, изображенные на рис. 5.4, 5.5 штрихом и штрихом с двойным пунктиром. На участке фронта слева от точки пересечения этих линий скорость удаления уменьшилась, а справа увеличилась.

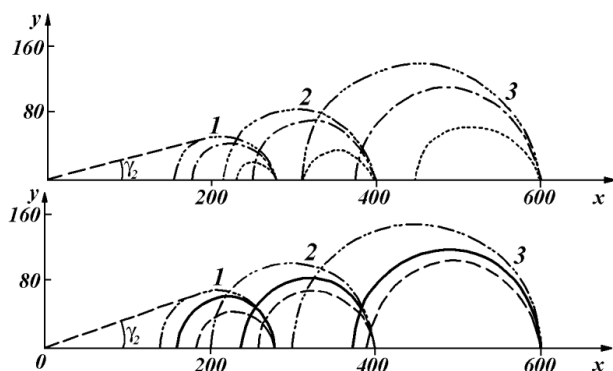


Рис. 5.5

С ростом толщины льда скорости фронтов волн ζ_1 , ζ_4 увеличиваются, а волн ζ_3 , ζ_5 убывают. Скорость фронта волн при этом уменьшается, если $0 < v < v_2$. В случае $v > v_2$ рост толщины льда влияет на скорость удаления границы области возмущений, обусловленных волнами ζ_2 , по разному на разных ее участках. В частности, при $\sigma = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $v = 10 \text{ м/с}$ с увеличением h от 1 до 10 м привело к тому, что скорость перемещения части фронта, расположенной в угловой зоне $|\gamma| < \gamma^*$, уменьшилась, а вне этой зоны увеличилась. Угол γ^* характеризуется прямой, соединяющей начало координат с точкой пересечения соответствующих фронтальных границ, которые показаны на рис. 5.4, б штрихом с двумя и тремя точками.

При увеличении частоты колебаний фронтальные скорости волн ζ_2 , ζ_4 растут, а волн ζ_1 , ζ_3 , ζ_5 – убывают.

Если давления перемещаются со скоростью $v_2 < v < v_0$, то непосредственно впереди по курсу их следования возмущения с порядком затухания $O(R^{-1/2})$ отсутствуют. Однако, фронт возмущений, двигаясь параллельным курсом, опережает давления (угол γ_3 тупой). С увеличением толщины льда опережение уменьшается. В частности для $t = 40$ с при $\sigma = 3 \text{ с}^{-1}$, $v = 8,5 \text{ м/с}$ опережение составляет 56 и 32 м для толщи льда 0 и 1 м соответственно.

5.2 Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны

Пусть на морской поверхности плавает сплошной упругий ледяной покров. Проведем исследование развития волнового возмущения, возбуждаемого движущейся с постоянной скоростью v областью давлений вида (5.1), предполагая, что до начала действия давлений жидкость подо льдом не возмущена, а поверхность лед-вода (прогиб льда) горизонтальна [69]. Задача заключается в нахождении потенциала скорости ϕ , удовлетворяющего уравнению Лапласа, граничным

$$D_1 \nabla^4 \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + (\phi_t + v \phi_x) \frac{1}{g} = -\frac{p}{\rho g} \quad z=0; \quad \phi_z = 0, \quad z = -H, \quad (5.4)$$

и начальным (5.3) условиями. Здесь, как и в (5.2),

$$F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

а D_1, χ_1, ∇^4 такие же, как и в (4.3).

Прогиб льда ζ и потенциал скорости ϕ при $z = 0$ связаны условием $\zeta_t = \phi_z - v \zeta_x$.

Методом интегральных преобразований Фурье по x, y и Лапласа по t для возвышения поверхности лед-вода получим

$$\zeta = \frac{a}{8\pi^2} e^{i\sigma t} \iint_{-\infty}^{\infty} f^*(m, n) M(r) \psi(m, n, t) e^{i(mx+ny)} dm dn,$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad a = \frac{p_0}{\rho g},$$

$$\tau(r) = [l(r)M(r)]^{1/2}, \quad l(r) = 1 + D_1 r^4, \quad r = (m^2 + n^2)^{1/2},$$

$$M(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \quad \Delta_j = \sigma + vm + \delta_j \tau, \quad \delta_j = (-1)^j,$$

$f^*(m, n)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$. Первое слагаемое в выражении ζ является решением рассматриваемой задачи без начальных условий, т.е. представляет установившиеся колебания. Второе и третье слагаемые определяются начальными условиями и характеризуют развитие волнового движения.

Так как

$$\psi = \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{\Delta_1} (1 - e^{-i\Delta_1 t}) - \frac{1}{\Delta_2} (1 - e^{-i\Delta_2 t}) \right], \quad \int_0^t e^{-i\Delta_j \xi} d\xi = -i(1 - e^{-i\Delta_j t}) / \Delta_j,$$

то ζ после перехода к полярным координатам в случае осесимметричного распределения давлений примет вид

$$\zeta = -\frac{a}{8\pi^2} \operatorname{Im}[e^{i\sigma t} (J_1 - J_2)],$$

$$J_j = \int_0^t \int_0^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r f^*(r)}{\tau(r)} M(r) e^{-i[r R \cos(\theta - \gamma) - \Delta_j \xi]} d\theta d\xi dr,$$

$$R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta.$$

Асимптотическое исследование выражения ζ при больших значениях R и t выполним методом стационарной фазы для многомерных интегралов. Стационарные точки (r, θ, ξ) для J_j удовлетворяют системе уравнений

$$R \cos(\theta - \gamma) - (v \cos \theta + \delta_j \tau') \xi = 0, \quad v \xi \sin \theta - R \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad (5.5)$$

$$\sigma + \delta_j \tau + v r \cos \theta = 0, \quad (5.6)$$

где штрих означает производную по r .

Уравнение (5.6) имеет вещественные корни

$$\theta = \pm \theta_j, \quad \theta_j = \arccos(-\delta_j \tau_j), \quad \tau_j = (\tau + \delta_j \sigma) / (v r)$$

при $|\tau_j| \leq 1$. После подстановки $\theta = \pm \theta_j$ в (5.5) найдем

$$\operatorname{tg} \gamma = \kappa_j(r), \quad \kappa_j = \tau'(1 - \tau_j^2)^{1/2} (v - \tau_j \tau')^{-1}, \quad (5.7)$$

$$\xi = R / u_j, \quad u_j = (v - \delta_j \tau') \cos^{-1} \gamma. \quad (5.8)$$

Из (5.7) определяются значения r , соответствующие стационарным точкам интегралов J_j , в установившемся и не установившемся режимах. Принадлежность стационарных точек области интегрирования определяется условием $0 \leq \xi \leq t$. Это условие и соотношение (5.8) характеризуют распространение колебаний.

Поведение функции $\kappa_1(r)$ для $0 < \sigma < \sigma_0$ и $\kappa_2(r)$ для $\sigma > 0$ в качественном отношении показано на рис. 5.6, а – ж при $0 < v < v_{01}$, $v_{01} < v < v_{11}$, $v_{11} < v < v_{02}$, $v_{02} < v < v_{10}$, $v > v_{10}$, $v_{03} < v < v_{12}$, $v > v_{12}$ соответственно. В случае $\sigma > \sigma_0$ графики $\kappa_1(r)$ при $0 < v < v_{11}$ и $v > v_{11}$ похожи на графики $\kappa_2(r)$ при $v_{03} < v < v_{12}$ и $v > v_{12}$. Здесь

$$\sigma_0 = [\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2)](\beta_2 - \beta_1)^{-1}, \quad v_{01} = \tau_5(\beta_2),$$

$$v_{02} = \tau_5(\beta_1), \quad v_{03} = \tau_6(\beta_3), \quad v_{11} = [\tau_7(\beta_4)]^{1/2}, \quad v_{12} = [\tau_8(\beta_6)]^{1/2},$$

$$v_{10} = [\tau_9(\beta_8)]^{1/2}, \quad \tau_{5,6} = (\tau \pm \sigma) / r, \quad \tau_7 = \tau_5^2 - r(\tau_5')^2 \tau' / \tau'',$$

$$\begin{aligned}\tau_8 &= \tau_6^2 - r(\tau_6')^2 \tau' / \tau'', \quad \tau_9 = \tau_5 \tau', \quad \tau_5'(\beta_{1,2}) = 0, \\ \tau_6'(\beta_3) &= 0, \quad \kappa_1''(\beta_{4,5}) = 0, \quad \kappa_2''(\beta_{6,7}) = 0, \quad \tau_9'(\beta_{8,9}) = 0, \\ \beta_1 &< \beta_2, \quad \beta_4 < \beta_5, \quad \beta_6 < \beta_7, \quad \beta_8 < \beta_9, \\ r_1 &< r_2 < \beta_1 < r_3 < \beta_2 < r_4, \quad r_5 < \beta_3 < r_6,\end{aligned}$$

r_k ($k = 1, 2, 3, 4$) – положительные корни уравнения $1 - \tau_1^2 = 0$, а $r_{5,6}$ – уравнения $1 - \tau_2^2 = 0$.

Из анализа поведения функций $\kappa_j(r)$ следует, что число k положительных корней α_{jk} уравнений (5.7) зависит от величины угла γ , частоты колебаний σ и скорости v перемещения давлений. Это видно из табл. 5.2, 5.3, где приведены значения k для α_{1k} и α_{2k} . Вследствие симметрии волнового движения относительно оси x в таблицах рассмотрены величины γ из диапазона $0 \leq \gamma \leq \pi$. Здесь $\gamma_2 = \arctg \kappa_1(\alpha_2)$, $\gamma_{11} = \arctg \kappa_2(\alpha_3)$, $\gamma_{22} = \arctg \kappa_2(\alpha_4)$, а по формуле $\gamma = \arctg \kappa_1(\alpha_1)$ определяется угол γ_1 , если $v_{11} < v < v_{02}$, и угол γ_3 , если $v > v_{02}$. Отметим, что

$$\kappa_1'(\alpha_{1,2}) = 0, \quad \kappa_2'(\alpha_{3,4}) = 0, \quad \alpha_1 < \alpha_2, \quad \alpha_3 < \alpha_4.$$

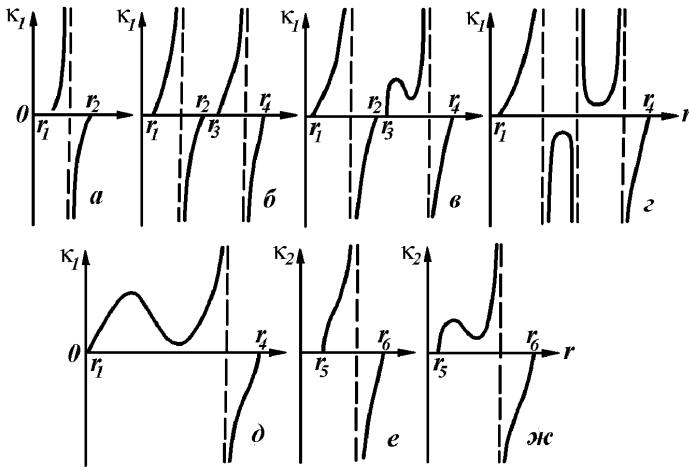


Рис. 5.6

При $\sigma > 0$ для α_{2k} справедливы оценки

$$r_5 \leq \alpha_{2,3} \leq r_6 \quad (v_{03} < v < v_{12}), \quad r_5 \leq \alpha_{21} \leq \alpha_3 \leq \alpha_{22} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \quad (v > v_{12}).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}r_1 &\leq \alpha_{14} \leq r_2 \quad (0 < v < v_{01}), \quad r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \quad (v_{01} < v < v_{11}), \\ r_1 &\leq \alpha_{15} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{11} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \quad (v_{11} < v < v_{02}), \\ r_1 &\leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \quad (v > v_{02})\end{aligned}$$

для $\sigma < \sigma_0$ и

$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2$ ($0 < \nu < \nu_{11}$), $r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_2$ ($\nu > \nu_{11}$)
для $\sigma > \sigma_0$.

Таблица 5.2

ν	γ	k	σ
$0 < \nu < \nu_{01}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	4	$0 < \sigma < \sigma_0$
$\nu_{01} < \nu < \nu_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	3, 4	
$\nu_{11} < \nu < \nu_{02}$	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	1, 4	
	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$	1, 2, 3, 4	
	$\gamma_1 < \gamma \leq \pi$	3, 4	
$\nu > \nu_{02}$	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	4	
	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$	2, 3, 4	
	$\gamma_3 < \gamma \leq \pi$	3	
$0 < \nu < \nu_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	4	$\sigma > \sigma_0$
$\nu > \nu_{11}$	$0 \leq \gamma < \gamma_2$	4	
	$\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$	2, 3, 4	
	$\gamma_3 < \gamma \leq \pi$	3	

Таблица 5.3

ν	γ	k	σ
$\nu_{03} < \nu < \nu_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	3	$\sigma > 0$
$\nu > \nu_{12}$	$0 \leq \gamma < \gamma_{22}$	1	
	$\gamma_{22} < \gamma < \gamma_{11}$	1, 2, 3	
	$\gamma_{11} < \gamma \leq \pi$	3	

Каждый корень α_{jk} уравнений (5.7) характеризует систему волн ζ_{jk} вида

$$\zeta_{jk} = \frac{1}{\sqrt{R}} \psi_j(\alpha_{jk}) \cos \left[R \Phi_j(\alpha_{jk}) + \sigma t + \delta_{jk} \frac{\pi}{4} \right] + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$\psi_j = -a f^*(r) M(r) [(1 - \tau_j^2) \tau \nu]^{-1} (2\pi |\Phi_j''|)^{-1/2},$$

$$\Phi_j = \delta_j r [(1 - \tau_j^2)^{1/2} \sin \gamma - \tau_j \cos \gamma],$$

$$j = 1, k = 1 - 4; \quad j = 2, k = 1, 2, 3; \quad \delta_{jk} = (-1)^{j+k} \quad (k \neq 4), \quad \delta_{14} = 1,$$

образующихся в областях $R < u_{jkt}$, $u_{jk} = u_j(\alpha_{jk})$ угловых зон, соответствующих диапазону изменения скорости перемещения области давлений (см. табл. 5.2, 5.3). Размеры угловых зон определяются величинами углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{11}, \gamma_{22}$.

Таким образом, при движении области давлений (5.1) может возбуждаться одна (ζ_{14}), две ($\zeta_{13}, \zeta_{14}; \zeta_{14}, \zeta_{23}$), три ($\zeta_{23}, \zeta_{1k}, k = 3, 4; \zeta_{1k}, k = 2 - 4$), четыре ($\zeta_{1k}, k = 1 - 4; \zeta_{23}, \zeta_{1k}, k = 2 - 4$), пять ($\zeta_{23}, \zeta_{1k}, k = 1 - 4$), шесть ($\zeta_{1k}, k = 2 - 4, \zeta_{2k}, k = 1 - 3$) или семь ($\zeta_{1k}, k = 1 - 4, \zeta_{2k}, k = 1 - 3$) систем волн с амплитудами порядка $R^{-1/2}$. Они формируют колебание ледяного

покрова (упругой пластинки) и волновое движение жидкости перед областью давлений и за ней.

Волны ζ_{14} , ζ_{21} , ζ_{22} обусловлены периодическими изменениями давлений со временем ($\sigma > 0$). Из них ζ_{21} имеют характер поперечных, а ζ_{22} продольных корабельных волн, возникающих в соответствующих угловых зонах за движущейся областью периодических давлений. Однако в случае упругой пластинки ($E > 0$) они образуются при $v > v_{12}$, а в жидкости с абсолютной гибкой пластинкой (битым льдом) ($E = 0$) или открытой поверхностью ($h = 0$) – при $v > 0$.

Волны ζ_{14} генерируются как при $v > 0$, так и в случае, когда область периодических давлений не перемещается. Они имеют вид кольцевых. Такие волны образуются и в жидкости с открытой поверхностью, и в жидкости с абсолютной гибкой пластинкой. В зависимости от скорости v волны ζ_{14} могут находиться вокруг области давлений ($v < v_{02}$) или в угловой зоне $|\gamma| < \gamma_3$ за ней ($v > v_{02}$). При $v_{02} < v < v_{10}$ непосредственно перед областью давлений по курсу ее следования волны ζ_{14} не образуются, а на параллельных этому курсу направлениях возмущения, обусловленные волнами ζ_{14} , опережают давления ($\gamma_3 > \pi/2$). При $v > v_{10}$ опережения нет ($\gamma_3 < \pi/2$).

Поперечными и продольными корабельными волнами являются соответственно и волны ζ_{11} , ζ_{12} , возникающие за движущейся областью возмущений. Они образуются и при движении по пластинке (свободной поверхности) области давлений постоянной интенсивности. В условиях упругой пластинки ζ_{11} и ζ_{12} генерируются при $v_{11} < v < v_{02}$ и $v > v_{11}$. В случае абсолютно гибкой пластинки или свободной поверхности ζ_{11} образуются при $0 < v < v_{02}$, а ζ_{12} – при $v > 0$.

Волны ζ_{13} , ζ_{23} изгибные. Они генерируются движущейся областью давлений только при наличии сплошной упругой пластинки ($E > 0$). Волны ζ_{13} образуются при $v > v_{01}$, а ζ_{23} – при $v > v_{03}$. Из них ζ_{13} возбуждаются давлениями переменной ($\sigma > 0$) и постоянной ($\sigma = 0$) интенсивности, а ζ_{23} – только при перемещении периодических по времени давлений. Направление гребней волны ζ_{13} и ζ_{23} характеризуют углы

$$\gamma_{01} = \arctg\left(\frac{v^2}{v_{01}^2} - 1\right)^{1/2}, \quad \gamma_{02} = \arctg\left(\frac{v^2}{v_{03}^2} - 1\right)^{1/2}.$$

Волны ζ_{13} при $v_{01} < v < v_{11}$ и ζ_{23} при $v_{03} < v < v_{12}$ находятся вокруг области давлений, а при $v > v_{11}$ и $v > v_{12}$ – в угловых зонах $\gamma_2 < |\gamma| \leq \pi$ и $\gamma_{22} < |\gamma| \leq \pi$.

Передние фронты возмущений ζ_{jk} ($j = 1, k = 1 - 4; j = 2, k = 1, 2, 3$) перемещаются со скоростью u_{jk} .

Для количественной оценки критических скоростей перемещения области, в окрестности которых меняется характер волнового движения, и размеров угловых зон, покрытых волнами, проводились численные расчеты для ледяной пластинки. При этом модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона ледяной пластинки принимались равными $3 \cdot 10^9$ Н/м², 870 кг/м³, 0.34, а плотность и глубина жидкости – 10^3 кг/м³ и 100 м. Распределение v_{jk} ($j = 0, k = 1, 2, 3; j = 1, k = 0, 1, 2$) по частоте колебаний при $h = 0.2$ м показано на рис. 5.7, где штриховыми и штрихпунктирными линиями 1 представлены скорости v_{02} , v_{03} , а 2 – скорости v_{10} , v_{12} . Пунктирная линия характеризует v_{01} , а сплошная – v_{11} . Квадратом на оси σ отмечено значение σ_0 .

Из рис. 5.7 следует, что v_{12} , v_{03} растут с увеличением σ . Скорости v_{01} , v_{02} , v_{10} убывают при этом, а v_{11} имеет минимум. При движении по сплошной упругой пластинке области давлений постоянной интенсивности ($\sigma = 0$) есть три критических значения v : $v_0 = v_{01} = v_{03}$, $v_1 = v_{11} = v_{12}$, $\sqrt{gH} = v_{10} = v_{02}$. В случае абсолютно гибкой пластинки (битого льда) или открытой поверхности жидкости для движущейся области периодических давлений критическими скоростями будут v_{02} и v_{10} , убывающие с ростом σ , а для области давлений постоянной интенсивности есть только одна критическая скорость $v = \sqrt{gH}$.

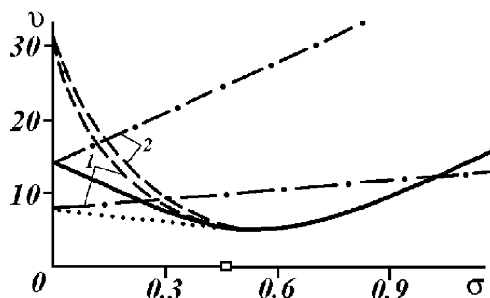


Рис. 5.7

Скорости v_{01} , v_{02} , v_{03} критические и при перемещении по упругой пластинке (сплошному льду) плоского фронта периодических давлений. Если по упругой пластинке движется плоский фронт давлений постоянной интенсивности, то критическими будут $v = v_0$ и $v = \sqrt{gH}$. В жидкости с абсолютно гибкой пластинкой (битым льдом) или открытой поверхностью для плоского фронта периодических давлений критической будет скорость $v = v_{02}$, а для плоского фронта постоянных давлений – $v = \sqrt{gH}$.

Зависимость размеров угловых зон, покрытых волнами, от частоты колебаний и скорости перемещения области давлений приведена на рис. 5.8 – 5.10 при $h = 0.2$ м.

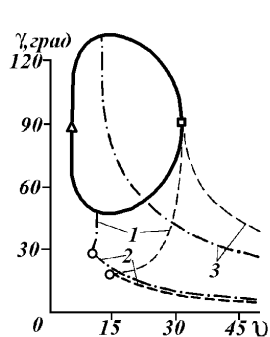


Рис. 5.8

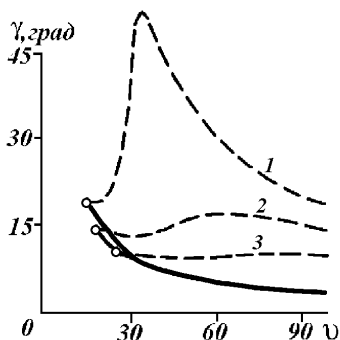


Рис. 5.9

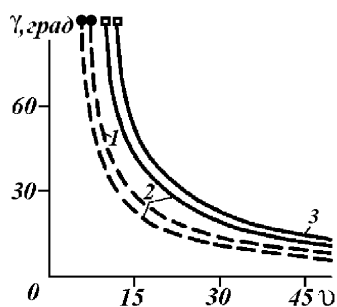


Рис. 5.10

Распределение γ_k ($k = 1, 2, 3$) по скорости υ представлено на рис. 5.8, где штриховые и штрихпунктирные кривые отвечают значениям частоты $\sigma = 0$ и 0.2 с^{-1} , линии 1–3 соответствуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Верхняя часть замкнутой сплошной кривой между треугольником и квадратом представляет максимальные значения угла γ_3 , а нижняя – угол γ_1 . Эти значения достигаются при $\upsilon = \upsilon_{02}$. Квадратом и треугольником помечены максимальные величины углов $\gamma_{1,3}$, отвечающие частотам $\sigma = 0$ и σ_0 . Значения, помеченные кружками, достигаются при $\upsilon = \upsilon_{11}$. Приведенные на рис. 5.8 зависимости показывают, что с увеличением υ углы γ_2, γ_3 убывают, а γ_1 растет для частот, меньших величины σ_0 , которая для рассматриваемых значений исходных параметров $\sim 0.46 \text{ с}^{-1}$. Большей частоте отвечает меньший угол γ_3 и большие углы $\gamma_{1,2}$. Отметим, что для частот $\sigma > \sigma_0$ углы γ_2, γ_3 также убывают с ростом υ . Увеличение σ в этом случае приводит к уменьшению не только γ_3 , но и γ_2 .

На рис. 5.9 дано распределение γ_{11} (штриховые линии) и γ_{22} (сплошные) по скорости υ , линии 1–3 соответствуют частотам 0.01, 0.2, 0.5 с^{-1} . Кружками отмечены значения углов при $\upsilon = \upsilon_{12}$. Эти зависимости показывают, что γ_{22} убывает с ростом υ и σ . Убывает с увеличением частоты и угол γ_{11} . Как функция υ угол γ_{11} имеет экстремумы, величина и расположение которых зависят от σ . При $\sigma = 0$ часть кривой $\gamma_{11}(\upsilon)$ справа от вершины максимума совпадает с $\gamma_3(\upsilon)$, а часть кривой слева от вершины – с функцией $\gamma_1(\upsilon)$ (см. рис. 5.8). Угол γ_{22} при этом совпадает с γ_2 .

Углы γ_{01} и γ_{02} убывают с ростом υ . Это иллюстрируется на рис. 5.10, где $\gamma_{01}(\upsilon)$ изображено штриховыми, а $\gamma_{02}(\upsilon)$ – сплошными линиями, 1 – 3 отвечают частотам 0.2, 0.4, 0.8 с^{-1} . Значения в кружках достигаются при

$v = v_{01}$, а в квадратах – при $v = v_{03}$. Из рис. 5.10 следует также, что увеличение σ привело к уменьшению γ_{01} и росту γ_{02} . Если $\sigma = 0$, то $\gamma_{01} = \gamma_{02}$.

5.3 Влияние неравномерного ледового сжатия на структуру изгибно-гравитационных волн

Рассмотрим структуру установившихся изгибно-гравитационных возмущений, формируемых при движении по сплошному ледяному покрову области давлений вида

$$p = p_0 f(x - vt, y) \exp(-i\sigma t), \quad (5.9)$$

в условиях неравномерного ледового сжатия [47]. Лед плавает на поверхности стационарного потока. Область давлений перемещается с постоянной скоростью v под углом α к направлению потока. В системе координат $x_1 = x - vt$, y , z , связанной с движущейся областью давлений (5.9), задача о колебаниях малой амплитуды сводится к решению уравнения Лапласа с граничными условиями

$$\begin{aligned} L\zeta + (1/g)F\varphi &= p_1 f(x, y) \exp(-i\sigma t), \quad z = 0, \\ F\zeta &= \partial\varphi/\partial z, \quad z = 0; \quad \partial\varphi/\partial z = 0, \quad z = -H. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L &= D_1 \nabla^4 + Q_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2Q_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \chi_1 F^2 + 1, \\ F &= \frac{\partial}{\partial t} + (u_x + v) \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad u_x = u \cos \alpha, \quad u_y = u \sin \alpha, \\ \{Q_1, Q_2, Q_3, p_1\} &= \frac{1}{\rho g} \{Q_x, Q_y, Q_{xy}, p_0\}, \end{aligned}$$

Q_x, Q_y, Q_{xy} – сжимающие усилия по соответствующим направлениям, u – модуль вектора скорости потока, ζ – прогиб льда (поверхности лед-вода). Индекс 1 при x_1 опущен. Другие обозначения приведены в (4.3).

Решая задачу методом интегрального преобразования Фурье для прогиба льда ζ , получим выражение

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{p_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{f^*(m, n) M(r)}{\tau^2 - \sigma_0^2} \exp[i(mx + ny - \sigma t)] dm dn, \\ \tau^2 &= M(r) l(m, n), \quad M(r) = (1 + \chi_1 r g \operatorname{th} rH)^{-1} r g \operatorname{th} rH, \\ l(m, n) &= 1 + D_1 r^4 - Q_1 m^2 - Q_2 n^2 - 2Q_3 mn, \\ \sigma_0 &= \sigma - (u_x + v)m - u_y n, \quad r^2 = m^2 + n^2 \end{aligned}$$

($f^*(m, n)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$).

Отсюда в полярных координатах для прогиба льда ζ получим выражение

$$\zeta = \frac{p_1}{2\pi} e^{-i\sigma t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{r f^*(r, \theta) M(r)}{\tau^2 - \sigma_0^2} \exp[iRr \cos(\theta - \gamma)] dr d\theta, \quad (5.11)$$

$$\tau^2 = M(r)l(r, \theta),$$

$$l(r, \theta) = 1 + D_1 r^4 - r^2 [Q_1 - (Q_2 - Q_1) \sin^2 \theta + Q_2 \sin 2\theta],$$

$$\sigma_0 = \sigma - r[u \cos(\alpha - \theta) + v \cos \theta], \quad x = R \cos \gamma,$$

$$y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta.$$

Уравнение $\tau^2 - \sigma_0^2 = G(m, n) = 0$, связывающее волновое число r с частотой σ , скоростью потока u , скоростью перемещения источника возмущений v , определяет годограф волнового вектора в плоскости (m, n) . Установившиеся волновые возмущения в дальней зоне, описываемые выражением (5.11), характеризуются [190, 196] координатами (m, n) точек годографа $G(m, n) = 0$.

Точка (x, y) на гребне волнового возмущения удаляется с групповой скоростью от источника в направлении вектора $X = xi + yj$, составляющего угол γ с осью абсцисс. Так как гребни являются линиями равной фазы колебаний, то

$$mx + ny = \text{const}. \quad (5.12)$$

Отсюда

$$\frac{dm}{dr}x + \frac{dn}{dr}y = 0, \quad (5.13)$$

и вектор X ортогонален вектору $K = \frac{dm}{dr}i + \frac{dn}{dr}j$, касательному к годографу. Дифференцируя уравнение годографа $G(m, n) = 0$ по r как неявную функцию, получим

$$\frac{dG}{dm} \frac{dm}{dr} + \frac{dG}{dn} \frac{dn}{dr} = 0. \quad (5.14)$$

Следовательно, вектор нормали к годографу $\bar{G} = \frac{dG}{dm}i + \frac{dG}{dn}j$ перпендикулярен K , и из (5.13) и (5.14) видно, что групповая скорость волнового возмущения направлена вдоль $\bar{G}$. Направление фазовой скорости в физической плоскости совпадает с направлением вектора волнового числа и составляет с осью абсцисс угол θ . Так как $mx + ny = (mi + ny)(xi + yj)$, то дифференцированием по R , получим

$$(mi + nj) \left(\frac{dx}{dR}i + \frac{dy}{dR}j \right) = 0.$$

Это означает ортогональность волнового вектора и касательной к линии равной фазы. Отсюда следует, что и фазовая скорость направлена по нормали к гребню (впадине) волнового возмущения. Таким образом, угол между направлениями групповой и фазовой скоростей можно

определить по годографу. Он равен $\theta - \gamma$, где $\theta = \arctg(m/n)$, $\gamma = \arctg\left(\frac{dG}{dn}/\frac{dG}{dm}\right)$. Для построения гребней изгиба льда (возмущений жидкости) откладываем от начала координат в направлении групповой скорости отрезки длиной $(2\pi k + \psi)[r \cos(\theta - \gamma)]^{-1}$. Здесь r и соответствующие ему θ и γ определяются по координатам точек годографа, k – номер гребня, ψ – фазовый сдвиг. При этом $\psi = -5\pi/4$, если линия годографа выпуклая в направлении внешней нормали и $\psi = -3\pi/4$ – если вогнутая. Монотонность изменения θ при движении по годографу нарушается в точках перегиба. Соответствующие им значения θ определяют на фазовом портрете границы угловых зон, на которых волновые возмущения затухают с удалением от источника как $R^{-1/3}$. Внутри угловых зон возмущения имеют порядок затухания $O(R^{-1/2})$, а вне их $O(R^{-1})$.

Рассмотрим источник возмущений постоянной интенсивности ($\sigma = 0$), перемещающийся по поверхности ледяной пластины при отсутствии дрейфа ($u = 0$). Тогда уравнение годографа можно привести к виду

$$m = \left\{ [S_1 S_2 + 2S_3 [S_3 r^2 \pm (S_3^2 r^4 + S_1 S_2 r^2 - S_1^2)^{1/2}]] (S_2^2 + 4S_3^2)^{-1} \right\}^{1/2},$$

$$n = \pm (r^2 - m^2)^{1/2} \text{sign } Q_3,$$

$$S_1 = rg(1 + D_1 r^4 + Q_2 r^2) \text{th } rH,$$

$$S_2 = v^2(1 + \chi_1 rg \text{th } rH) + (Q_1 - Q_2)rg \text{th } rH,$$

$$S_3 = Q_3 rg \text{th } rH.$$

Верхний и нижний знаки при n и в квадратных скобках выражения m относятся к дугам годографа, лежащим соответственно выше и ниже оси абсцисс. Годограф определен при $v > v_0$, где

$$v_0 = \Phi(r_0), \Phi'(r_0) = 0, \Phi(r) = \frac{1}{r} \left\{ M(r) \left[(1 + D_1 r^4 - Q_1 r^2) - \frac{(r^2 Q_3)^2}{1 + D_1 r^4 - Q_2 r^2} \right] \right\}^{1/2}.$$

Если $Q_3 = 0$, то $m = (S_1/S_2)^{1/2}$, $n = \pm (r^2 - m^2)^{1/2}$ и годограф симметричен относительно оси абсцисс. Причем Q_2 не влияет на v_0 , а зависимость этой критической скорости от Q_1 рассмотрена в разделе 3.3.

Для исследования зависимости годографа и структуры волновых возмущений от величин продольного, поперечного и сдвигового сжимающих усилий проводились численные расчеты при различных скоростях перемещения источника возмущений для значений $E = 5 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $H = 350 \text{ м}$, $h = 2.5 \text{ м}$, $v = 0.34$, $\rho_1 = 870 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $\rho = 1025 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$.

Анализ результатов численного счета показал, что при $Q_3 \neq 0$ распределение v по Q_1 качественно аналогично распределению в случае равномерного сжатия. Количественная зависимость v_0 от Q_1 для $Q_2 = 0$, $Q_3 \geq 0$ дана в таблице, где $Q_0 = \sqrt{D_1}$. Роль Q_3 независимо

Таблица 5.4

Q_1/Q_0	Q_3/Q_0		
	0	1	1.5
-2	29.065	28.037	26.196
-1.5	27.589	26.309	24.061
-1	25.915	24.332	21.593
-0.5	24.011	22.039	18.668
0	21.797	19.318	15.030
0.5	19.157	15.959	9.227
1	15.869	11.413	0
1.5	11.381	0	0
2	0	0	0

от его знака проявляется в уменьшении v_0 . Поперечное сжатие (растяжение) при учете сдвиговых усилий ($Q_3 \neq 0$) уменьшает (увеличивает) v_0 , причем влияние Q_2 усиливается с ростом Q_3 . Распределение v_0 по Q_2 и Q_3 иллюстрирует рис. 5.11 (сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные линии отвечают $Q_1 = Q_3 = 0$; $Q_1 = 0, Q_3 = 0$; $Q_1 = 0, Q_3 = (3/2)Q_0$; $Q_1 = Q_3 = Q_0$ (а), $Q_1 = Q_2 = 0$; $Q_1 = 0, Q_2 = (3/2)Q_0$; $Q_1 = (3/2)Q_0, Q_2 = 0$; $Q_1 = Q_2 = (3/2)Q_0$ (б)). Видно, что при наличии сдвиговых усилий возможны условия генерации волновых возмущений источником, движущимся с любой ненулевой скоростью.

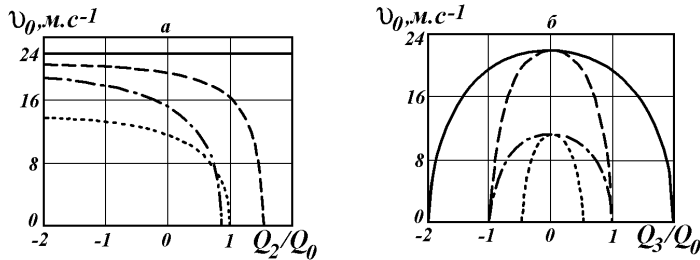


Рис. 5.11

Годографы волнового вектора без учета и с учетом сдвиговых усилий представлены соответственно на рис. 5.12, 5.13 при $v = 45 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ из диапазона $v_0 < v < C$ ($C = \sqrt{gH}$). Линии 1–5 соответствуют $Q_1 = Q_2 = 0$; $Q_1 = -Q_0, Q_2 = Q_0$; $Q_1 = 2Q_0, Q_2 = 0$; $Q_1 = 0, Q_2 = 1.9Q_0$; $Q_1 = Q_0, Q_2 = -Q_0$ (рис. 5.12) и $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$; $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_0$; $Q_1 = Q_2 = 0, Q_3 = Q_0$; $Q_1 = Q_2 = 0, Q_3 = 2Q_0$; $Q_1 = 0, Q_2 = 1.9Q_0, Q_3 = 1.5Q_0$ (рис. 5.13).

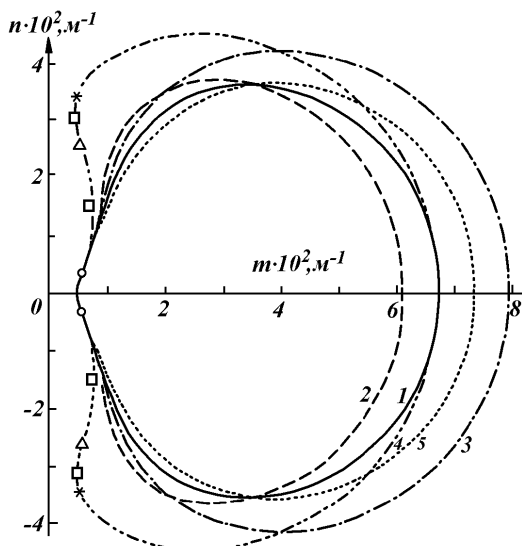


Рис. 5.12

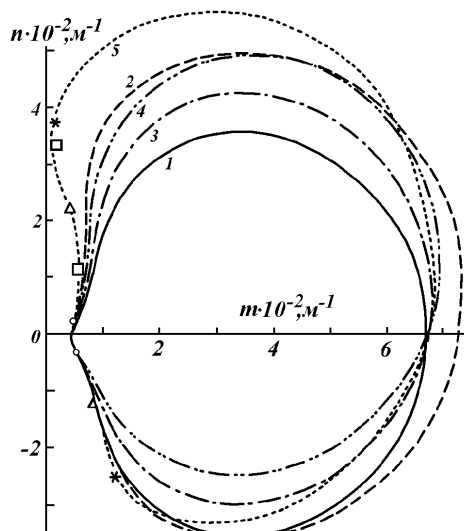


Рис. 5.13

Видно, что для всех годографов характерно наличие двух точек перегиба как в верхней, так и в нижней полуплоскости. На годографах, где прогибы выражены особенно ярко, эти точки отмечены кружками и треугольниками, а звездочки — точки касания годографа и луча, выходящего из начала координат. Уменьшение ν приводит к сближению точек перегиба на дугах годографа в верхней и нижней полуплоскостях. Слияние этих точек для $Q_3 = 0$ происходит при скорости $\nu = \nu_1$, определяемой из системы уравнений

$$n''m' - n'm'' = 0, \quad n'''m' - n'm''' = 0 \quad (5.15)$$

относительно r и ν (штрих означает производную по r). При равномерном сжатии формула для ν_1 приведена в разделе 4.3. Сдвиговые усилия обуславливают неоднозначность решения системы (5.15), вследствие чего значения ν_1 для верхней ν_1^* и нижней ν_1^0 дуг годографа различны. Если $Q_3 > 0$, то $\nu_1^* < \nu_1^0$ и $\nu_1^* > \nu_1^0$ для $Q_3 < 0$. При выполнении условия $\nu < \nu_1$ на дугах годографа отсутствуют точки перегиба. Площадь, ограниченная годографом, убывает с уменьшением ν стремящейся к ν_0 .

С увеличением ν участок годографа между кружками стягивается в точку, приближающуюся к началу координат при стремлении ν к C . Для $\nu > C$ годограф проходит через начало координат, а на его дугах сохраняется только по одной точке перегиба, обозначенной треугольником. При этом касательные к дугам годографа в начале координат образуют с осью абсцисс угол $\psi = \pm \arctg \sqrt{(\nu/C)^2 - 1}$. Расстояние между точками пересечения годографа с осью m растет (убывает) при увеличении про-

дольного сжатия (растяжения). Поперечное сжатие деформирует годограф таким образом, что на нем могут появиться (при выполнении условия $m' = m'' = 0$) точки с перпендикулярной к оси абсцисс касательной. Они обозначены квадратами. При отсутствии сдвигового сжатия эти точки появляются, если

$$Q_1 \geq Q_1^*, \quad Q_1^* = Q_2 - \tau_1(r^*, Q_2),$$

$$\tau_1(r, Q_2) = v^2 \left(\chi_1 + \frac{1}{rg \operatorname{th} H} \right) \left[1 - \frac{1 - Q_2 r^2 + D_1 r^4}{2r^2 (2D_1 r^2 - Q_2)} \left(1 - \frac{2rH}{\operatorname{sh} 2rH} \right) \right],$$

где r^* – положительный корень уравнения

$$\tau_2(r, Q_2) + 2\tau_3(r, Q_2) = 0, \quad \tau_2 = (2rH + \operatorname{sh} 2rH)(4Q_2 r - 6D_1 r^3 - \tau_1 \tau_4'),$$

$$\tau_3 = (Q_2 - 4D_1 r^2) r \operatorname{sh} 2rH - (1 + D_1 r^4 - Q_2 r^2 - \tau_1 \tau_4)(3 - 2rH \operatorname{th} rH)H,$$

$$\tau_4 = (1 + D_1 r^4 - Q_2 r^2)[v^2 + (\chi_1 v^2 - \tau_1)rg \operatorname{th} rH]^{-1} rg \operatorname{th} rH.$$

Распределение Q_1^* по Q_2 иллюстрирует рис. 5.14, где кривые 1, 2 отвечают значениям скорости источника 30 и 45 м·с⁻¹, сплошные и штриховые линии даны для глубин бассейна 350 и 50 м. Графики зависимости Q_1^* от Q_2 для различных v пересекаются в точке, соответствующей $Q_1^* = Q_2$.

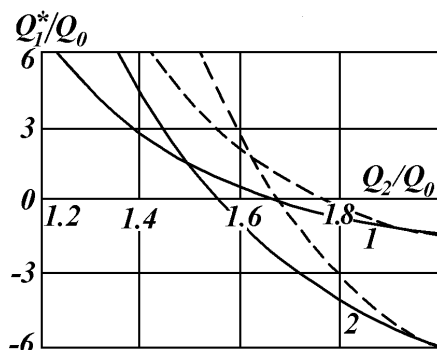


Рис. 5.14

Это значение совпадает с критическим усилием Q^* в условиях равномерного сжатия. Если волны короткие, то $Q^* = \frac{\sqrt{20}}{3} Q_0$. В случае длинных волн $Q^* = \sqrt{3} Q_0$. Уменьшение глубины бассейна приводит к незначительному росту Q^* .

В условиях сдвигового сжатия нет симметрии расположения точек с вертикальной касательной относительно оси абсцисс для верхней и нижней дуг годографа. При этом возможно наличие таких точек только на одной из дуг (кривая 5 на рис. 5.13).

Проведем анализ структуры фазовых портретов по соответствующим годографам. При $v_0 < v < C$ участок дуги годографа (см. рис. 5.12,

5.13) справа от звездочек характеризует изгибную волну перед источником, а слева – изгибно-гравитационную в следе за ним. Если при этом $v > v_1$, то внешние нормали в точках, обозначенных кружками, характеризуют внешние, а треугольниками – внутренние границы угловых зон корабельного следа с трехволновыми возмущениями. Между указанными внутренними границами возмущения формируются только поперечными гравитационными волнами. Изгибные волны в волновом следе характеризуются участками дуг между треугольниками и звездочками, а бегущие впереди источника – участками справа от звездочек. При отсутствии сдвиговых усилий структура фазовых портретов качественно такая же, как при равномерном сжатии. Причем рост Q_1 уменьшает длины волн (изгибных в большей мере, чем гравитационных) на трассе движения источника.

Зона волнового следа, покрытая только поперечными волнами, с увеличением сжимающего усилия Q_2 сужается за счет смещения внутренних границ области с трехволновыми возмущениями; при $Q_1 = Q_1^*$ она исчезает. С дальнейшим увеличением сжимающих усилий рассматриваемые границы уходят за трассу. Вследствие этого в окрестности трассы происходит наложение друг на друга частей правой и левой зон с тремя системами волн (см. раздел 4.3). Возмущения в зоне перекрытия характеризуются на рис. 5.12, 5.13 участками годографа между прямоугольниками. Ближние к оси абсцисс прямоугольники соответствуют пересечению гребней продольной, а дальние – изгибных волн с трассой. Смещение внешней границы области трехволновых возмущений под влиянием Q_2 незначительно. Слабо влияет на размеры угловых зон и усилие Q_1 .

Фазовые картины волновых возмущений в условиях сдвигового сжатия ($Q_3 > 0$), соответствующие годографам 2, 5 из рис. 5.13, представлены на рис. 5.15, 5.16 при $\max(v_1^*, v_1^0) < v < C$. Внешние и внутренние границы угловых зон изображены сплошными и штриховыми жирными линиями. Изгибным, продольным и поперечным волнам отвечают сплошные, штриховые и штрихпунктирные тонкие линии. Видна несимметричность волнового следа относительно курса движения источника. Угловая зона с трехволновым возмущением (рис. 5.15) слева по курсу бóльшая, чем справа. Ее внутренняя граница расположена ближе к трассе, приближаясь к ней с ростом как Q_3 , так и Q_2 . Возможны такие значения сжимающих усилий Q_3 , Q_2 , что эта граница смещается за трассу, в то время как внутренняя граница правой зоны до трассы не доходит (рис. 5.16).

Фазовые картины при $Q_3 < 0$ симметричны приведенным для $Q_3 > 0$ относительно трассы. Отметим, что при $Q_3 > 0$ в диапазоне $v_1^0 < v < v^*$ угловая зона генерации трех систем волн возникает только слева, а для

$Q_3 < 0$ и $v_1^* < v < v_1^0$ – справа от трассы по направлению движения источника. При $v > C$ в следе за источником поперечные гравитационные волны не возбуждаются.

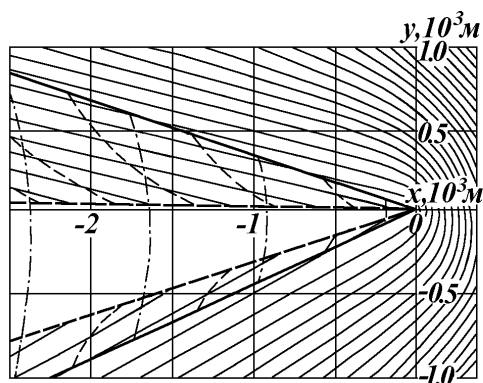


Рис. 5.15

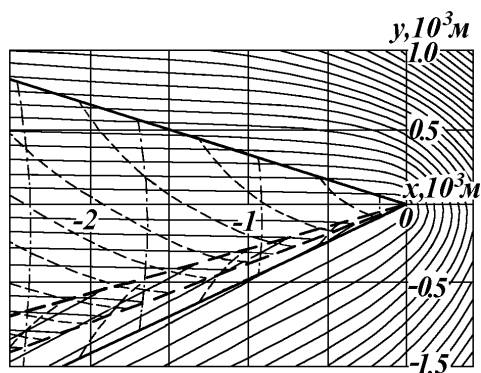


Рис. 5.16

Пусть теперь источник движется по дрейфующему льду под углом α к направлению дрейфа. Повернем систему координат на угол $\beta = \arctg [(u \sin \alpha) / (v + u \cos \alpha)]$. В полученной системе источник будет двигаться со скоростью $U_0 = [(v + u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha)^2]^{1/2}$ вдоль новой оси абсцисс, а величины продольного, поперечного и сдвигового усилий примут значения

$$Q_{1\beta} = Q_1 \cos^2 \beta + Q_2 \sin^2 \beta + Q_3 \sin 2\beta,$$

$$Q_{2\beta} = Q_1 \sin^2 \beta + Q_2 \cos^2 \beta - Q_3 \sin 2\beta,$$

$$Q_{3\beta} = (1/2)(Q_2 - Q_1) \sin 2\beta + Q_3 \cos 2\beta.$$

Анализ годографа волнового вектора и фазовой структуры волновых возмущений в новой системе координат проводится, как и при отсутствии потока для $v = U_0$, $Q_i = Q_{i\beta}$, $i = 1, 2, 3$.

5.4 Влияние вязко-упругих свойств снежно-ледового покрова на структуру волновых возмущений

Рассмотрим влияние упругих и вязких свойств плавающего снежно-ледового покрова на структуру установившихся поверхностных волн малой амплитуды, возбуждаемых в бассейне постоянной глубины H движущейся областью давлений (5.9). Снежно-ледовый покров будем рассматривать как плавающую упругую пластину толщиной h с находящимся на ее поверхности слоем снега толщиной h_1 . Плотность и коэффициент внутреннего трения снега обозначим через ρ_0 и η , а плот-

ность льда через ρ_1 . Тогда уравнение колебаний снежно-ледового покрова запишем в виде

$$D_1 \nabla^4 \zeta + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \eta_1 h_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta_l \zeta = p_1 + q_1, \quad (5.16)$$

где

$$\nabla^4 = \Delta_l^2, \quad \Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad p_1 = \frac{p}{\rho g}, \quad q_1 = \frac{q}{\rho g},$$

ρ – плотность воды, g – ускорение силы тяжести, q – гидродинамическое давление на нижнюю поверхность льда, ζ – возвышение поверхности лед-вода, а обозначения D_1 , χ_1 , η_1 приведены в (2.3).

В предположении потенциальности движения жидкости подо льдом задача заключается в решении уравнения Лапласа с соответствующими граничными условиями. На дне ($z = -H$) удовлетворим условию непротекания, а в качестве динамического условия на поверхности бассейна ($z = 0$) рассмотрим уравнение (5.16) колебаний снежно-ледового покрова, учитывающее действие внешней нагрузки p вида (5.9) и гидродинамического давления $q = -\rho(g\zeta + \phi_t)$. Безотрывность колебаний льда обеспечим выполнением кинематического соотношения $\zeta_t = \phi_z$ при $z = 0$

Решая задачу методом интегрального преобразования Фурье в системе координат $x_1 = x - vt$, y , z , связанной с движущейся областью давлений, получим для прогиба снежно-ледового покрова выражение

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{p_1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^*(m, n)}{G(m, n)} M(r) \exp[i(mx + ny - \sigma t)] dm dn, \\ G(m, n) &= \tau_0^2 - (\sigma_0 - i\mu^* M)^2, \quad \tau_0^2 = \tau^2 - (\mu^* M)^2, \\ \tau^2 &= (1 + D_1 r^4) M, \quad \sigma_0 = \sigma - vm, \quad \mu^* = 0.5\eta_1 h_1 r^2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

а M , r , f^* те же, что и в (5.11).

При отсутствии трения ($\eta = 0$) функция $G(m, n)$ действительная и уравнение $G = 0$, связывающее волновое число r с частотой σ и скоростью перемещения давлений v , определяет годограф волнового вектора в плоскости (m, n) . Следовательно, установившееся волновое возмущение в дальней зоне, описываемое выражением (5.17), характеризуется координатами m и n точек годографа [53, 194].

Для вязко-упругого случая ($\eta \neq 0$) функция $G(m, n)$ комплексная и полюсами подынтегрального выражения (5.17) являются комплексные корни $r = k + i\varepsilon$ уравнения $G(m, n) = 0$. Их реальные части можно найти из уравнения

$$\tau^2(k, 0) - \sigma_0^2(k, 0) - \sigma_1^2(k, 0) = 0. \quad (5.18)$$

Здесь $\sigma_1 = 0.5\eta_1 h_1 k^2 M$ величина, характеризующая скорость затухания возмущений во времени.

Величину проекции коэффициента пространственного затухания на направление нормали к вязко-упругому годографу в предположении слабой диссипации определим [178].

$$l = \text{Im } G(k, 0) \left| \text{grad Re } G(k, 0)^{-1} \right|. \quad (5.19)$$

Рассмотрим возмущения, возбуждаемые движущимся источником постоянной со временем интенсивности в бассейне с плавающей смесью измельченного льда с шугой и снежурой [117]. В таких условиях установившееся волновое движение характеризуется выражениями (5.17) – (5.19) при $\sigma = 0$, $E = 0$, $h = 0$. Количественный анализ проведем при $H = 10^3$ м, $\eta = 4.7 \cdot 10^6$ Па·с, $\rho_2 = 250$ кг/м³. Зависимость соответствующего годографа волнового вектора от скорости перемещения генератора и толщины вязкого слоя иллюстрируются графиками на рис. 5.17, а. Здесь сплошными линиями изображен годограф при $h_1 = 0.5$ м, а штриховыми – при $h_1 = 1$ м. Номера 1, 2, 3 отвечают значениям скорости генератора 10, 20, 50 м/с.

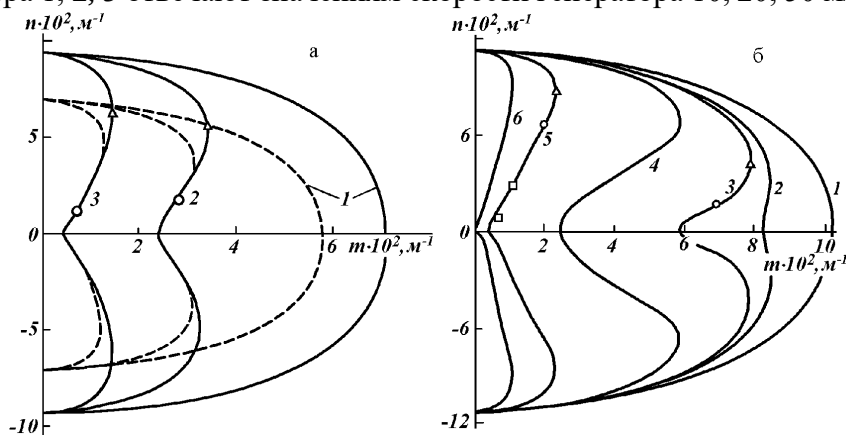


Рис. 5.17

Видно, что с увеличением толщины рассматриваемого вязкого слоя площадь, ограниченная кривой волнового числа, убывает. Это свидетельствует об уменьшении диапазона волновых чисел генерируемых установившихся возмущений. В то же время изменение скорости перемещения источника может привести к существенной деформации годографа. Для $v_0 < v < C$, где $C = \sqrt{gH}$, годограф (кривые 2, 3) в верхней ($n > 0$) и нижней ($n < 0$) полуплоскостях имеет точки перегиба и точки с касательной, параллельной оси n . Они обозначены кружками и треугольниками соответственно. Здесь

$$v_0 = F(k_1), \quad F(k) = \left[\tau_0^2 k^{-2} - \tau_0' (k \tau_0' - \tau_0)^2 (k^3 \tau_0'')^{-1} \right]^{1/2}, \quad (5.20)$$

k_1 – корень уравнения $\tau_0(k) = 0$, штрих означает производную по k .

При $v \rightarrow C$ точки перегиба стягиваются к оси m , приближаясь к началу координат. В диапазоне скорости $v \geq C$ годограф проходит через начало координат, а ограниченная им площадь убывает с ростом v . Если $v \rightarrow v_0$, то в каждой из полуплоскостей точка перегиба и точка с параллельной оси касательной вырождается в одну, приближающуюся к оси m , а годограф приобретает форму, представленную кривыми 1. Такой вид годографа сохраняется в диапазоне скоростей $0 < v < v_0$. Значение v_0 увеличивается с ростом коэффициента трения η и толщины вязкого слоя. В частности, v_0 равно 11.14, 12.78 м/с при толщинах вязкого слоя 0.5 и 1 м соответственно (рис. 5.17, *a*). Если при этом $\eta = 2 \cdot 10^4$ Па·с, то критическими скоростями будут 3.63, 4.11 м/с.

Анализ структуры фазовых портретов и соответствия их особенностей характерным чертам годографа проведем при слабой диссипации, используя известные соотношения, связывающие уравнения кривой волнового вектора и линий постоянной фазы. Построенные по результатам численных расчетов линии первых в волновом следе гребней возмущений обозначены номерами 1, 2, 3 на рис. 5.18 для $h_1 = 1$ м, $\eta = 4.7 \cdot 10^6$ Па·с и значений скорости перемещения источника 10, 15, 20 м/с. Сплошная кривая 1 характеризует здесь волны, обусловленные вязкостью. Штриховые и пунктирные участки линий 2, 3 представляют гравитационные поперечные и продольные, а сплошные – продольные гравитационно-вязкие корабельные волны.

Эти графики показывают, что при $v < v_0$ структура возбуждаемых волн определяется трением в вязком слое. Если $v_0 < v < C$, то кроме гравитационно-вязких волн в следе генерируются и гравитационные волны типа корабельных. Их угловая зона, ограниченная прямыми проходящими через начало координат и точки слияния гребней (впадин) продольных и поперечных волн, растет с увеличением скорости перемещения источника, приближаясь к величине предельного угла следа в жидкости при отсутствии вязкого слоя. При этом точка, разделяющая гравитационные и гравитационно-вязкие участки гребней продольных волн, лежащая в волновом следе на трассе за источником (треугольник на годографе), и гребень поперечных волн удаляются от источника. В диапазоне $v > C$ поперечные волны не возбуждаются, а волновой след формируют продольные гравитационные и гравитационно-вязкие волны. Кроме того, при наличии вязкого поверхностного слоя возмущения, обусловленные трением, находятся не только в следе, но и опережают источник вне трассы его следования. Непосредственно перед генератором имеется свободная от них угловая зона. Она сужается при увеличении скорости перемещения источника и расширяется с ростом толщины вязкого слоя и коэффициента вязкого трения. Количественная зависи-

мость величины угла этой зоны, характеризующей степень опережения возмущениями источника, иллюстрируется графиками на рис. 5.19, где линии по порядку сверху вниз отвечают толщинам вязкого слоя 2, 0.5, 0.2 м. Отметим, что увеличение h приводит к аналогичным, в качественном отношении, изменениям структуры возмущений и волновых характеристик.

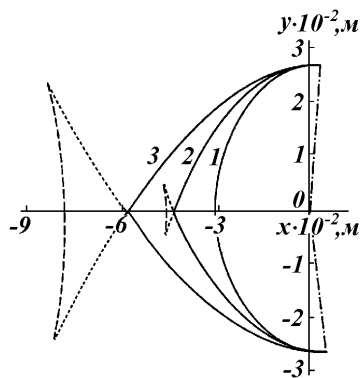


Рис. 5.18

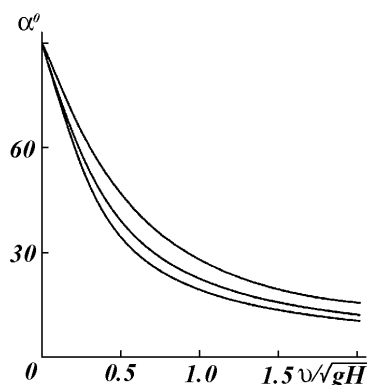


Рис.5.19

Рассмотрим теперь возмущения, возбуждаемые движущимся источником постоянной интенсивности в бассейне с плавающим сплошным упругим льдом ($D \neq 0$), покрытым слоем снега. Из анализа годографов, проведенного для этого случая, следует их существенная зависимость от скорости перемещения источника, упругих и вязких свойств ледяного покрова.

Пусть $\eta > \eta_0$, где

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \rho g [(a_1^2 + a_2)^{1/2} - a_1]^{1/2} (k^2 h_1)^{-1}, \\ a_1 &= 2[5 - 2gH \chi_1 k^2 + (1 - 2gH \chi_1 k^2) D_1 k^4] (k^2 gH)^{-1}, \\ a_2 &= 16(1 + D_1 k^4)^2 [H + (1 - g \chi_1 k) g \chi_1] (k^2 g^2 H)^{-1}.\end{aligned}$$

При таких η кривая волнового числа определена при любом значении скорости перемещения источника возмущений. Ее зависимость от v иллюстрируют графики на рис. 5.17,б, приведенные для значений

$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho_1 = 870 \text{ кг/м}^3$, $\rho_0 = 250 \text{ кг/м}^3$, $h = h_1 = 1 \text{ м}$, $\mu = 0.34$. (5.21)
Глубина бассейна и коэффициент трения полагались равными 10^3 м , $\eta = 6$, $5 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Линии с номерами 1 – 6 отвечают здесь значениям скорости источника 10, 14, 15, 20, 50, 105 м/с. Видно, что для диапазона $0 < v < v_0$, где v_0 определяется по формуле (5.20) жесткость льда не вносит качественных изменений в поведение годографа. Он имеет примерно такой же вид (линии 1), как и в случае битого льда. Не меняется за счет жесткости форма годографа и при $v_0 < v < v_1$, где $v_1 = F(k_2)$, а k_2 –

действительный корень уравнения $F'(k) = 0$. В данном диапазоне v на годографе (кривые 2 – 4) в верхней и нижней полуплоскостях имеется по одной точке перегиба и одной точке с параллельной оси n касательной. Если $v_1 < v < C$, то под влиянием жесткости льда и силы тяжести на годографах (кривые 5, 6) в указанных областях появляются еще по две точки перегиба, обозначенные на графике для $v = 50$ м/с квадратами. Дальнейшее увеличение v стягивает ближайшие к оси m точки перегиба в одну, приближающуюся к началу координат. При $v > C$ на годографе (кривая 6) сверху и снизу остается по две точки перегиба. Одна из них обусловлена вязкостью, а другая жесткостью льда.

Пусть теперь $\eta < \eta_0$. Тогда, кроме v_0, v_1, C , скорость перемещения источника имеет еще два критических значения v_2 и v_3 , обусловленных упругими и вязкими свойствами льда. Они определяются по формуле $v_{2,3} = \tau_0(k_{2,3})k_{2,3}^{-1}$, где $k_{2,3}$ – действительные корни уравнения $k\tau_0(k) - \tau_0(k) = 0$, $k_2 < k_3$.

От соотношения критических скоростей между собой и скоростью перемещения источника существенно зависит вид годографа. Возможные соотношения характеризуются на рис. 5.20 расположением графиков, представляющих зависимость критических величин скорости от коэффициента трения при значениях (5.21) для глубины бассейна 350 м. Здесь сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями с одной и двумя точками изображены соответственно $v_j(\eta)$, $j = 0 - 3$. Для источника, скорость перемещения которого изменяется в пределах одной из десяти пронумерованных на рис. 5.20 областей, вид годографа сохраняется. Однако для различных областей он имеет не только количественные, но и качественные отличия.

Если $v < v_2$ (область 1), то годографом является геометрическое место волновых чисел, обусловленных только трением. Он имеет вид кривых с номерами 1 на рис. 5.17. Для областей 2 – 7 годограф составляют две ветви, что иллюстрируют графики на рис. 5.21, а. Они даны для $\eta = 4.25 \cdot 10^6$ Па·с при тех же значениях параметров, что и на рис. 5.20. Линии с номерами 1, 2, 3 отвечают скорости источника 28.5 (область 2), 40.5 (область 6), 41.6 м/с ($v = v_3$). Одна из ветвей годографа обусловлена вязкостью (штриховая кривая), а другая – изгибно-гравитационная (сплошная замкнутая кривая), жесткостью льда и силой тяжести.

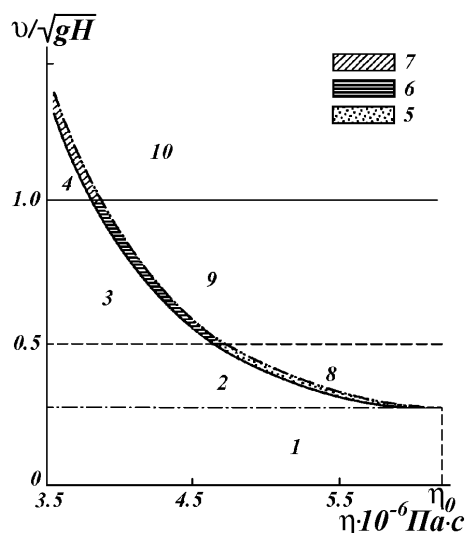


Рис. 5.20

При увеличении скорости в пределах областей 2 – 7 вязкий годограф деформируется, как и в случае битого льда. Переход через $v = v_0$ связан с появлением по одной точке перегиба, симметрично расположенных сверху и снизу от оси n . Изгибно-гравитационный годограф с ростом v деформируется как и при отсутствии трения [47, 169, 196]. Переход через $v = v_1$ обуславливает появление на верхнем и нижнем его участках по две точки перегиба (области 3, 6), отсутствующие в диапазоне $v_2 < v < v_1$ (области 2, 5). Из них ближайшие к оси m , стягиваясь в одну с увеличением v , приближаются к началу координат при $v \rightarrow C$, а годограф приобретает форму, характерную для $v > C$ (области 4, 7). Переход из областей 5, 6, 7 соответственно в 8, 9, 10 через $v = v_3$ сопровождается соприкасанием вязкой и изгибно-гравитационной ветвей годографов в точке на оси m (кривая 3). Для $v > v_3$ происходит разделение изгибно-гравитационной ветви на два участка, каждый из которых вместе с дополняющим его участком вязкой ветви в соответствующих полуплоскостях образуют годографы для областей 8, 9, 10. Характерные годографы для указанных областей представлены на рис. 5.21,б. Линиям 1, 2, 3 отвечают величины коэффициента трения ($\eta \cdot 10^{-6}$) и скорости движения источника (v м/с) равные соответственно 5.5; 19 (область 8), 4.25; 41.9 (область 9), 3.75; 67.5 (область 10). На годографах существуют точки перегиба и локальных экстремумов модулей m и n . Они обозначены кружком, квадратом и треугольником соответственно. С увеличением v указанные точки удаляются от оси m , приближаясь к оси n . Эволюция особенностей изгибно-гравитационного участка годографа при измене-

нии скорости качественно аналогична рассмотренной для $\eta > \eta_0$ в диапазоне $v \geq 50$ м/с (рис. 5.17,б).

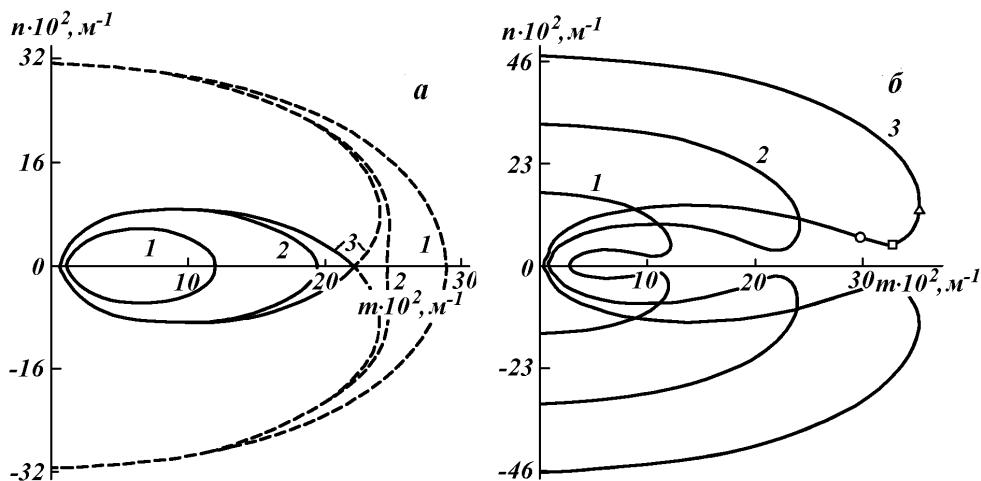


Рис. 5.21

Особенности годографа определяют структуру фазовых картин волновых возмущений, генерируемых движущимся источником. Для значений параметров из области 1 возмущения формируются только волнами, обусловленными вязкостью. Форма линий их гребней (впадин) имеет такой же вид, как и кривая 1 на рис. 5.18. При значениях из областей 2 – 7 возмущения формируются волнами, отвечающими волновым числам вязких и изгибно-гравитационных ветвей годографа. Поэтому пространственная структура возмущений является результатом сложения соответствующих этим ветвям фазовых картин. Фазовый портрет, отвечающий вязкой ветви кривой волнового числа, и его деформация при изменении скорости источника и коэффициента трения качественно такие же, как и для бассейна с битым льдом. Фазовая структура, порожденная изгибно-гравитационной ветвью годографа, практически не меняется под воздействием вязкости ледяного покрова и определяется, главным образом, его жесткостью. Что касается областей 7, 9, 10, то для них фазовые картины возмущений, формируемых продольными, поперечными и изгибными волнами в зоне корабельного следа за движущимся источником, так же практически не деформируются вязкостью. Ее влияние проявляется здесь возбуждением системы изгибно-вязких волн, которые вместе с гравитационными корабельными и изгибными формируют структуру возмущений в следе. Фазовый портрет этих волн, соответствующий участку годографа для области 8 сверху от его локального минимума, приведен на рис. 5.22, а. Гребни волн, изображенные штриховыми линиями, отвечают на годографе волновым числам между квад-

ратом и треугольником, а сплошными – сверху от треугольника. Штрихпунктирными линиями ограничена угловая зона перед источником, свободная от обусловленных вязкостью возмущений. Эта зона, как и в случае битого льда, убывает с ростом коэффициента трения. Жесткость льда увеличивает ее. Перед источником в окрестности курса его следования под влиянием вязкости образуется и угловая зона, свободная от изгибных волн предвестников, а фазовый портрет приобретает вид, представленный на рис. 5.22, б для годографа из области 8. Сплошными кривыми изображены здесь линии гребней для волн, отвечающих участку годографа слева от точки вязкого перегиба, а штриховыми – справа от него до точки локального минимума. Направление нормали к годографу в точке перегиба определяет границы указанной угловой зоны. Угол ее раствора растет с увеличением скорости перемещения источника, что приводит к уменьшению области изгибных возмущений, опережающих его на трассах, параллельных направлению перемещения. Для больших величин скорости угол становится тупым и все возмущения, обусловленные изгибными волнами, сосредоточены в угловой зоне следа за источником. Она уменьшается с ростом скорости.

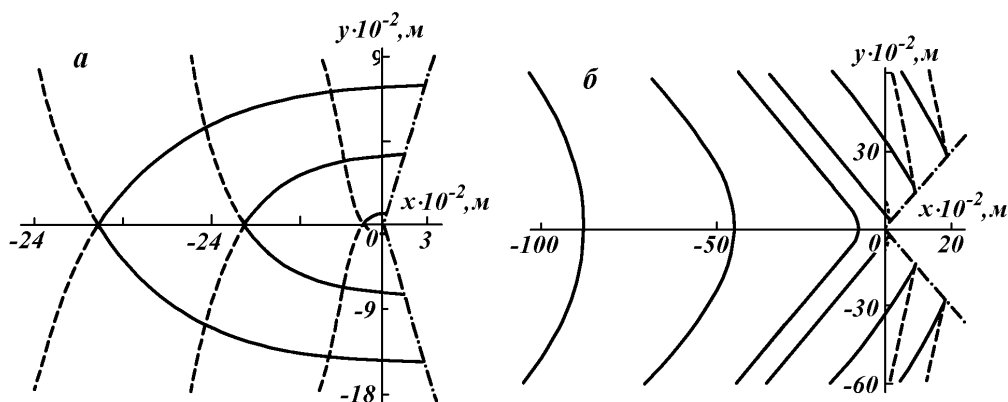


Рис. 5.22

При значениях коэффициента трения $\eta > \eta_0$ изменение скорости в диапазоне $0 < v < v_1$ деформирует фазовые портреты, как и в бассейне с битым льдом. При $v > v_1$ изменения структуры возмущений такие же, что и для значений параметров из областей 9, 10.

ГЛАВА 6. ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ВБЛИЗИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ ПОСТОЯННЫХ ДАВЛЕНИЙ

6.1. Структура возмущений при малых скоростях движения области давлений

Проведем исследование пространственного распределения изгибных деформаций ζ плавающего ледяного покрова и возмущений жидкости под ним, формируемых в ближней зоне движущейся области давлений вида (4.1) в условиях ледового сжатия.

В предположениях линейной теории задача заключается в решении уравнения Лапласа (4.2) с граничными

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_l \zeta + \chi_1 \zeta_{tt} + \zeta + \frac{1}{g} \varphi_t = -\frac{p}{\rho g}, \quad z=0, \quad (6.1)$$

$$\varphi_z = 0, \quad z=-H; \quad \zeta_t = \varphi_z, \quad z=0$$

и начальными

$$\varphi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0 \quad (6.2)$$

условиями, где D_1 , Q_1 , χ_1 , ∇^4 , Δ_l определяются из (4.3).

Переходя к системе координат x_1, y, z , связанной с движущейся областью давлений, и применяя интегральные преобразования Фурье по горизонтальным координатам x_1, y и Лапласа по времени t , при осесимметричном распределении давлений из (4.1), (4.2), (6.1), (6.2) получим

$$\zeta = \frac{a}{8\pi^2} \int_0^\infty f_0(r) J(r, R, \gamma) dr, \quad J = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \psi(r, \theta) e^{i[rR \cos(\theta - \gamma)]} d\theta, \quad (6.3)$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-\Delta_2 t}, \quad a = \frac{p_0}{\rho g}, \quad \tau = [l(r)M(r)]^{1/2},$$

$$M = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH, \quad l = D_1 r^4 - Q_1 r^2 + 1, \quad f_0 = rf^*(r)M(r),$$

$$\Delta_j = rv \cos \theta + \delta_j \tau, \quad \delta_j = (-1)^j, \quad x_1 = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma,$$

$$R^2 = x^2 + y^2, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta, \quad r^2 = m^2 + n^2$$

($f^*(r)$ – трансформанта Фурье-функции $f(R)$).

Подынтегральная функция $\psi(r, \theta)$ не имеет особенностей на пути интегрирования по θ при любых $r \geq 0$, так как возможные особенности отдельных слагаемых, представляющие собой действительные корни уравнений $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, погашаются. Поэтому в соответствии с теоремой Коши исходный путь интегрирования вдоль действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$ можно деформировать в путь L_0 , обходящий в комплексной плоскости корни $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$, $\tau_0 = \tau/(rv)$ уравнения $\Delta_1 = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i\Delta_1) > 0$, а корни

$\theta_{3,4} = \pi \mp \arccos \tau_0$ уравнения $\Delta_2 = 0$ – по полуокружностям, где $\text{Re}(i\Delta_2) > 0$. Перепишем теперь J в виде

$$J = J_0 - J_{01} - J_{02}, \quad J_0 = \int_{L_0} \Phi_0(r, \theta) d\theta, \quad J_{0j} = \int_{L_{0j}} \Phi_{0j}(r, \theta) d\theta, \quad (6.4)$$

$$\Phi_0 = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} \exp[irR \cos(\theta - \gamma)], \quad \Phi_{0j} = \frac{1}{\tau \Delta_j} \exp(-i\Delta_j t),$$

где L_{01} обходит только точки $\theta_{1,2}$, а L_{02} – точки $\theta_{3,4}$. Так как $J_{1,2}$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного R , то очевидно, что J_0 характеризует установившееся движение, рассмотрением которого ограничимся в дальнейшем при условии $Q_1 < 2Q_0$, $Q_0 = \sqrt{D_1}$, необходимым для устойчивости ледяной пластинки.

Если $D > 0$ (лед упругий), то с ростом r функция $\tau_* = \tau/r$ сначала убывает, достигая минимума v_0 в некоторой точке r_0 , затем монотонно возрастает. Скорость v_0 есть минимальная фазовая скорость волновых возмущений в системе лед – вода и определяется как $v_0 = \tau_*(r_0)$, r_0 – единственный положительный корень уравнения $\tau' = \tau/r$, штрих означает производную.

Отметим, что зависимость v_0 от Q и h исследовалась в разделе 2.4. Можно показать, что в приближении коротких волн справедливо следующее соотношение

$$v_0 = \frac{1}{3} \left[g(12D_1 - Q_1 Q_{10}^*) \left(\frac{6}{D_1 Q_{10}^*} \right)^{1/2} \right]^{1/2},$$

где $Q_{10}^* = Q_1 + (Q_1^2 + 12D_1)^{1/2}$.

При $Q_1 = 0$ эта формула принимает вид

$$v_0 = 2(gH)^{1/2} \left(\frac{D_1}{27} \right)^{1/8}.$$

Пусть $v < v_0$. Тогда особенностей по θ на пути интегрирования в (6.4) нет, а L_0 совпадает с отрезком действительной оси от $\theta = -\pi/2$ до $\theta = 3\pi/2$, так как в данном случае $\Delta_1 \neq 0$ и $\Delta_2 \neq 0$. Подынтегральная функция в выражении для ζ также не имеет особенностей и по r , что позволяет провести исследование ζ численно.

Расчеты проводились для $p_0 = 100$ Па, глубины моря $H = 10^3$ м и значений (4.13) для различных распределений $f(x, y)$ давления в области. Толщина льда изменялась в пределах от 0 до 3.5 м, а сжимающее усилие от $-2Q_0$ (растяжение) до $1.8Q_0$ (сжатие). Верхний предел интегрирования по r в выражении (6.3) выбирался таким образом, чтобы величина погрешности определения ζ не превышала 2%. Следует отметить, что в

дальней зоне при $v < v_0$ возмущения затухают с расстоянием от эпицентра области давлений не медленнее, чем $O(R^{-1})$.

Анализ результатов показал, что при малой скорости перемещения сосредоточенных давлений

$$f(x, y) = \delta\left(\frac{x}{H}\right) \delta\left(\frac{y}{H}\right) \quad (6.5)$$

прогиб льда при отсутствии сжатия имеет форму, близкую к осесимметричной.

Увеличение скорости v нарушает осесимметричность прогиба [95, 174]. Симметрия относительно координатных осей при этом сохраняется, а впереди и за областью образуются локальные возвышения, вытянутые в направлении, перпендикулярном курсу следования давлений [36]. В этом же направлении происходит и растяжение основного прогиба. Его крутизна становится максимальной перед областью давлений и за ней, а минимальной – в направлении, перпендикулярном к трассе.

Локальные возвышения имеют место и по обе стороны от трассы. Однако их высота увеличивается с ростом скорости перемещения давлений существенно медленнее, чем высота поднятия по курсу. При v , близких к v_0 , высота боковых возвышений составляет менее 20% от высоты возвышений по трассе. Топография прогиба при $h = 2.5$ м, $F = v(gH)^{-1/2} = 0.2$, $Q_1 = 0$ иллюстрируется на рис. 6.1, где сплошные и штриховые линии характеризуют соответственно отклонения (в миллиметрах) вверх и вниз от невозмущенного уровня, представленного жирной линией. Вне изображенной на рис. 6.1 области происходят волновые колебания льда, которые, однако, быстро затухают с удалением от области давлений.

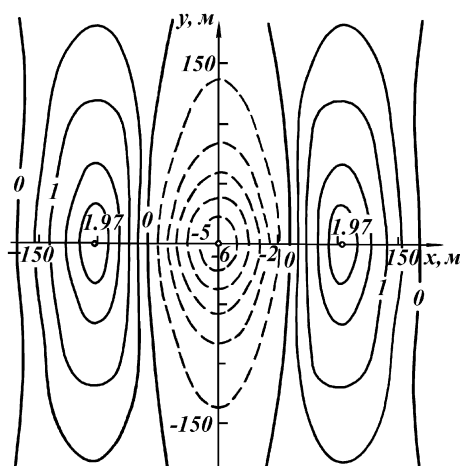


Рис. 6.1

Увеличение толщины льда приводит к уменьшению глубины прогиба ζ_0 под эпицентром нагрузки и высоты ζ^* образующихся на трассе поднятий. С ростом F (числа Фруда) значения ζ_0, ζ^* увеличиваются. Это иллюстрирует рис. 6.2, где сплошные, штриховые, штрихпунктирные линии с одной и двумя точками отвечают толщинам льда 1.5, 2, 2.5, 3 м, а ζ^* дано в логарифмическом масштабе. Треугольниками отмечены значения, достигаемые для указанных толщин льда при числах Фруда, равных 0.165, 0.185, 0.202, 0.215 соответственно. При этом значения $v_0(gH)^{-1/2}$ для рассматриваемых h равны 0.171, 0.190, 0.207, 0.221. Расстояние L между центрами оснований прогиба и поднятий по трассе увеличивается с ростом толщины льда и уменьшается с увеличением числа Фруда. Это видно из рис. 6.3, *а*, где обозначения те же, что и на рис. 6.2.

Пространственное распределение амплитуд возмущений в жидкости на фиксированной глубине качественно такое же, как и на поверхности лед-вода, но затухание возмущений с глубиной вне трассы следования давлений происходит медленнее, чем под трассой.

Изменения топографии прогиба льда под влиянием ледового сжатия при фиксированном v качественно аналогичны имеющим место при изменении скорости перемещения давлений при $Q_1=0$. С ростом сжимающего усилия значения ζ_0 и ζ^* увеличиваются, а с ростом растягивающего – уменьшаются. Расстояние L меняется при этом в противоположном направлении. Влияние Q_1 на эти характеристики при $h=3$ м показано на рис. 6.3, *б*, 6.4, где пунктиром дана зависимость без учета ледового сжатия ($Q_1=0$). Сплошные, штриховые, штрихпунктирные линии с одной и двумя точками для L и ζ_0 над пунктирной соответствуют здесь растяжению, а под ней – сжатию с усилием $0.5 Q_0, Q_0, 1.5 Q_0, 1.8 Q_0$. Для ζ^* аналогичные линии сверху от пунктирной характеризуют сжатие, а снизу – растяжение. Треугольниками отмечены значения, достигаемые при числах Фруда 0.188, 0.155, 0.110, 0.067 в условиях сжатия, и 0.237, 0.257, 0.275 – при растяжении в порядке возрастания усилия. Значения $v_0(gH)^{-1/2}$ равны здесь соответственно 0.194, 0.161, 0.115, 0.072 при сжатии и 0.243, 0.263, 0.280 при растяжении.

Ледовое сжатие увеличивает, а растяжение уменьшает амплитуду возмущения жидкости под ледяным покровом. Однако затухание амплитуды с глубиной в условиях сжатия происходит быстрее, а при растяжении – медленнее, чем при $Q=0$. Вместе с тем на фиксированной глубине амплитуда при сжатии оказывается большей, чем при отсутствии сжимающего усилия.

Пусть теперь по поверхности льда движется осесимметричная область давлений

$$p = p_0 \frac{k^2}{\pi} \exp(-k^2 R^2 / H^2). \quad (6.6)$$

В этом случае, как и для сосредоточенной нагрузки, $\iint_S p dS = p_0 H^2$, где

S – поверхность льда под давлениями. Результаты численных расчетов, выполненных при таком распределении давлений, показали, что структура топографии прогиба льда в качественном отношении аналогична полученной при движении сосредоточенных давлений (рис. 6.1). Характеристики прогиба льда при $F = 7 \cdot 10^{-2}$ ($v = 24.7$ км/час), $Q_1 = 0$ даны в табл. 6.1, где R_0 – радиус окружности, на которой давление в e раз меньше, чем в эпицентре области. Значениям радиуса 0, 1, 10, 100 м соответствуют k , равные ∞ , 10^3 , 10^2 , 10. Видно, что чем равномернее распределена нагрузка с удалением от эпицентра при фиксированной толщине льда, тем меньше глубина прогиба ζ_0 и высота локальных максимумов ζ^* . Расстояние между центрами оснований прогиба и поднятий по трассе при этом увеличивается. Величины ζ^* , ζ_0 практически равны нулю при $R_0 = 1000$ м ($k = 1$). Уменьшение толщины льда усиливает влияние неравномерности распределения давлений на характеристики прогиба. При этом величина R_0 , для которой ζ_0 , ζ^* , L близки по значениям к соответствующим параметрам при сосредоточенной нагрузке, убывает.

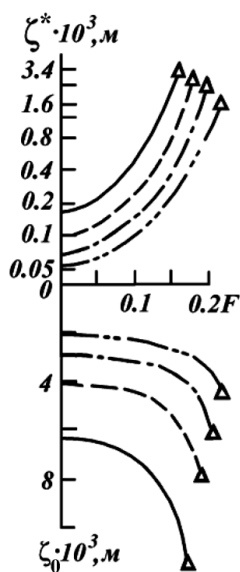


Рис. 6.2

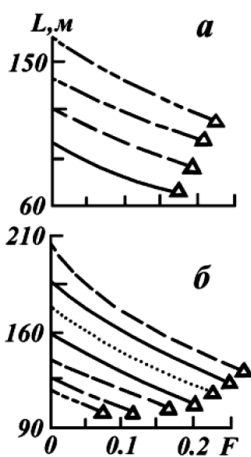


Рис. 6.3

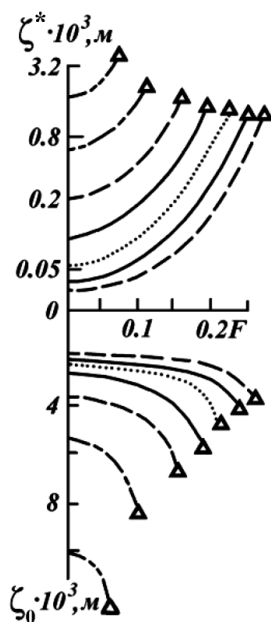


Рис. 6.4

Так, для льда толщиной 2.5, 2, 1 и 0.5 м нагрузку можно с достаточной степенью точности считать сосредоточенной при $R_0 = 10, 6, 2, 1$ м соответственно.

Таблица 6.1

Характеристики прогиба, м	$R_0, \text{ м}$ $h \text{ м}$	100	10	1	0
$\zeta_0 \cdot 10^3$	0.2	5.294	603.8	1861	1922
	0.5	5.289	231.4	378.1	382.5
	1.0	5.245	99.12	126.4	126.9
	1.5	5.141	57.68	67.47	67.55
	2.0	4.977	38.71	43.37	43.45
	2.5	4.771	28.23	30.82	30.86
$\zeta^* \cdot 10^3$	0.2	0.0157	95.15	253	257
	0.5	0.0158	19.46	26.55	26.75
	1.0	0.0162	4.436	5.813	5.820
	1.5	0.0184	2.115	2.641	2.651
	2.0	0.0246	1.34	1.551	1.560
	2.5	0.0336	0.925	1.029	1.030
L	0.2	265	20.83	17.88	17.84
	0.5	263	36.39	33.75	33.75
	1.0	261	62.27	30.63	60.63
	1.5	253	87.5	82.3	82.0
	2.0	246	108	106	106
	2.5	247	128	127	127

Предположим, что $p = p_0 \exp(-k^2 R^2 / H^2)$. Тогда $\iint_S p dS = \pi p_0 H^2 / k^2$.

С ростом k при фиксированном p_0 в центре движущейся области величина нагрузки не меняется, а вне его на заданном удалении R — убывает. Для такого распределения давления при тех же условиях, что и для (6.6), с ростом k от нуля до некоторого k^* (уменьшением R_0 от ∞ до R_0^*) глубина прогиба ζ_0 увеличивается до значения ζ_0^* . Дальнейшее увеличение k (уменьшение R_0) приводит к убыванию ζ_0 . Отметим, что $k^* = 7.46$, $R_0^* = 180$ м, $\zeta_0^* = 3$ мм, если $F = 0.2$, $h = 2.5$ м, $Q_1 = 0$. С уменьшением F значения k^* , R_0^* практически не меняются, а ζ_0^* убывает. С ростом h растут k^* , ζ_0^* , а R_0^* уменьшается. Характер зависимости у ζ^* от изменений k (или R_0) качественно такой же, как у ζ_0 . Величина L при этом принимает примерно те же значения, что и для давлений вида (6.6) из табл. 6.1.

Рассмотрим теперь функцию распределения давлений вида

$$p = \begin{cases} p_0 H^2 / (\pi b^2), & R \leq b, \\ 0, & R > b, \end{cases} \quad (6.7)$$

когда нагрузка величиной $p_0 H^2$ распределена в круге радиуса b . При $b \rightarrow 0$ она переходит в сосредоточенную. Для значений b , меньших некоторого b^* , зависящего от толщины льда, числа Фруда и величины сжимающего усилия топография прогиба и волновое возмущение жид-

кости под ледяным полем в качественном отношении аналогичны образующимся при рассмотренных выше распределениях давлений. Увеличение b от 0 до b^* приводит к качественно таким же изменениям характеристик прогиба и возмущений жидкости, как и уменьшение k для давлений вида (6.6). При этом в случае области вида (6.7) для заданного $b = b_0 < b^*$ глубина прогиба ζ_0 и высота образующихся на трассе гребней ζ_0^* больше, а расстояние L между ними меньше, чем в случае (6.6) при $R_0 = b_0$. С ростом толщины льда убывает зависимость характеристик прогиба от вида распределения давлений. В частности, для области (6.7) при $b_0 = 10$ м величины ζ_0 , ζ^* превышают приведенные в табл. 6.1 для $R_0 = 10$ м соответственно на 30%, 65% при $h = 0.2$ м и на 3%, 10% при $h = 2.5$ м. Отличия значений L в этих случаях не превышают 4%.

Если $b > b^*$, то структура прогиба качественно меняется. Это иллюстрирует рис. 6.5, где сплошной, штриховой, штрихпунктирной линиями с одной и двумя точками изображен вид прогиба ζ вдоль трассы ($\gamma = 0$) движения эпицентра области давлений (6.7), распределенных в круге радиуса $b = 100$ м для толщин льда 2.0, 1.5, 1.0, 0.5 м соответственно при $F = 0.07$ и $Q_1 = 0$. Таким значениям h при этих условиях отвечают величины b^* , равные 102, 83, 60.5, 35 м. Из графиков следует, что при $b > b^*$ положение максимума глубины прогиба смещено от центра к границе области давлений [78, 130]. Чем меньше толщина льда, тем это смещение больше. При других значениях γ структура прогиба качественно такая же, как и на рис. 6.5. Имеются лишь количественные отличия значений максимума глубины прогиба. С удалением от трассы движения эпицентра (от $\gamma = 0$ до $\gamma = \pi/2$) эти значения убывают, но не более чем на 10% при $b = 100$ м.

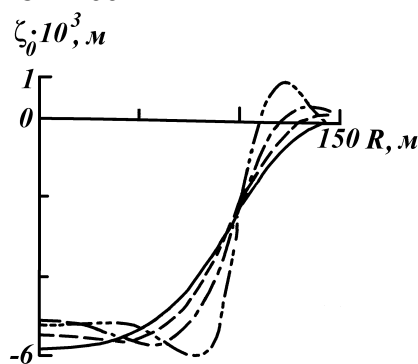


Рис. 6.5

На рис. 6.5 видна точка, в которой пересекаются все кривые. Аналогичные точки имеются и при любых других значениях γ . Геометрическое место проекций таких точек на горизонтальную плоскость образует эллипс, меньшая полуось которого ($\gamma = 0$) практически совпадает с ра-

диусом области давлений, а большая ($\gamma = \pi/2$) превышает его. Однако это превышение, увеличивающееся с ростом F , незначительно. Например, при $b = 100$ м, $F = 0.07$ оно составляет 2 м, а при $F = 0.12$ – 3 м. Глубина прогиба вдоль эллипса практически не зависит от толщины льда. С увеличением γ от 0 до $\pi/2$ она возрастает, но не более чем на 5%. При фиксированной толщине льда с уменьшением радиуса области давлений до b^* максимальная глубина прогиба растет, а ее местоположение смещается к центру области. При этом разность значений максимальной глубины прогиба и глубины под центром области давлений убывает. Для всех $b < b^*$ глубина прогиба и высота возвышений увеличиваются с ростом сжимающего ($Q_1 > 0$) усилия и уменьшаются с ростом растягивающего ($Q_1 < 0$). Увеличение толщины льда приводит к уменьшению ζ_0 и ζ^* . Однако при $b > b^*$ глубина прогиба под нагрузкой с ростом толщины льда может, наоборот, увеличиваться, а с ростом сжимающего усилия – уменьшаться. Зависимость b^* от величин F и Q_1 представлена в табл. 6.2 для $h = 1$ м и в табл. 6.3 для $h = 2$ м. Анализ результатов показал, что скорость движения давлений влияет на b^* слабо. Так, при отсутствии сил ледового сжатия для $h = 1$ м b^* меняется в пределах 59–61 м при изменении скорости практически во всем докритическом диапазоне. При $Q_1 = Q_0$ значение b^* может меняться в пределах 53 – 54 м. Для $h = 2$ м диапазон изменений b^* при отсутствии сил ледового сжатия находится в пределах 99 – 103 .

Таблица 6.2

$\begin{matrix} F \\ Q_1 \end{matrix}$	0.02	0.1	0.146
$-Q_0$	67.5	68	69
0	59.0	61	61.1
$0.5 Q_0$	55.5	57	–
Q_0	53.0	54	–
$1.5 Q_0$	50.5	–	–

Таблица 6.3

$\begin{matrix} F \\ Q_1 \end{matrix}$	0.1	0.19
$-Q_0$	111	113
0	102	103
$0.5 Q_0$	94	–
Q_0	86	–
$1.5 Q_0$	83	–

Сжимающие усилия оказывают на b^* большее влияние, чем скорость перемещения давления. Так, при изменении Q_1 от нуля до Q_0 , для льда толщиной 1 м значение критического радиуса уменьшается примерно на 6–7 м практически во всем докритическом диапазоне изменения ν . Увеличение Q_1 от нуля до $1.5 Q_0$ при малых ν уменьшает b^* приблизительно на 9 м. Для льда толщиной 2 м уменьшение критического радиуса, соответствующего росту Q_1 от нуля до Q_0 , составляет около 10 м.

При $Q_1 = 0$ изменение h от 1 до 2 м может увеличить b^* приблизительно на 40 м (или на 65%). Следовательно, для рассмотренных значений физических параметров изменение толщины льда оказывает более

существенное влияние на критический радиус, чем изменение усилий ледового сжатия.

Таким образом, при докритических скоростях движения области давлений волновой след за ней не возникает, а топография возмущений представляет собой вытянутый поперек трассы прогиб поверхности лед-вода и локальные возвышения впереди и за ним, симметричные относительно координат осей.

С увеличением скорости или сжимающего усилия, а также с уменьшением толщины льда прогиб вытягивается в поперечном и сжимается в продольном направлении. Глубина его при этом возрастает.

6.2 Структура возмущений при скоростях движения области давлений, превышающих минимум фазовой скорости свободных изгибно-гравитационных волн

Рассмотрим теперь сверхкритический диапазон скорости движения области давлений. Пусть $v_0 < v < (gH)^{1/2}$. В установившемся режиме выражение для ζ , вытекающее из (6.3), (6.4), можно представить [37] в виде

$$\zeta = \frac{a}{8\pi^2}(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3), \zeta_1 = \int_0^{r_1} f_0(r) J_0 dr, \zeta_2 = \int_{r_1}^{r_2} f_0(r) J_0 dr, \zeta_3 = \int_{r_2}^{\infty} f_0(r) J_0 dr,$$

($r_{1,2}$ – действительные корни уравнения $\tau - rv = 0$). При $0 < r < r_1$, $r_2 < r < \infty$ в J_0 нет особенностей по θ . Путь L_0 в этом случае, как и при $v < v_0$, совпадает с отрезком действительной оси. У ζ_1 , ζ_3 нет особенностей и по r , за исключением интегрируемых в концевых точках r_1 , r_2 . Следовательно, интегралы ζ_1 , ζ_3 можно считать численно.

При $r_1 < r < r_2$ в интеграле J_0 путь L_0 обходит точки θ_1 , θ_4 в нижней, а θ_2 , θ_3 в верхней полуплоскостях. Представим ζ_2 в виде

$$\zeta_2 = \zeta_2^* - \zeta_2^0, \quad \zeta_2^* = \int_{r_1}^{r_2} f_0(r) \int_{L^*} \Phi_0(r, \theta) d\theta dr,$$

$$\zeta_2^0 = \sum_{k=1}^7 J_k, \quad J_k = \int_{r_1}^{r_2} f_0(r) \int_{L_k} \Phi_0(r, \theta) d\theta dr$$

(L^* – замкнутый контур, образованный L_0 и контурами L_k , на которых $\text{Re}[irR \cos(\theta - \gamma)] \leq 0$). Выбор L^* зависит от угла γ . Для $0 \leq \gamma < \theta_2$, $\theta_2 \leq \gamma \leq \theta_3$, $\theta_3 < \gamma \leq \pi$ контур L^* изображен на рис. 6.6, a – в соответственно, где L_0 характеризуется сплошной линией, а L_k – штриховой. После применения теоремы Коши найдем

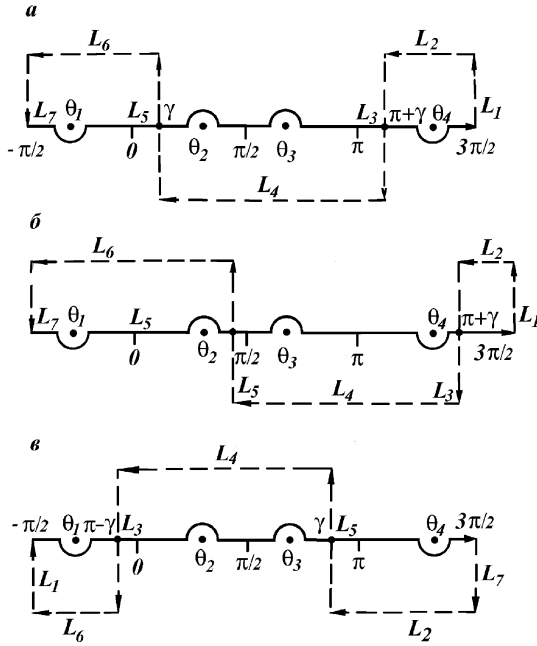


Рис. 6.6

$$\zeta_2^* = -2\pi(I_1 + I_2),$$

$$I_1 = \begin{cases} \int_{r_1}^{r_2} \Phi_1(r) dr, & 0 \leq \gamma \leq \pi - \theta_0 \\ \left[\int_{r_1}^{r_1^*} \Phi_1(r) dr + \int_{r_2^*}^{r_2} \Phi_1(r) dr \right], & \pi - \theta_0 < \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} \int_{r_1^*}^{r_2^*} \Phi_2(r) dr, & 0 \leq \gamma < \theta_0 \\ 0, & \theta_0 \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$\Phi_{1,2} = \frac{f_0(r)}{\tau \sqrt{(vr)^2 - \tau^2}} \sin \left[\frac{R}{v} (\tau \cos \gamma \pm \sqrt{(vr)^2 - r^2} \sin \gamma) \right],$$

$$\theta_0 = \max_{r_1 < r < r_2} \arccos \tau_0.$$

Здесь $r_{1,2}^*(\gamma)$ – корни уравнения $\gamma = \theta_2(r)$, если $0 < \gamma < \theta_0$, и уравнения $\gamma = \theta_3(r)$ при $\pi - \theta_0 < \gamma < \pi$. Отрезки интегрирования по r для I_1 и I_2 определяются соответственно из заштрихованных слева направо и справа налево областей для заданного γ на рис. 6.7. Верхняя и нижняя гра-

ницы этих областей соответствуют $\gamma = \theta_3(r)$ и $\gamma = \theta_2(r)$. Функции $\Phi_{1,2}$ в I_k не имеют особенностей по r , кроме интегрируемых в точках r_1, r_2 .

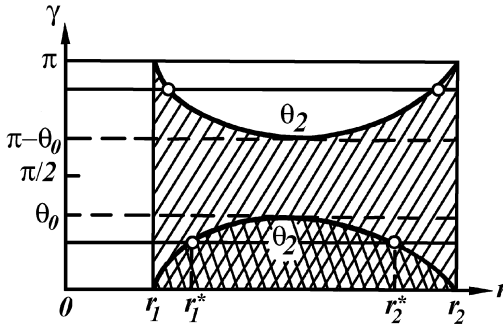


Рис. 6.7

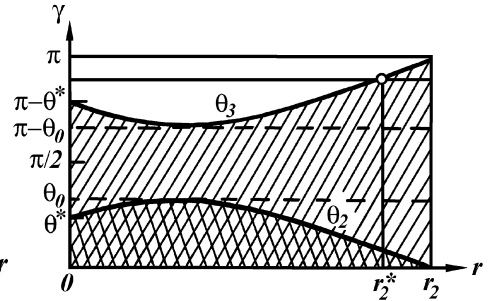


Рис. 6.8

Из условия $\text{Re}[irR\cos(\theta - \gamma)] < 0$ следует, что при стремлении к бесконечности мнимой части θ в комплексной плоскости (рис. 6.6) получаем $J_2 = J_4 = J_6 = 0$. Так как $\Phi_0(r, \theta) = \Phi_0(r, \theta + 2\pi)$, а L_1 и L_7 противоположно направлены, то $J_1 + J_7 = 0$.

После замены $\omega = i[(\pi + \gamma) - \theta]$ в интеграле J_3 и $\omega = i(\theta - \gamma)$ в J_5 получим

$$J_3 + J_5 = - \int_{r_1}^{r_2} (\tau v)^{-1} f_0(r) (u_1 + u_2) dr,$$

$$u_n(r, \gamma, R) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(rR \text{ch} \omega)}{\text{ch}(\omega - i\gamma) + (-1)^n \tau_0} d\omega, \quad n=1, 2.$$

Преобразуем u_n к виду

$$u_n = 2(-1)^n \int_0^{\infty} \frac{\sin(rR \text{ch} \omega [\text{ch} \omega \cos \gamma + (-1)^n \tau_0])}{[\text{ch} \omega \cos \gamma + (-1)^n \tau_0]^2 + (\text{sh} \omega \sin \gamma)^2} d\omega. \quad (6.8)$$

Отсюда после подстановки $u = \text{ch} \omega$ имеем

$$u_n = 2(-1)^n \int_1^{\infty} \frac{u_0 \sin(rRu)}{\sqrt{u^2 - 1} [u_0^2 + (u^2 - 1) \sin^2 \gamma]} du, \quad u_0 = u \cos \gamma + (-1)^n \tau_0.$$

Учитывая, что

$$u_0^2 + (u^2 - 1) \sin^2 \gamma = [u + (-1)^n \tau_0 \cos \gamma]^2 - (1 - \tau_0^2) \sin^2 \gamma,$$

методом неопределенных коэффициентов из (6.8) найдем

$$u_1 + u_2 = (1 - \tau_0^2)^{-1/2} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (-1)^{m+n+1} \sin Q_{mn} \int_1^{\infty} \Phi^* du,$$

$$\Phi^* = \sin(rRu) (u^2 - 1)^{-1/2} (u - \cos Q_{mn})^{-1},$$

$$Q_{mn} = \gamma + (-1)^{m+n} \arccos \tau_0 + [1 + (-1)^m] \frac{\pi}{2}.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u-1}(u-\cos Q_{mn})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos Q_{mn}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u-1}{1-\cos Q_{mn}}}$ и $\sqrt{2}/\sqrt{1-\cos Q_{mn}} = 1/|\sin Q_{mn}/2|$, то, заменяя $\sqrt{u^2-1}$ на $\sqrt{2}\sqrt{u-1}$ в малой ε – окрестности нижнего предела, методом интегрирования по частям получим

$$\sin Q_{mn} \int_0^{u_0^*} \Phi^* du \approx \sqrt{2(1+\cos Q_{mn})} A(r, \varepsilon),$$

$$A = (A_1 - A_2) \operatorname{sign} A_3, \quad A_1 = \sin[rR(1+\varepsilon)] \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon/(1-\cos Q_{mn})},$$

$$A_2 = rR \int_1^{u_0^*} \cos(rRu) \operatorname{arctg} \sqrt{(u-1)/(1-\cos Q_{mn})} du,$$

$$A_3 = (-1)^n \sqrt{1-\tau_0^2} \cos \gamma + (-1)^m \tau_0 \sin \gamma, \quad u_0^* = 1 + \varepsilon.$$

Интегралы A_2 и $\int_{u_0^*}^{\infty} \Phi^* du$, а следовательно, и $J_3 + J_5 = J_3$ можно считать численно. Таким образом, задача определения ζ сведена к численному интегрированию выражений ζ_1, ζ_3, I_k ($k = 1, 2, 3$).

Интеграл $\int_{u_0^*}^{\infty} \Phi^* du$ приближенно можно вычислить аналитически,

заменяя $(u^2-1)^{-1/2}$ на конечных отрезках пути интегрирования $[u_0^*, u_1^*]$, $[u_1^*, u_2^*]$, $[u_2^*, u_3^*]$ выражениями вида $p_k(u-a_k)^2 + q_k(u-a_k) + b_k$. На участке от u_3^* до ∞ функцию $\sqrt{1-u^{-2}}$ при $1/u^2 \ll 1$ заменим первыми двумя членами ее разложения в ряд Тейлора по степеням $1/u^2$. Длины отрезков интегрирования и коэффициенты p_k, q_k, a_k, b_k выберем так, чтобы погрешность аппроксимации не превышала заданной.

В результате предложенной аппроксимации получим

$$\int_{u_{k-1}^*}^{u_k^*} \Phi^* du \approx A_4(u_k^*) - A_4(u_{k-1}^*), \quad A_4 = A_{41} + A_{42},$$

$$A_{41} = p_k(rR)^{-2} \sin(rRu) - [p_k(u-a_k-\beta_k) + q_k](rR)^{-1} \cos(rRu),$$

$$A_{42} = (p_k \beta_k^2 - q_k \beta_k + b_k) [\sin \beta_0 \operatorname{Ci}(rR\beta) + \cos \beta_0 \operatorname{Si}(rR\beta)],$$

$$\beta_k = a_k - \cos Q_{mn}, \quad \beta_0 = rR \cos Q_{mn}, \quad \beta = u - \cos Q_{mn},$$

$$\int_{u_3^*}^{\infty} \Phi^* du = \sum_{l=1}^2 F_l(r), \quad \text{где } F_l = [2 \cos Q_{mn} + (-1)^l \sqrt{2}]^{-1} A_5$$

при $\cos Q_{mn} \neq (-1)^{l+1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $F_l = A_6$ при $\cos Q_{mn} = (-1)^{l+1} \frac{1}{\sqrt{2}}$. Здесь

$$A_5 = \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_4 \right) \cos \beta_0 - \text{Si} \beta_4 \sin \beta_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_5 \right) \cos \frac{rR}{\sqrt{2}} - (-1)^l \text{Ci} \beta_5 \sin \frac{rR}{\sqrt{2}},$$

$$A_6 = \frac{\sin(u_3^* r R)}{2u_3^* + (-1)^l \sqrt{2}} + \frac{rR}{2} \left[(-1)^l \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_5 \right) \sin \frac{rR}{\sqrt{2}} - \text{Ci} \beta_5 \cos \frac{rR}{\sqrt{2}} \right],$$

$$\beta_4 = rR(u_3^* - \cos Q_{mn}), \quad \beta_5 = rR \left(u_3^* + \frac{(-1)^l}{\sqrt{2}} \right).$$

Если $v > \sqrt{gH}$, то уравнение $\tau - rv = 0$ имеет только один действительный корень $r = r_2$. В этом случае $\zeta = \frac{a}{8\pi^2} (\zeta_2 + \zeta_3)$, кроме того, нижний предел в интегралах ζ_2, ζ_2^*, J_k равен нулю, а выражения I_k принимают вид

$$I_1 = \begin{cases} \int_0^{r_2} \Phi_1(r) dr, & 0 \leq \gamma \leq \pi - \theta_0 \\ \left[\int_0^{r_1^*} \Phi_1(r) dr + \int_{r_2^*}^{r_2} \Phi_1(r) dr \right], & \pi - \theta_0 < \gamma < \pi - \theta^*, \\ \int_{r_2^*}^{r_2} \Phi_1(r) dr, & \pi - \theta^* \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} \int_0^{r_2^*} \Phi_2(r) dr, & 0 \leq \gamma \leq \theta^* \\ \int_{r_1^*}^{r_2^*} \Phi_2(r) dr, & \theta^* < \gamma < \theta_0, \\ 0, & \theta_0 \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

где $\theta^* = \arccos(\sqrt{gH}/v)$. Отрезки интегрирования по r в зависимости от γ определяются для этого случая из рис. 6.8. Выражение I_3 остается прежним. Однако при его вычислении с применением предложенной аппроксимации следует иметь в виду, что $A_{41}(u_k^*) - A_{41}(u_{k-1}^*) = 0$ в точке $r = 0$.

Численный анализ возмущений проводился в случае сосредоточенной нагрузки [155, 186] типа δ -функции (6.5) при $E = 3 \cdot 10^9 \text{ Нм}^{-2}$,

$\rho_1 = 870 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $\rho = 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$, $\mu = 0.34$. Толщина ледяной пластинки принималась равной 1 и 2 м, а величина Q_1 , характеризующая ледовое сжатие, полагалась равной 0, $\sqrt{D_1}$, $1.5\sqrt{D_1}$. Глубина жидкости бралась 10^3 м для $v < \sqrt{gH}$ и 30 м для $v > \sqrt{gH}$. При этом значение ε полагалась равным 0,02. Коэффициенты p_k , q_k , b_k , a_k полиномов, аппроксимирующих с ошибкой 1.5% функцию $(u^2-1)^{-1/2}$ на отрезках $[u_{k-1}^*, u_k^*]$ и значения u_k^* ($k=1, 2, 3$), брались из таблицы 6.4.

Результаты численных расчетов представлены на рис. 6.9 – 6.13, где отклонения изолиний от невозмущенного уровня даны в миллиметрах. Для $v < \sqrt{gH}$ (рис. 6.9 – 6.12) вес нагрузки $1.6 \cdot 10^6 \text{ Н}$, а при $v > \sqrt{gH}$ (рис. 6.13) – $1.44 \cdot 10^6 \text{ Н}$, что соответствует $2\pi p_0 = 10^2$ и 10^5 Па . Шкала делений по координатным осям на рисунках дана в метрах.

Таблица 6.4

k	u_k^*	a_k	b_k	p_k	q_k
1	1.06	1.04	3.5007	831.52	-44.617
2	1.15	1.10	2.1822	84.615	-11.430
3	1.46	1.30	1.2059	5.5380	-2.2681

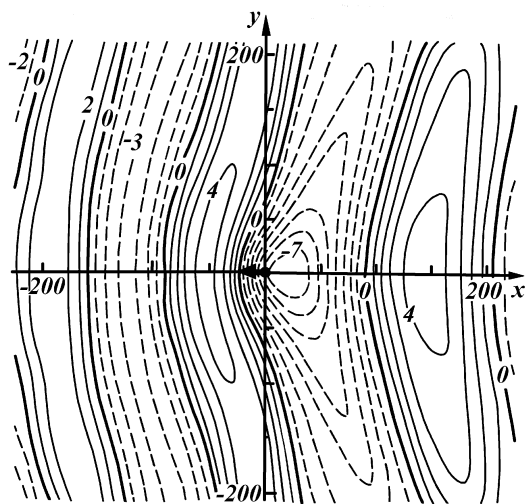


Рис. 6.9

Анализ результатов численных расчетов показал, что при $v > v_0$ сохраняется симметрия топографии поверхности лед–вода только относительно трассы перемещения давлений. Точка максимального прогиба находится теперь за нагрузкой, удаляясь от нее с увеличением v . Удаляются при этом и точки максимального углубления прогиба на линиях, параллельных трассе. Геометрическое место этих точек имеет распреде-

ление, близкое к гиперболическому с вершиной на трассе. Направление желобов прогиба составляет с трассой угол, близкий к $\arctg[(v/v_0)^2 - 1]^{-1/2}$.

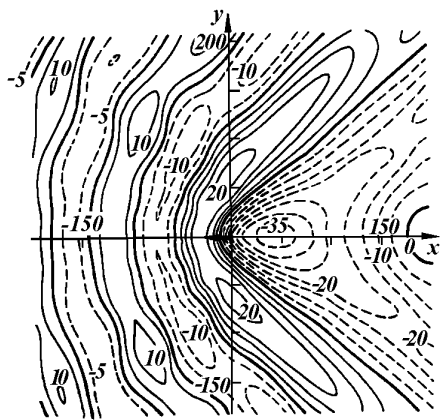


Рис. 6.10

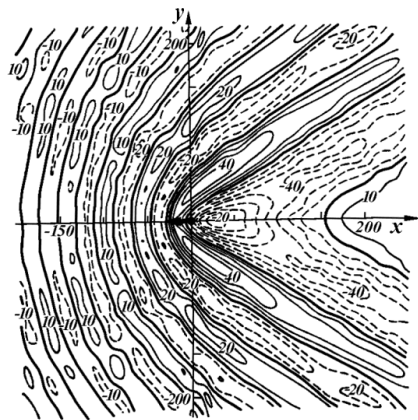


Рис. 6.11

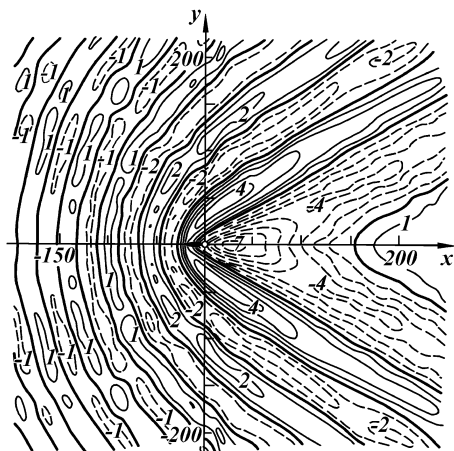


Рис. 6.12

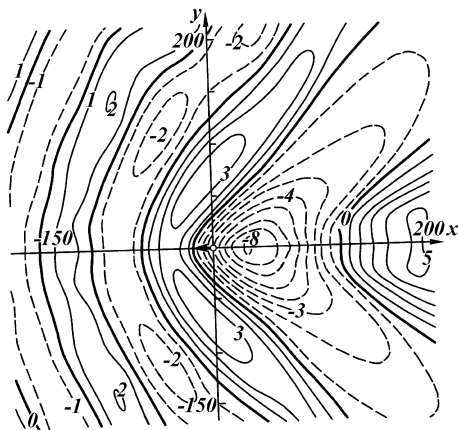


Рис. 6.13

Волновые возмущения перед и за прогибом с удалением от нагрузки затухают значительно медленнее (примерно как $1/\sqrt{R}$), чем в случае $v < v_0$. Передний склон прогиба круче заднего. Перед нагрузкой волна заметно короче, чем за нагрузкой. Однако с удалением от трассы длины волн постепенно выравниваются. Глубина прогиба и амплитуды волновых возмущений с ростом v при $v > v_0$ убывают. Длины волн перед нагрузкой уменьшаются, а за ней увеличиваются. Скорость изменения длин и амплитуд волн за областью при увеличении v существенно больше, чем перед ней.

При малых превышениях скорости v над v_0 амплитуды волн перед и за нагрузкой примерно одинаковые. Они, как и при $v < v_0$, монотонно затухают вдоль своих гребней. Иллюстрация топографии возмущений

для такого случая приведена на рис. 6.9 при $v = 0.2\sqrt{gH}$, $h = 2$ м, $Q = 0$. Дальнейшее увеличение v приводит к появлению локальных экстремумов на гребнях (впадинах) возмущений перед нагрузкой. Линия, соединяющая максимальные по высоте (глубине) экстремумы, имеет вид ветви гиперболы с вершиной в точке максимального прогиба на трассе. Направление лучей этой ветви зависит от скорости v . Чем больше v , тем больший угол образуют эти лучи с направлением движения нагрузки. В волновом следе за областью давлений желоб прогиба расширяется, приобретая слабо выраженную холмистость ложа, т.е. глубина желоба убывает немонотонно с удалением от трассы. Наглядная иллюстрация топографии возмущений для этого случая представлена на рис. 6.10 при $v = 0.3\sqrt{gH}$, $h = 2$ м, $Q = 0$.

Отметим, что если v превышает некоторое значение, обозначенное через v_1 (см. раздел 4.3), то волнистую структуру приобретают и боковые границы желоба в волновом следе. Это видно из топографии на рис. 6.11 для $h = 1$ м при тех же условиях, что и на рис. 6.10. Отметим, что указанный эффект, по-видимому, обусловлен вкладом продольных волн типа корабельных, возбуждаемых при $v > v_1$.

Для $v > \sqrt{gH}$ волновые возмущения за прогибом в следе незначительны. В частности, для $H = 30$ м, $h = 1$ м, $v = 1.2\sqrt{gH}$, $Q = 0$ (рис. 6.12) высоты гребней перед прогибом и за ним составляют 70 и 10 мм соответственно. Кроме того, первый гребень перед прогибом приобретает ярко выраженную волнистость.

Из результатов численных расчетов также следует, что уменьшение толщины ледяной пластины при фиксированном значении v в каждом из диапазонов $v_0 < v < v_1$, $v_1 < v < \sqrt{gH}$, $v > \sqrt{gH}$ приводит к увеличению глубины прогиба и амплитуд максимальных волновых возмущений. Кроме того, гребни волн перед нагрузкой становятся еще более холмистыми. Это видно из сопоставления рис. 6.10 и 6.11. Возможно и появление заметных локальных возвышений по разные стороны от трассы за прогибом при скоростях из диапазона $v_0 < v < v_1$. Угол между желобом прогиба и трассой за областью давлений с уменьшением толщины пластины убывает.

Равномерное сжатие увеличивает максимальную глубину прогиба. Угол между направлением желоба прогиба и осью абсцисс убывает с ростом сжимающего усилия. Возвышение за прогибом с ростом Q растягивается вдоль трассы и сужается в поперечном направлении. Его высота при этом существенно возрастает, что возможно, является следствием суперпозиции изгибных, продольных и поперечных корабельных волн, имеющей место вблизи трассы за нагрузкой (см. раздел 4.2).

при сжимающих усилиях, превышающих величину Q_0 (см. разделы 2.4, 3.3). Структура желоба прогиба и распределений амплитуд возмущений вдоль гребней перед нагрузкой с ростом сжимающего усилия изменяется качественно так же, как и с увеличением скорости перемещения нагрузки. Иллюстрация топографии возмущений при $Q=1.5\sqrt{D_1}$, $h=2$ м, $H=10^3$ м, $v=0.2\sqrt{gH}$ приведена на рис. 6.13.

Амплитуды изгибных возмущений (перед нагрузкой) затухают с глубиной жидкости быстрее гравитационных и обусловленных прогибом (за нагрузкой). С ростом скорости перемещения нагрузки, сжимающего усилия и уменьшением толщины пластинки затухание изгибных возмущений с глубиной усиливается вследствие уменьшения их длин. Это приводит и к усилению различий топографий возмущений в жидкости на заданной глубине и на поверхности пластинка-жидкость. Точка максимального отклонения от невозмущенного уровня на фиксированной глубине отстает от нагрузки сильнее, чем соответствующая ей точка максимального прогиба ледяной пластинки. Холмистость гребней изгибных возмущений и желоба прогиба сглаживаются с ростом глубины, при этом точки максимумов амплитуд изгибных возмущений удаляются от трассы.

6.3. Сопоставление экспериментально полученных характеристик изгибных деформаций ледяного покрова с результатами теоретического моделирования

На основе построенного в 6.1, 6.2 метода расчета возмущений выполним исследование установившихся колебаний льда для условий натурных экспериментов. Из известных литературных источников [13, 93-97, 132, 163, 173, 183, 192, 193, 195, 197] для сравнения с результатами теоретического анализа остановимся на работах [195, 197].

При сравнении учтем массу нагрузки M_0 , связанную с функцией распределения движущихся давлений соотношением

$$M_0 = p_0 g^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x, y) dx dy.$$

Эксперимент [197] проводился на льду озера Сарома (о.Хоккайдо, Япония) с использованием аэросаней массой 235 кг и размерами 2.43×0.79 м. В окрестности трассы движения толщина, соленость, температура, модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона озерного льда, глубина озера и плотность воды равнялись соответственно 0.17 м, 7.7 ‰, $-2^\circ - -4^\circ\text{C}$, $6.1 \cdot 10^8 \text{ Нм}^{-2}$, 0.33, 6.8 м, $1026 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$. Скорость саней варьировалась в пределах от 0 до $14.2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Прогиб льда измерял-

ся тремя дефлектометрами, расположенными вдоль трассы, а положение саней определялось с помощью детекторов.

В эксперименте на морском льду [195] вблизи острова Тент (прол. Мак-Мёрдо, Антарктика) колебания возбуждались фордовским грузовым пикапом массой около 2100 кг, двигавшимся с постоянной скоростью из интервала от 4 до $28 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Средняя толщина льда в районе эксперимента была 1.6 м и варьировалась незначительно. Здесь, в отличие от [197], измерялось тензометрическим способом напряжение изгиба льда вблизи трассы перемещения пикапа.

В результате обоих экспериментов установлено, что структура изгибных деформаций [197] и напряжение изгиба [195] зависит от величины нагрузки, скорости ее перемещения и физических характеристик льда. При этом четко зафиксировано наличие критического значения скорости, равного $5.8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ и $18 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ [195].

Происходящие при этой скорости качественные изменения возмущений дают основание считать ее равной экспериментальному значению v_0 . Форма прогиба при $v < v_0$ меняется с ростом скорости нагрузки. Как отмечалось в [197], при $v < 3.5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ прогиб похож на статический. Увеличение скорости приводит к образованию возвышений перед и за нагрузкой, а также к росту крутизны склонов и глубины прогиба. Эти изменения особенно существенны в окрестности значения $v = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ и усиливаются с приближением v к v_0 . При больших, чем v_0 , скоростях перед и за эпицентром давлений возбуждаются волновые возмущения. Длины волн за нагрузкой больше, чем перед ней. Наконец, в диапазоне $v > C$, где $C \approx 8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, волновых возмущений за нагрузкой нет.

Подобные эффекты прослеживаются и на иллюстрациях изгибных напряжений в [195]. Однако соответствующие значения переходных скоростей не отмечаются, хотя из рис. 3 работы [195] можно заключить, что качественный аналог скорости C , отмеченной в [197], можно приближенно оценить в $23.4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

При численных расчетах на основе вышеизложенной теоретической модели нагрузки, создаваемые санями и пикапом, моделировались круговыми областями постоянных давлений [39] с радиусами 0.75 и 1.2 м соответственно. Плотность льда при расчетах полагалась равной $870 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$. Ввиду отсутствия в [195, 197] информации о ледовом сжатии величина Q полагалась равной нулю. Для морского льда по гидрологическим данным [195] и диаграмме на рис. 9 из работы [185] модуль нормальной упругости принимался равным $4.05 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, а в соответствии с [11] коэффициент Пуассона брался равным 0.34. Отметим, что согласно выводам работ [91, 185] для любых гидрологических условий упругие свойства неоднородного морского льда довольно хорошо описыва-

ются интегрально осредненным модулем нормальной упругости, зависящим от толщины, температуры и солености.

Значение глубины в районе морского эксперимента [195] не приводится, но из соотношения $C = (gH)^{1/2}$ при $C = 23.4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ найдем, что $H \approx 56 \text{ м}$. По теоретическим формулам для условий экспериментов находились значения критических скоростей перемещения давлений, профили изгибных деформаций и напряжения изгиба льда вдоль трассы. Определялась величина v_0 . Кроме того, вычислялись значения $C = (gH)^{1/2}$, $v_1 = \tau_1(r_1)$, $v^* = \tau'(r^*)$ при переходе через которые меняется структура изгибных деформаций льда. Здесь $\tau_1 = [(\tau/r)^2 - \tau'(r\tau' - \tau)^2(r^3\tau'')^{-1}]^{1/2}$, а r_1 и r^* – положительные корни уравнений $\tau'_1(r) = 0$, $\tau''(r) = 0$ соответственно.

Для условий эксперимента на озерном льду [197] вычисленные теоретические значения v^* , v_0 , v_1 , C оказались соответственно равными 4.88; 6.08; 7.30; 8.16 $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$. Критическое значение v_0 превышает экспериментальное на 4.6%. Отличия соответствующих значений v^* и C не превосходят 2%. Такие расхождения критических и переходных скоростей, полученных теоретически и экспериментально, можно объяснить погрешностями эксперимента и теоретической модели, не учитывающей вязкие и пластические свойства льда [191]. Здесь могло сказаться и пренебрежение ледовым сжатием, о возможности влияния которого упомянуто и в [197]. Отметим, что при сжимающем усилии $Q_1 = 0.21Q_0$ теоретическое значение v_0 совпадает с экспериментальным. Переходное значение v_1 в эксперименте не фиксировалось. Вероятно, это связано с тем, что приборы располагались вблизи трассы, хотя, начиная с v_1 , в формировании изгибных деформаций льда проявляется и роль продольных корабельных волн. Однако их влияние заметно на удалении от трассы. В ближней зоне оно может проявляться в волнистой структуре жёлоба прогиба, не отражаясь на трассе.

Графические зависимости изгиба озерного льда от времени изображены на рис. 6.14 – 6.17, где сплошные линии получены экспериментально, а штриховые и штрихпунктирные – теоретически. Нулевой момент времени (откладываемого по оси абсцисс) соответствует прохождению саней около дефлектометра. На рис. 6.14 представлено $\zeta(t)$ для $v = 2.2$, а на рис. 6.15 – для $v = 4.2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ из диапазона $v < v_0$. Сплошные и штриховые линии на рис. 6.16 характеризуют изгиб при $v = 6.2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, а на рис. 6.17 – для $v = 8.9 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Штрихпунктирная линия на рис. 6.16 отвечает скорости $6.3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Отметим, что скорости 6.2 и $6.3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ находятся в диапазоне (v_0, C) , а скорость $8.9 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ превышает C .

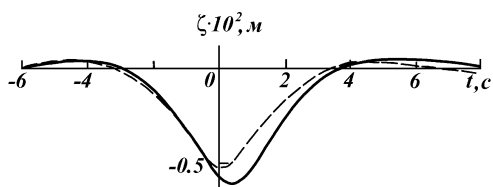


Рис. 6.14

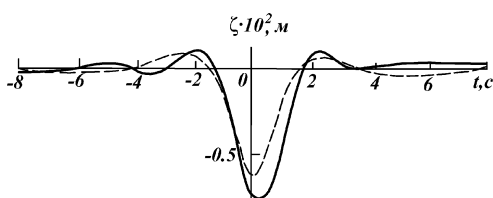


Рис. 6.15

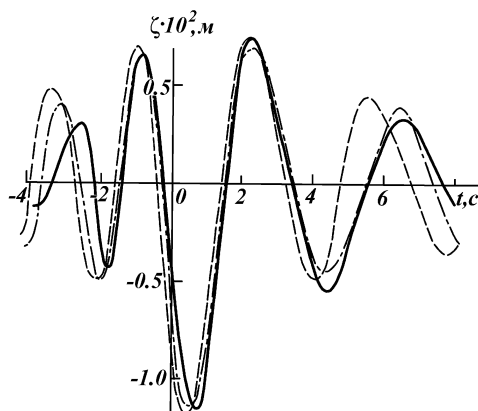


Рис. 6.16

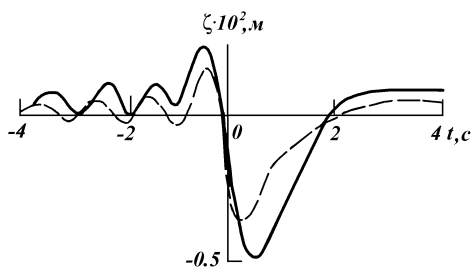


Рис. 6.17

Представленные зависимости показывают качественную согласованность теоретических и экспериментальных результатов. Имеющееся при $v < v_0$ и $v > C$ превышение измеренного максимума глубины прогиба над полученным теоретически составляет не более 20%. Отставание точки максимального прогиба льда от саней в эксперименте больше, чем по теории, хотя и незначительно. При $v_0 < v < C$ наилучшее совпадение теоретических и экспериментальных профилей $\zeta(t)$ наблюдается вблизи нагрузки. С удалением от нее усиливаются отличия теоретических длин и амплитуд волн от экспериментальных как перед нагрузкой, так и за ней. Это может быть обусловлено близостью скорости саней к критическому значению v_0 , в окрестности которого резко меняется структура колебаний, вследствие чего устойчивость волновой картины по отношению к малым вариациям v оказывается весьма слабой. Так, возможное влияние погрешности экспериментального определения v иллюстрирует сопоставление штриховой и штрихпунктирной линий на рис. 6.16. Кроме того, здесь могла сказаться и малая дистанция пробега саней, приводящая в эксперименте к нестационарности волновой картины.

Для морских условий [195] полученные теоретически значения v_* , v_0 , v_1 равны соответственно 14, 92; 18, 12; 21.22 м·с⁻¹. Отличие величины v_0 от экспериментальной составляет менее 1%. Такая погрешность определения v_0 и прослеживаемая зависимость структуры приведенных в рассматриваемой работе профилей напряжения изгиба льда от

скорости пикапа позволяет считать найденные значения переходных скоростей близкими к реальным.

Изгибные колебания льда рассматривались в эксперименте путем регистрации изменений напряжения изгиба вблизи трассы движения пикапа. Так как расстояния от тензометров до трассы малы по сравнению с горизонтальными масштабами изгиба льда, то при теоретических исследованиях напряжение вычислялось через прогиб по формуле [73, 107, 162] $\sigma_x = \frac{1}{2} E h \partial^2 \zeta / \partial x^2$.

Из-за неопределенности шкалы делений на графиках напряжений в [195], введен нормированный коэффициент K , равный отношению экспериментального максимума напряжений к теоретическому при $v = 13.8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Ввиду того, что при малых скоростях движения давлений экспериментальные профили изгиба льда согласуются с теоретическими (на рис. 6.14 – 6.17.), этот коэффициент можно считать близким к единице. Зависимости $\sigma(t)$, полученные экспериментально, и $K\sigma(t)$, рассчитанные теоретически, представлены соответственно сплошными и штрихпунктирными линиями на рис. 6.18 – 6.21. Штриховые линии на рис. 6.18 и 6.19 иллюстрируют теоретические профили изгиба льда. На рис. 6.18 графики характеризуют изгиб при $v = 13.8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, а на рис. 6.19 – при $v = 17.5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ из диапазона $v < v_0$. Графики на рис. 6.20 даны при $v = 18.4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ($v_0 < v < C$), а на рис. 6.21 – при $v = 25.7 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ($v > C$). Из графиков видно, что профили напряжения изгиба, полученные теоретически и экспериментально, качественно согласуются как при $v < v_0$, так и при $v > v_0$. Количественные отличия в ближней зоне заметны для амплитуды первого гребня изгибной волны. Для других гребней и впадин они незначительны. Кроме того, выполненный анализ показал, что для $v > v_0$ фазовые характеристики изгибных деформаций и напряжений изгиба также согласуются между собой. Однако при $v < v_0$ (рис. 6.18, 6.19) ближайшие нулевые значения прогиба льда перед и за пикапом разделяются интервалом времени в 2 – 3 раза большим, чем моменты фиксации нулевого напряжения изгиба.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о возможности применения теоретической модели и метода расчета для изучения ближней зоны изгибно-гравитационных возмущений в бассейне с ледяным покровом. Отметим также, что вывод о возникновении локальных экстремумов высоты (глубины) на гребнях (впадинах) изгибных волн был качественно подтвержден в работе [196].

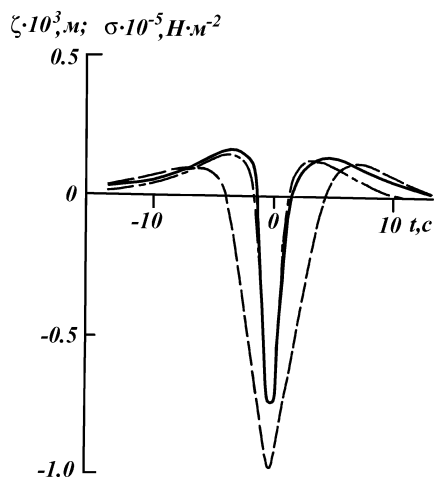


Рис. 6.18

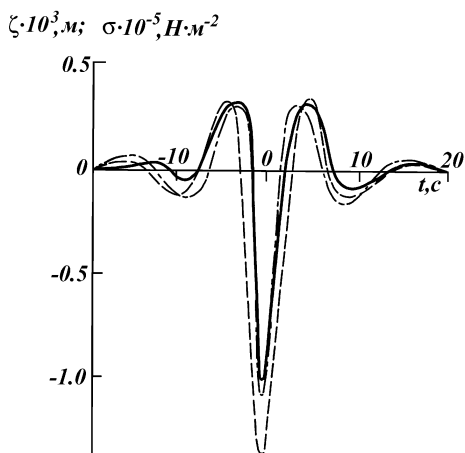


Рис. 6.19

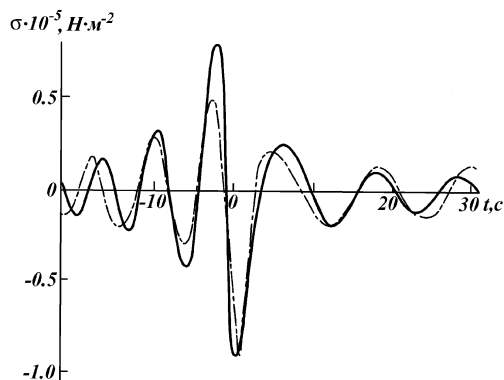


Рис. 6.20

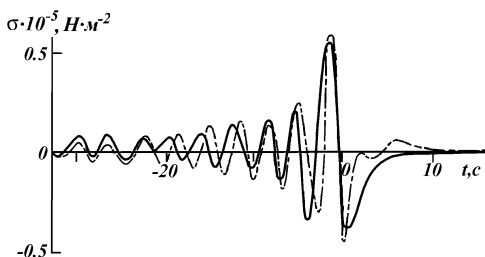


Рис. 6.21

6.4 Распределение гидродинамического давления под плавающим ледяным покровом

Пусть по сплошному ледяному покрову, плавающему на поверхности бассейна постоянной глубины H , заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, прямолинейно перемещается с постоянной скоростью осесимметрично распределённая нагрузка вида (4.1)

Проведём анализ распределения гидродинамического давления p_w в жидкости у поверхности лёд-вода, формируемого при этом возбуждаемыми установившимися изгибно-гравитационными волнами [45]. В системе координат, связанной с эпицентром движущейся нагрузки, гидродинамическое давление у поверхности лёд-вода ζ с точностью до знака определяется по формуле

$$p_w = \rho \left(g\zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (6.9)$$

где ρ – плотность воды, ζ – возвышение поверхности лед-вода, g – ускорение силы тяжести.

Задача сводится к определению потенциала скорости φ из уравнения Лапласа (4.2) с граничными

$$p_w + p_i = -p, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad z=0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z=-H$$

и начальными (6.2) условиями.

Здесь

$$p_i = D \nabla^4 \zeta + \chi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \quad \chi = \rho_1 h,$$

h и ρ_1 – толщина и плотность льда, а D , ∇^4 определяются в (4.3). Задача решается методом интегральных преобразований Фурье по горизонтальным координатам и Лапласа и времени. После применения обратных преобразований, учитывая, что [136]

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{iRr \cos(\theta-\gamma)} d\theta = 2\pi J_0(Rr)$$

для осесимметрично распределённой движущейся нагрузки в связанной с её эпицентром полярной системе координат из (6.9) в установившемся режиме находим

$$p_w = \frac{Mg}{2\pi} \int_0^\infty \frac{r F^*(r)}{1 + \chi_1 \tau_w^2} [2\pi J_0(Rr) - (\tau_0^2 - \tau_{w0}^2) I_0] dr, \quad (6.10)$$

где

$$I_0 = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{iRr \cos(\theta-\gamma)}}{\tau_0^2 - \cos^2 \theta} d\theta, \quad F^*(r) = \frac{f^*(r)}{2\pi H^2}, \quad \tau_w^2 = rg \operatorname{th} rH,$$

$$\tau^2 = \tau_w^2 \frac{D_1 r^4 + 1}{1 + \chi_1 \tau_w^2}, \quad \tau_0 = \frac{\tau}{rv}, \quad \tau_{w0} = \frac{\tau_w}{rv}, \quad \{D_1, \chi_1, p_1\} = \{D, \chi, p\}(\rho g)^{-1},$$

R, γ и r, θ – полярные координаты в физической плоскости и плоскости Фурье соответственно ($x = R \cos \gamma$, $y = R \sin \lambda$), $f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$, $M = \rho H^2 p_1$ – интегральная масса нагрузки. Отметим, что в случае сосредоточенной нагрузки $F^*(r) \equiv 1$.

Рассмотрим три диапазона скорости перемещения нагрузки: $v < v_0$, $v_0 < v < C$, $v > C$.

Пусть $v < v_0$, где v_0 – минимальная фазовая скорость свободных волн в системе лёд-вода. При этом $v_0 = \tau(r_0)/r_0$, где r_0 – корень уравнения $\tau - r\partial\tau/\partial r = 0$. В таком диапазоне скорости интеграл I_0 не содержит особенности на пути интегрирования по θ .

Воспользовавшись соотношением [136]

$$e^{iRr\cos(\theta-\gamma)} = J_0(Rr) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(Rr) \cos[2k(\theta-\gamma)] + \quad (6.11)$$

$$+ 2i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(Rr) \sin[(2k+1)(\theta-\gamma)],$$

приходим к выражению

$$I_0 = \frac{2\pi}{\tau_0 \sqrt{\tau_0^2 - 1}} \left\{ J_0(Rr) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_k^* \right\}, \quad I_k^* = \frac{J_{2k}(Rr) \cos(2k\gamma)}{[\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1}]^{2k}}. \quad (6.12)$$

Анализ показал, что если значение v отличается от v_0 не менее, чем на 5%, то для обеспечения относительной погрешности в пределах 0,5% суммирование в (6.12) можно ограничить 10 – 12 членами. Подстановка (6.12) в (6.10) даёт выражения в виде однократных интегралов по r , которые можно считать численными методами (особенностей на пути интегрирования нет). Так как значение τ_0 растет с увеличением r , то достаточная точность может быть достигнута, если взять верхний предел интегрирования порядка $50D_1^{1/4}$. Отметим, что сами по себе члены с $J_0(Rr)$ и $\tau_0^2 I_0$ в выражении (6.10) при интегрировании могут расходиться (за счёт роста τ_0^2). Но так как при их суммировании расходимость взаимно компенсируется, запишем:

$$2\pi J_0(Rr) - \tau_0^2 I_0 = -\frac{2\pi}{\sqrt{\tau_0^2 - 1}} \left\{ \frac{J_0(Rr)}{\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1}} + 2\tau_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_k^* \right\}. \quad (6.13)$$

Тогда выражение в квадратных скобках в (6.10) можно привести виду

$$\frac{2\pi}{\tau_0 \sqrt{\tau_0^2 - 1}} \left\{ J_0(Rr) \left[\frac{\tau_0}{\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1}} - \tau_{w0}^2 \right] + 2(\tau_0^2 - \tau_{w0}^2) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_k^* \right\}.$$

Рассмотрим теперь диапазон $v_0 < v < C$, где $C = (gH)^{1/2}$ – скорость длинных волн. В этом случае интервал интегрирования по r следует разбить на три интервала с границами в точках r_1, r_2 ($r_2 > r_1$), являющихся корнями уравнения $\tau_0 = 1$, и записать

$$P_w = \sum_{i=1}^3 P_{wi}, \quad (6.14)$$

где выражения для p_{w1} , p_{w2} и p_{w3} получаются из (6.10) заменами интервала интегрирования по r на $[0, r_1]$, $[r_1, r_2]$ и $[r_2, \infty)$ соответственно.

Для p_{w1} и p_{w3} исследование проводится, как и для диапазона $v < v_0$, поскольку на пути интегрирования по θ в I_0 особенности не возникают. На пути интегрирования по r при подстановке (6.12) и (6.13) в выражения для p_{w1} и p_{w3} могут возникать только интегрируемые особенности в точках r_1 и r_2 соответственно.

Для вычисления p_{w2} при $r_1 < r < r_2$ в интеграле I_0 путь интегрирования по θ следует деформировать в контур L_0 , обходящий полюса θ_1, θ_4 в нижней, а θ_2, θ_3 – в верхней полуплоскостях. Здесь $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$, $\theta_{3,4} = \pi \mp \arccos \tau_0$.

Для такого интервала I_0 представляется в виде

$$I_0 \Big|_{r_1 < r < r_2} = I_{00} - \sum_{k=1}^7 I_{0k}, \quad (6.15)$$

$$I_{00} = \int_{L^*} \frac{e^{iRr \cos(\theta-\lambda)}}{\tau_0^2 - \cos^2 \theta} d\theta, \quad I_{0k} = \int_{L_k} \frac{e^{iRr \cos(\theta-\gamma)}}{\tau_0^2 - \cos^2 \theta} d\theta,$$

где L^* – замкнутый контур, образованный L_0 и контурами L_k , на которых $\operatorname{Re}[iRr \cos(\theta-\gamma)] \leq 0$. Выбор L^* зависит от угла γ .

После применения теоремы Коши найдём:

$$I_{00} = 2\pi(\Phi_1 + \Phi_2), \quad (6.16)$$

где

$$\Phi_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \pi - \theta_0 < \gamma \leq \pi, r_1^* \leq r \leq r_2^* \\ \Phi_-(r) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} \Phi_+(r) & \text{при } 0 \leq \gamma \leq \theta_0, r_1^* \leq r \leq r_2^* \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\Phi_{\pm} = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{1-\tau_0^2}} \sin \left[Rr \left(\tau_0 \cos \gamma \mp \sqrt{1-\tau_0^2} \sin \gamma \right) \right], \quad \theta_0 = \max_{r_1 < r < r_2} \arccos \tau_0,$$

$r_{1,2}^*(\gamma)$ – корни уравнения $\theta_2(r) = \gamma$, если $0 < \gamma < \theta_0$, и уравнения $\theta_3(r) = \gamma$ при $\pi - \theta_0 < \gamma < \pi$.

Особенностей по r на рассматриваемых отрезках функции $\Phi_{1,2}$ не имеют, за исключением интегрируемых в r_1 и r_2 .

Можно показать, что сумма интегралов по всем интервалам L_k обращается в ноль, за исключением бесконечных контуров L_3 и L_5 , параллельных мнимой оси. После соответствующих замен переменных и

алгебраических преобразований сумма интегралов по этим отрезкам приводится к виду

$$I_{03} + I_{05} = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{1 - \tau_0^2}} \sum_{m,n=1}^2 (-1)^{m+n+1} \sin \vartheta_{mn} \int_1^\infty \Phi^* du, \quad (6.17)$$

где

$$\Phi^* = \sin(Rru)(u^2 - 1)^{-1/2} (u - \cos \vartheta_{mn})^{-1},$$

$$\vartheta_{mn} = \gamma + (-1)^{m+n} \arccos \tau_0 + [1 + (-1)^n] \pi / 2.$$

Замена $\sqrt{u^2 - 1}$ на $\sqrt{2(u-1)}$ в малой ε – окрестности $u=1$ помогает устранить возможную особенность интегрирования и даёт

$$\sin \vartheta_{mn} \int_1^{u_0^*} \Phi^* du \approx \sqrt{2(1 + \cos \vartheta_{mn})} (A_1 - A_2) \operatorname{sign}(\sin \vartheta_{mn}), \quad (6.18)$$

$$A_1 = \sin[Rr(1 + \varepsilon)] \operatorname{arctg} [\varepsilon^{1/2} (1 - \cos \vartheta_{mn})^{-1/2}],$$

$$A_2 = Rr \int_1^{u_0^*} \cos(Rru) \operatorname{arctg} [(u-1)^{1/2} (1 - \cos \vartheta_{mn})^{-1/2}] du, \quad u_0^* = 1 + \varepsilon.$$

Интеграл $\int_{u_0^*}^\infty \Phi^* du$ можно приближённо вычислить аналитически,

заменяя $(u^2 - 1)^{-1/2}$ на конечных отрезках пути интегрирования $[u_{k-1}^*, u_k^*] (k=1, \dots, j)$ выражениями вида $p_k(u - a_k)^2 + q_k(u - a_k) + b_k$. На участке $[u_j^*, \infty)$ функцию $(1 - u^{-2})^{1/2}$ при $u^{-2} \ll 1$ заменим первыми двумя членами её разложения в ряд Тейлора по степеням (u^{-2}) . Значение j , длины отрезков интегрирования и коэффициенты p_k, q_k, a_k, b_k можно выбирать так, чтобы погрешность аппроксимации не превышала заданной. В результате получаем

$$\int_{u_{k-1}^*}^{u_k^*} \Phi^* du \approx A_4(u_k^*) - A_4(u_{k-1}^*), \quad \int_{u_j^*}^\infty \Phi^* du \approx \sum_{l=1}^2 F_l(r). \quad (6.19)$$

Здесь

$$A_4 = A_{41} + A_{42},$$

$$A_{41} = p_k(rR)^{-2} \sin(rRu) - [p_k(u - a_k - \beta_k) + q_k](rR)^{-1} \cos(rRu),$$

$$A_{42} = (p_k \beta_k^2 - q_k \beta_k + b_k) [\sin \beta_0 \operatorname{Ci}(Rr\beta) + \cos \beta_0 \operatorname{Si}(Rr\beta)],$$

$$\beta_k = a_k - \cos \vartheta_{mn}, \quad \beta_0 = rR \cos \vartheta_{mn}, \quad \beta = u - \cos \vartheta_{mn},$$

$$F_l = \begin{cases} [2(\cos \vartheta_{nm} - \beta_*)]^{-1} A_5, & \cos \vartheta_{nm} \neq \beta_*, \\ A_6, & \cos \vartheta_{nm} = \beta_*, \end{cases}$$

$$A_5 = \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_4\right) \cos \beta_0 - \text{Ci} \beta_4 \sin \beta_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_5\right) \cos \frac{rR}{\sqrt{2}} - (-1)^l \text{Ci} \beta_5 \sin \frac{rR}{\sqrt{2}},$$

$$A_6 = \frac{\sin(u_j^* rR)}{2u_j^* + (-1)^l \sqrt{2}} + \frac{rR}{2} [(-1)^l \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si} \beta_5\right) \sin \frac{rR}{\sqrt{2}} - \text{Ci} \beta_5 \cos \frac{rR}{\sqrt{2}}],$$

$$\beta_4 = rR(u_j^* - \cos \vartheta_{nm}), \beta_5 = rR(u_j^* - \beta_*), \beta_* = \frac{(-1)^{l+1}}{\sqrt{2}}.$$

После подстановки (6.15) – (6.19) в выражение для p_{w2} из (6.14) можно проводить численное интегрирование по r от r_1 до r_2 . Отметим, что устранение расходимости интегралов с отдельными членами в квадратных скобках в выражении (6.10) здесь не требуется, так как интервал интегрирования конечный.

Пусть $\upsilon > C$. Тогда уравнение $\tau_0 = 1$ имеет только один корень $r = r_2$. В этом случае вместо (6.14) имеем

$$p_w = p_{w2} + p_{w3}, \quad (6.20)$$

где в интеграле p_{w2} нижний предел равен нулю. При этом вид (6.15) сохраняется.

Формулы (6.16) остаются в силе, когда r_1^* является меньшим корнем уравнения $\theta_2(r) = \gamma$, если $\theta^* < \gamma < \theta_0$, и уравнения $\theta_3(r) = \gamma$ при $\pi - \theta_0 < \gamma < \pi - \theta^*$, где $\theta^* = \arccos(C/\upsilon)$. Если же $0 \leq \gamma \leq \theta^*$ или $\pi - \theta^* \leq \gamma \leq \pi$, то $r_1^* = 0$. Условия для r_2^* остаются прежними.

Проанализируем асимптотическое представление полученных выражений вдали от эпицентра нагрузки (при больших значениях R). При $\upsilon < \upsilon_0$ волновые возмущения не возникают. В случае $\upsilon > \upsilon_0$ основной вклад в выражения I_0 дают вычеты от действительных полюсов интегрирования по θ в I_{00} . С учётом (6.16) интеграл (6.10) по r можно проанализировать с помощью метода стационарной фазы.

В результате получаем параметрическое (в зависимости от r) представление уравнений для линий постоянной фазы с номерами $N = 1, 5, 9, \dots$ и $N = 3, 7, 11, \dots$ соответственно для волновых гребней и впадин, если ближайшим к эпицентру движущейся нагрузки является гребень, или впадин и гребней в противном случае

$$R = \frac{\pi N \sqrt{\tau_1^2 - 2\tau_0\tau_1 + 1}}{4r|\tau_0 - \tau_1|}, \quad \gamma = \begin{cases} \gamma_0 + \pi(1 - \text{sign}\gamma_0)/2, & \gamma_0 \neq 0 \\ \pi(1 \pm 1)/2, & \gamma_0 = 0, \end{cases}$$

где $\gamma_0 = \arctg[\tau_1 \sqrt{1 - \tau_0^2} (1 - \tau_0\tau_1)^{-1}]$, а также для амплитуды гидродинамического давления вдоль рассматриваемой линии постоянной фазы

$$p_w \Big|_{cp} = -\frac{Mg}{2\pi} \frac{rF^*(r)}{1 + \chi_1 \tau_w^2} (\tau_0^2 - \tau_{w0}^2) A(r).$$

Здесь

$$A(r) = \frac{4\pi r}{\tau_0} \left| \frac{2(\tau_0 - \tau_1)}{N[\tau_1(\tau_0 - \tau_1)^2 + \tau_2(1 - \tau_0^2)]} \right|^{1/2}, \quad \tau_1 = \frac{1}{v} \frac{\partial \tau}{\partial r}, \quad \tau_2 = \frac{r}{v} \frac{\partial^2 \tau}{\partial r^2},$$

значения r меняются от r_1 до r_2 при $v_0 < v < C$ и от 0 до r_2 при $v > C$.

На трассе (при $r=r_1, \gamma=0$ или $r=r_2, \gamma=\pi$) имеем $\tau_0=1$, что даёт

$$R = \pi N / (4r), \quad A(r) = 4\pi r \left(\frac{2}{N\tau_1|1 - \tau_1|} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что линии постоянной фазы гидродинамического давления совпадают с аналогичными линиями для возвышения поверхности лёд-вода (изгиба льда). Чётные номера N отвечают нулевым значениям как давления, так и изгиба льда.

Используя метод стационарной фазы для оценки гидродинамического давления перед нагрузкой вблизи трассы её перемещения, где погрешность этого метода приемлемая [92, 184], можно показать, что при больших скоростях перемещения сосредоточенной нагрузки p_w имеет порядок $O[2Mv(D_1\chi_1)^{-1/2}]$. В то же время для распределённой в области нагрузки $p_w \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$.

Для количественной оценки величин гидродинамического давления проводились численные расчёты по формулам (6.10), (6.12) – (6.20). При этом плотность морской воды полагалась равной 1030 кг/м^3 , а глубина бассейна – 100 и 1000 м. Модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона ледяного покрова принимались соответственно равными $3 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ и 0.34, а его толщина изменялась от 0.6 до 2.5 м. Скорость перемещения нагрузки принималась равной 25 м/с. При этом за счёт изменения толщины ледяного покрова это значение скорости попадало в диапазоны с качественно различной структурой генерируемой волновой картины. Рассматривалась как сосредоточенная нагрузка

$f(R) = \delta(R)$, так и нагрузка, распределенная по закону $f(R) = k^2 e^{-(kR/H)^2} / \pi$ для различных значений безразмерного параметра k . Этот параметр характеризует распределение нагрузки в движущейся области. Чем меньше k , тем медленнее происходит спад её интенсивности с удалением от эпицентра. Полная масса нагрузки M при этом остаётся неизменной. Для сосредоточенной нагрузки $k = \infty$.

На рис. 6.22 показаны трёхмерные картины изгиба льда (левый рисунок) и распределения гидродинамического давления у поверхности лёд-вода (правый рисунок) для случая движущейся сосредоточенной нагрузки массой 10^3 кг при $h = 1$ м, $H = 100$ м. Нагрузка движется в сторону положительных значений x . На левом рисунке видны гребни изгибных волн перед движущейся областью и волновой след за ней. Высоты гребней изгибных волн слабо меняются с удалением от трассы (в масштабах рисунка).

Картина гидродинамического давления подо льдом носит качественно иной характер. На правом рисунке гребни окаймляют нагрузку. В следе за нагрузкой их высота мало меняется с удалением от трассы. Перед нагрузкой по обе стороны от трассы её перемещения в формирование гребневой структуры распределения давлений заметный вклад вносят не только возмущения, окаймляющие прогиб льда под нагрузкой, но и изгибные волны. Это проявляется в нарушении плавности изменения амплитуды давлений вдоль их гребней с удалением от трассы. Линии максимальных амплитуд возмущений перед нагрузкой расходятся под некоторым углом к трассе (для условий рассматриваемого рисунка – около 40°).

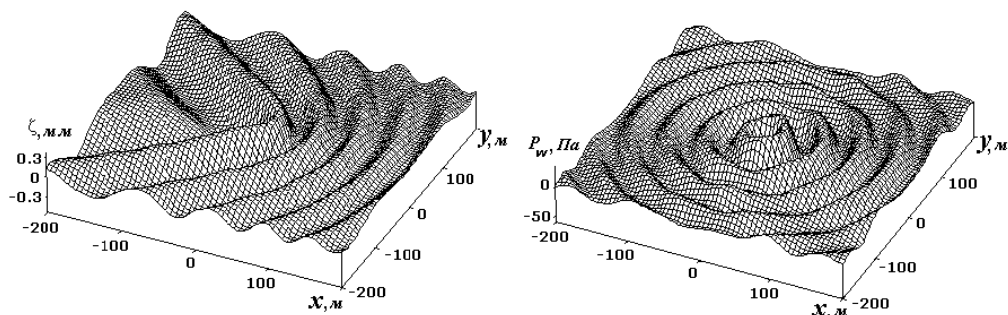


Рис. 6.22

На рис. 6.23 а, б, в представлено распределение давлений под ледяным покровом по трассе перемещения эпицентра нагрузки при $h = 0.6, 1$ и 1.9 м соответственно. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии отвечают значениям k , равным $\infty, 20$ и 10 при $H = 100$ м.

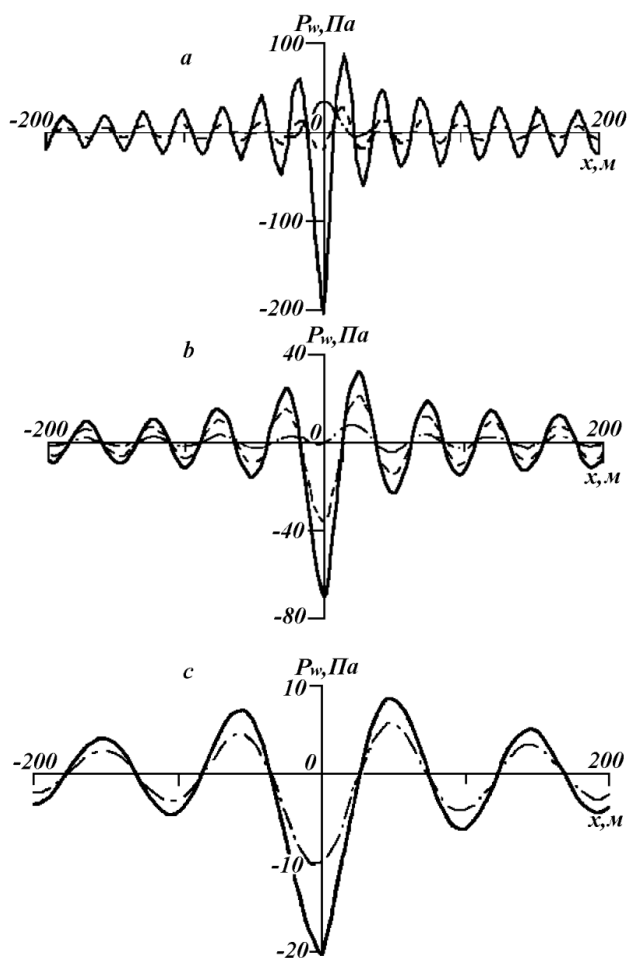


Рис. 6.23

Видно, что для случая сосредоточенной нагрузки ($k = \infty$) под ней возникает отрицательный пик величины давления, убывающего с ростом толщины льда. Размах колебаний величин давления с удалением от эпицентра уменьшается. Причём слева (за нагрузкой) спад амплитуды колебаний значительнее, чем справа (перед нагрузкой). Это можно объяснить более быстрым затуханием обуславливающих давление возмущений, окаймляющих прогиб, по сравнению с возмущениями, обусловленными изгибными волнами. Отметим, что вклад гравитационных волн в следе в колебания давления практически незаметен на фоне возмущений от прогиба.

С уменьшением k (рассредоточением нагрузки в движущейся области) как величина пика, так и размах колебаний давления убывают. Величина пика уменьшается быстрее амплитуды колебаний давления вне эпицентра нагрузки. Для льда малой толщины при значениях k , мень-

ших некоторого k^* , непосредственно под эпицентром нагрузки может иметь место максимальное положительное значение давления. Для $h = 0.6$ м величина k^* примерно равна 10.

С уменьшением k при относительно малых толщинах льда вклад изгибных волн и окаймляющих прогиб возмущений в формирование гидродинамического давления убывает, в то время как роль изгибно-гравитационных волн усиливается. Это иллюстрируют картины, представленные на рис. 6.24 при значениях $h = 0.6$ м, $H = 100$ м для k равных 20 (левый рисунок) и $k = 10$ (правый рисунок).

С увеличением толщины льда влияние рассредоточения нагрузки на гидродинамическое давление ослабевает. Это демонстрирует рис. 6.25 при $h = 1.9$ м и $H = 100$ м для сосредоточенной ($k = \infty$) и распределённой ($k = 10$) нагрузки (левый и правый рисунки соответственно). Видно, что уменьшение k не привело к структурным деформациям картины распределения давлений. Имеют место лишь некоторые количественные изменения. Изменение глубины бассейна от 100 до 1000 м не приводит к заметным изменениям распределения гидродинамического давления.

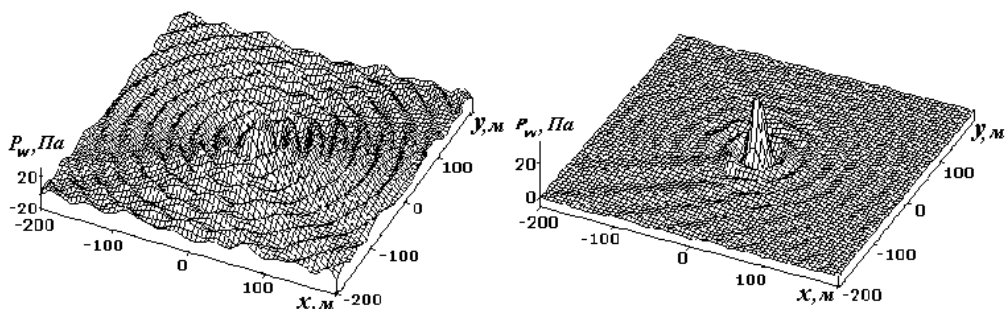


Рис. 6.24

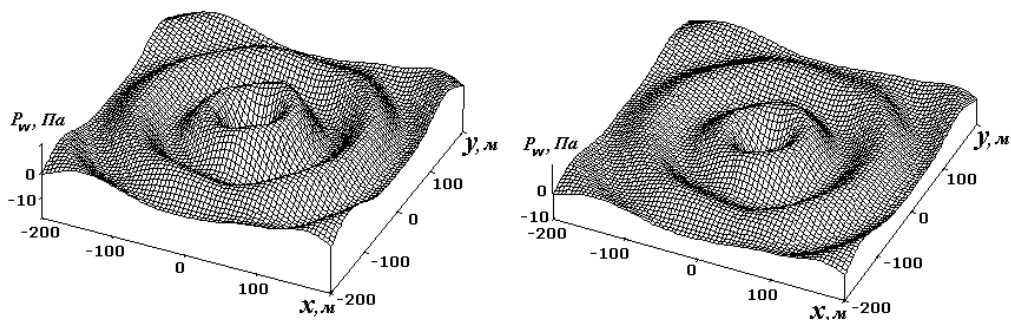


Рис. 6.25

Таким образом, при сосредоточенной нагрузке основной вклад в распределение гидродинамического давления вносят возмущения, окаймляющие прогиб льда в окрестности нагрузки, и возбуждаемые изгибные волны. Максимальные возмущения давления могут возникать непосредственно под движущейся областью. В случае распределённой нагрузки под её эпицентром может возникать положительный максимум величины давления. При этом вне эпицентра возмущения давления имеют слабую интенсивность и обуславливаются в основном изгибно-гравитационными волнами в следе за областью.

6.5. Распределение изгибного напряжения в морском ледяном покрове

Важной характеристикой состояния ледяного покрова является напряжение, формируемое изгибными деформациями под воздействием волновых возмущений.

Проведем исследование пространственного распределения изгибных напряжений в ледяном покрове, формируемых его изгибными деформациями ζ при движении по льду области давлений (4.1). Рассмотрим зависимость изгибных напряжений перед нагрузкой, в зоне ее приложения и в волновом следе от толщины льда, скорости перемещения давлений и вида их распределения в области [46].

Для определения изгибного напряжения в случае плоского фронта движущихся давлений в [73, 162] приведена формула

$$\sigma_x = \frac{1}{2} E h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (6.21)$$

где E , h – модуль нормальной упругости и толщина ледяного покрова. В случае трехмерных возмущений формула (6.21) характеризует компоненту тензора напряжений в направлении перемещения нагрузки. Напряжения σ_y в направлении, нормальном к трассе перемещения нагрузки, и сдвиговые напряжения τ_{xy} определим по формулам

$$\sigma_y = \frac{1}{2} E h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} E h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}. \quad (6.22)$$

Отметим, что зависимость напряжения изгиба в направлении, составляющем с трассой движения нагрузки угол γ , определяется [116] формулой

$$\sigma^* = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\gamma + \tau_{xy} \sin 2\gamma.$$

Направление главной оси напряжения находится из уравнения $\partial\sigma^*/\partial\gamma=0$, что дает $\operatorname{tg}2\gamma=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$, а соответствующее ему напряжение σ_g (максимальное по γ абсолютное значение σ^*) выражается по формуле

$$\sigma_g=\frac{|\sigma_x+\sigma_y|}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}. \quad (6.23)$$

Задача определения $\zeta(x,y,t)$ в линейной постановке сводится к решению уравнения Лапласа (4.2) с граничными

$$\left(D_1\nabla^4+\chi_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}+1\right)\zeta+\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-p_1f(x_1,y), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad z=0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0, \quad z=-H$$

и начальными (6.2) условиями, где D_1 , χ_1 , p_1 даны в (6.10), а ∇^4 – в (4.3).

Решая задачу методом интегральных преобразований, для установившегося режима в полярной системе координат, связанной с эпицентром движущейся осесимметричной области давлений, получим следующие выражения

$$\zeta=-\frac{Mg}{2\pi\nu^2\rho}\int_0^\infty\frac{f^*(r)\operatorname{th}rH}{1+\chi_1\tau_w^2}I_0dr, \quad I_0=\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\frac{e^{iRr\cos(\theta-\gamma)}}{\tau_0^2-\cos^2\theta}d\theta, \quad (6.24)$$

R, γ и r, θ – полярные координаты в физической плоскости и плоскости Фурье, M – интегральная (по области) масса движущейся нагрузки, а $f^*(r)$ – безразмерная трансформанта Фурье функции $f(x,y)$, деленная на 2π , а выражения для τ_w , τ_0 приведены в (6.10).

Подставляя (6.24) в (6.21), (6.22) и учитывая, что

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}e^{iRr\cos(\theta-\gamma)}d\theta=2\pi J_0(Rr),$$

находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 \int_0^\infty \xi(r) I_1 dr, \quad \sigma_y = \sigma_0 \int_0^\infty \xi(r) (I_0 + I_1) dr, \\ \tau_{xy} &= \sigma_0 \int_0^\infty \xi(r) I_0^* dr, \quad \sigma_0 = \frac{MgEh}{4\pi\nu^2\rho}, \quad \xi(r) = \frac{r^2 f^*(r) \operatorname{th} r H}{1+\chi_1\tau_w^2}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$I_1 = 2\pi J_0(Rr) - \tau_0^2 I_0, \quad I_0^* = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{iRr \cos(\theta-\gamma)} \sin 2\theta}{\tau_0^2 - \cos^2 \theta} d\theta.$$

Исследование интегральных выражений (6.24), (6.25) проведем аналогично [45, 164]. Как и в 6.4 рассмотрим три диапазона скорости перемещения области давлений.

Пусть $v < v_0$, где $v_0 = \tau(r_0)/r_0$ – минимальная фазовая скорость свободных волн в системе лед-вода. В этом диапазоне скорости при вычислении интегралов I_0, I_0^* на пути интегрирования по θ особенности не возникают. Воспользовавшись соотношением (6.11), находим для I_0^* выражение

$$I_0^* = \frac{\pi}{\tau_0 \sqrt{\tau_0^2 - 1}} \left[1 - \frac{1}{(\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1})^4} \right] \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{J_{2k}(Rr) \sin(2k\gamma)}{[\tau_0 + \sqrt{\tau_0^2 - 1}]^{2(k-1)}}, \quad (6.26)$$

а для I_0 – выражение (6.12).

Подстановка (6.12), (6.26) в (6.24), (6.25) дает выражения в виде однократных интегралов по r , которые можно считать численно, так как особенностей на пути интегрирования нет. Поскольку значение τ_0 растет с увеличением r , то достаточная точность может быть достигнута, если, как и в 6.4, взять верхний предел интегрирования порядка $50D_1^{1/4}$. Отметим, что члены $2\pi J_0(Rr)$ и $\tau_0^2 I_0$ выражения для I_1 в (6.25) при вычислении интегралов по r для σ_x и σ_y также могут расходиться. Но так как при их суммировании расходимость взаимно компенсируется, то I_1 можно представить в виде (6.13)

Рассмотрим теперь диапазон скорости $v_0 < v < C$, где $C = (gH)^{1/2}$ – скорость длинных волн. В этом случае интервал интегрирования по r разобьем на три интервала: $(0, r_1), (r_1, r_2)$ и (r_2, ∞) , где r_1, r_2 – корни уравнения $\tau_0 = 1$, при этом $r_2 > r_1$. В частности, выражения для σ_x принимают вид

$$\sigma_x = \sum_{i=1}^3 \sigma_{xi}, \quad \sigma_{x1} = \sigma_0 \int_0^{r_1} \xi(r) I_1 dr, \quad \sigma_{x2} = \sigma_0 \int_{r_1}^{r_2} \xi(r) I_1 dr, \quad \sigma_{x3} = \sigma_0 \int_{r_2}^{\infty} \xi(r) I_1 dr. \quad (6.27)$$

Для σ_y, τ_{xy} разбиение аналогично.

Исследование двух крайних интервалов проводится, как и для $v < v_0$, поскольку на пути интегрирования по θ в I_0, I_0^* особенности не возникают. На пути интегрирования по r при подстановке (6.13) в вы-

ражения для $\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \tau_{xy1}$ и $\sigma_{x3}, \sigma_{y3}, \tau_{xy3}$ могут возникать только интегрируемые особенности в точках r_1 и r_2 соответственно.

Для вычисления $\sigma_{x2}, \sigma_{y2}, \tau_{xy2}$ при $r_1 < r < r_2$ в интегралах I_0, I_0^* путь интегрирования по θ деформируем в контур L_0 , обходящий полюса θ_1, θ_4 в нижней, а θ_2, θ_3 в верхней полуплоскостях. Здесь $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0, \theta_{3,4} = \pi \mp \arccos \tau_0$.

В таком случае I_0 представляется в виде (6.15).

Выбор пути интегрирования при вычислении I_0^* проводится аналогично выбранному для вычисления (6.15). При этом соответствующие интегралы обозначим как I_{00}^* и I_{0k}^* .

После применения теоремы Коши найдем:

$$I_{00} = 2\pi(\Phi_1 + \Phi_2), \quad I_{00}^* = -2\pi(\Phi_1^* + \Phi_2^*), \quad (6.28)$$

где

$$\Phi_1, \Phi_1^* = \begin{cases} 0 & \text{при } \pi - \theta_0 < \gamma \leq \pi, \quad r_1^* \leq r \leq r_2^*, \\ \Phi_-(r), \Phi_-^*(r) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\Phi_2, \Phi_2^* = \begin{cases} \Phi_+(r), \Phi_+^*(r) & \text{при } 0 \leq \gamma \leq \theta_0, \quad r_1^* \leq r \leq r_2^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\Phi_{\mp} = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{1 - \tau_0^2}} \sin \left[Rr (\tau_0 \cos \gamma \mp \sqrt{1 - \tau_0^2} \sin \gamma) \right],$$

$$\Phi_{\mp}^* = \sin \left[Rr (\sqrt{1 - \tau_0^2} \sin \gamma \mp \tau_0 \cos \gamma) \right], \quad \theta_0 = \max_{r_1 < r < r_2} \arccos \tau_0,$$

$r_{1,2}^*(\gamma)$ — корни уравнения $\theta_2(r) = \gamma$, если $0 < \gamma < \theta_0$, и уравнения $\theta_3(r) = \gamma$ при $\pi - \theta_0 < \gamma < \pi$.

Функции $\Phi_{1,2}$ на рассматриваемых отрезках не имеют особенностей по r , возможно, за исключением интегрируемых в r_1 и r_2 .

Можно показать, что в выражениях I_0 и I_0^* суммы интегралов по L_k для $k = 1, 2, 4, 6, 7$ обращаются в ноль. Суммы интегралов по участкам L_3 и L_5 , параллельным мнимой оси, после соответствующих замен переменных и алгебраических преобразований приводятся к виду

$$I_{03} + I_{05} = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{1 - \tau_0^2}} \sum_{m,n=1}^2 (-1)^{m+n+1} \sin \vartheta_{mn} \int_1^{\infty} \Phi^* du,$$

$$I_{03}^* + I_{05}^* = \sum_{m,n=1}^2 \sin \vartheta_{mn} \int_1^{\infty} \Phi^* du, \quad (6.29)$$

где Φ^* и ϑ те же, что и в (6.17).

Заменяя $\sqrt{u^2 - 1}$ в Φ^* на $\sqrt{2(u-1)}$ в малой ε – окрестности $u=1$ устраняем возможную особенность интегрирования и приходим к выражениям (6.18), (6.19)

В результате с учетом (6.15), (6.18), (6.19), (6.28), (6.29) в выражении (6.27) для σ_{x2} и в аналогично полученных формулах для σ_{y2}, τ_{xy2} можно проводить численное интегрирование по r от r_1 до r_2 . Отметим, что представление I_1 из (6.25) в виде (6.13) на этом конечном интервале не целесообразно. Член с $J_0(Rr)$ не имеет особенностей при вычислении σ_{x2} и σ_{y2} в (6.27).

Пусть $\upsilon > C$. Тогда уравнение $\tau_0 = 1$ имеет только один положительный корень $r = r_2$. В этом случае для σ_x вместо (6.27) имеем

$$\sigma_x = \sigma_{x2} + \sigma_{x3}, \quad (6.30)$$

где в интеграле σ_{x2} нижний предел равен нулю. Входящие в σ_{x2} и σ_{x3} интегралы I_0 имеют вид (6.15) при $r_1 = 0$. Аналогично представляются σ_y, τ_{xy} .

Формулы (6.28) остаются в силе, если r_1^* является меньшим корнем уравнения $\theta_2(r) = \gamma$ в случае $\theta^* < \gamma < \theta_0$, и уравнения $\theta_3(r) = \gamma$ при $\pi - \theta_0 < \gamma < \pi - \theta^*$, где $\theta^* = \arccos(C/\upsilon)$. Если же выполняется $0 \leq \gamma \leq \theta^*$ или $\pi - \theta^* \leq \gamma \leq \pi$, то $r_1^* = 0$. Условия для r_2^* и формулы (6.29), (6.18), (6.19) остаются прежними.

Для количественной оценки величин изгибных напряжений проводились численные расчеты. При этом плотность морской воды полагалась равной $1030 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, а глубина бассейна – 100 м. Модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона льда принимались соответственно равными $3 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ и 0.34. Толщина льда менялась от 0.6 до 2.5 м, а нагрузка перемещалась со скоростью от 5 до 25 м/с. При этом значения скорости попадали в диапазоны с качественно различной структурой волновой картины [194]. Рассматривалась как сосредоточенная нагрузка, так и давления, распределенные по закону $f = k^2 e^{-(kR/H)^2} / \pi$ ($f^*(r) = e^{-(rH/2k)^2}$) для различных значений безразмерного параметра k , характеризующего распределение давлений в движущейся области.

Некоторые результаты расчетов иллюстрируются рисунками 6.26 – 6.29, на каждом из которых приведены топографии распределения σ_x (верхний левый), σ_y (верхний правый), τ_{xy} (нижний левый) и σ_g (нижний правый рисунок) для нагрузки массой $M = 1$ т, эпицентр которой движется справа налево по оси абсцисс при толщине льда 1 м. Изолинии (в килопаскалях) положительных (на гребнях изгиба) значений напряжения представлены сплошными, отрицательных (на впадинах изгиба) – штриховыми, а нулевых – штрихпунктирными линиями. Исключение составляют изолинии распределения σ_g на рис. 6.26, представленные для 0.2 и 0.5 кПа штрихами.

Топографии распределения напряжений при $v = 5 \text{ мс}^{-1}$ (из диапазона $v < v_0$) приведены на рис. 6.26 для сосредоточенной нагрузки. Изолинии здесь даны через 1 кПа. Видно, что для σ_x , σ_y и σ_g топографии симметричны как относительно трассы, так и относительно ортогональной к ней оси, проходящей через эпицентр нагрузки. Это согласуется со свойством топографий изгибных деформаций ледяного покрова при скоростях перемещения нагрузки, меньших минимума фазовой скорости в системе лед-вода. Максимумы каждой из компонент изгибных напряжений приходятся на окрестность эпицентра движущейся нагрузки. При этом наибольшими являются максимумы σ_x и σ_g . Убывание σ_x с удалением от эпицентра быстрее происходит вдоль трассы и медленнее в поперечном направлении. За областью убывания положительного напряжения образуется область более слабого отрицательного напряжения, вытянутая в поперечном направлении. При этом пик отрицательного напряжения возникает на трассе перемещения давлений (на рисунке – круговые изолинии -1 кПа слева и справа от эпицентра). На большем удалении от эпицентра образуются области более слабого положительного и отрицательного напряжения, причем последняя оказывается разомкнутой по обе стороны от трассы и плавно переходит в область близких к нулю значений σ_x . Это выражается в сложности картины на расстоянии более 200 м от эпицентра. Топография распределения σ_y качественно похожа на топографию σ_x , повернутую на 90° . Наиболее быстрое уменьшение σ_y происходит в поперечном направлении. Сдвиговое напряжение τ_{xy} по обе стороны от трассы имеет одинаковое распределение абсолютной величины, но разные знаки. При этом τ_{xy} принято за положительное сразу за эпицентром нагрузки справа по курсу ее перемещения. Наибольший рост (от нулевого значения в эпицентре) и убывание сдвигового напряжения происходит в направлениях, состав-

ляющих с трассой угол, близкий к 45° . Величина σ_g достигает максимума под эпицентром нагрузки и быстро спадает, причем спад происходит быстрее вдоль и поперек трассы, чем под углом 45° к ней.

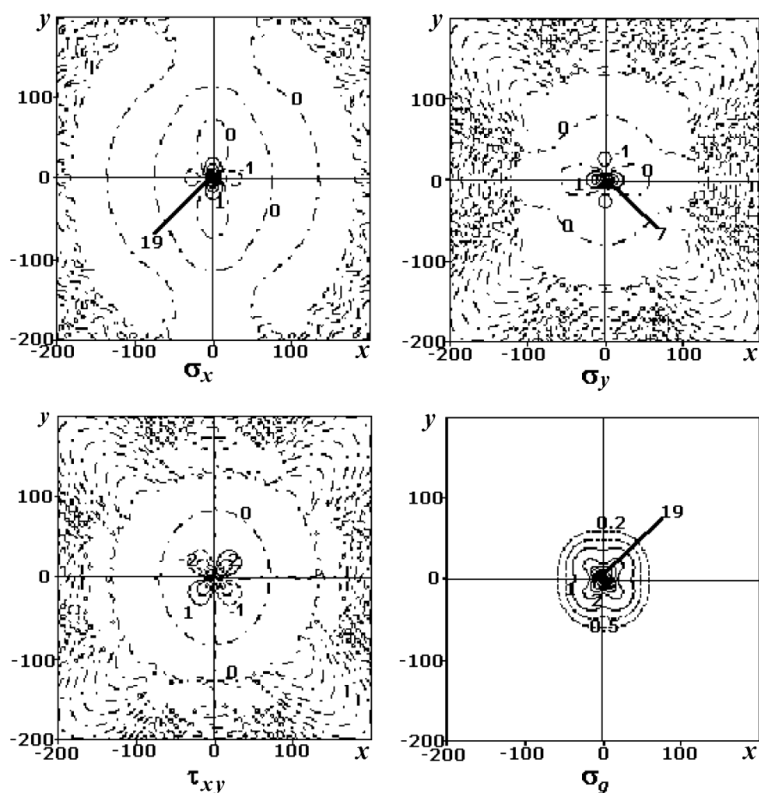


Рис. 6.26

На рис. 6.27 показаны топографии распределения напряжений в случае сосредоточенной нагрузки, движущейся со скоростью $v = 15 \text{ мс}^{-1}$. Это значение скорости находится в диапазоне $v_0 < v < v_1$, где выражение для v_1 приведено в разделе 4.3. Для такой скорости перед областью давлений распространяется система изгибных, а за ней – изгибно-гравитационных волн. При этом напряжения σ_x , имея волновую структуру, затухают с удалением от эпицентра давлений значительно медленнее, чем для $v < v_0$. Однако, в отличие от топографий распределения отклонений поверхности лед-вода от невозмущенного уровня, где наблюдается отставание максимального прогиба от эпицентра давлений, максимальное напряжение достигается непосредственно в точке приложения сосредоточенной нагрузки, как и в диапазоне $v < v_0$. Кроме того, напряжения в изгибных волнах перед давлениями заметно превышают

напряжения, обусловленные гравитационными волнами в следе. Это связано с тем, что вблизи трассы перемещения давлений изгибные волны имеют меньшую длину, чем гравитационные. Отрицательный пик напряжения, соответствующий первому гребню изгибной волны, примерно вдвое превышает отрицательный пик, соответствующий первой гравитационной волне, и по модулю составляет примерно $2/3$ от положительного пика под эпицентром нагрузки. Напряжение σ_y с удалением от эпицентра давлений убывает почти так же, как и в случае $v < v_0$. Качественно аналогично ведет себя и τ_{xy} вне малой окрестности эпицентра. Причем максимальные по модулю вдоль гребня (впадины) изгибной или изгибно-гравитационной волны значения σ_y и τ_{xy} достигаются на некотором удалении от трассы перемещения давления. Что касается распределения напряжения σ_g , то оно качественно похоже на распределение σ_x . Но убывание σ_g с удалением от трассы вдоль гребней (впадин) изгибных и изгибно-гравитационных волн происходит несколько медленнее. Это связано с тем, что на некотором удалении от трассы относительный вклад поперечного и сдвигового напряжений больший, чем непосредственно на трассе.

Топографии распределения компонент напряжения при скорости перемещения сосредоточенной нагрузки $25 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ приведены на рис. 6.28. Рассматриваемое здесь значение скорости попадает в диапазон $v_1 < v < C$, для которого характерно появление в волновом следе за давлениями угловой зоны генерации трех волновых систем: изгибных, продольных и поперечных гравитационных волн типа корабельных. На топографиях возмущений поверхности лед-вода это проявляется в основном в усложнении структуры желоба прогиба за давлениями. Однако на топографиях компонент изгибных напряжений усложнение структуры их распределения не столь заметно, так как величины вкладов трех указанных волновых систем в напряжения оказываются значительно меньшими вклада изгибных волн и прогиба под давлениями. Анализ изолиний на рис. 6.28 показывает, что напряжения в волновом следе по модулю не превышают 1 кПа, а сложность структуры следа проявляется лишь в извилистости нулевых изолиний σ_x и τ_{xy} и образовании эллипсообразных изолиний (1 кПа) в топографии распределения σ_g . В то же время напряжения, обусловленные прогибом непосредственно под нагрузкой и изгибными волнами перед ней, достигают 10 кПа. Причем максимальные по модулю значения напряжений σ_x и τ_{xy} вдоль гребней и впадин изгибных волн достигаются вне трассы, а для σ_y – практиче-

ски на ортогональной к ней оси, проходящей через эпицентр давлений. Это приводит к тому, что величина σ_g с удалением от трассы по гребню (впадине) изгибной волны меняется слабо. Ее заметное убывание сказывается за пересечением линии гребня (впадины) с осью ординат, движущейся вместе с нагрузкой.

Отметим, что поскольку вклад поперечных гравитационных волн в следе с ростом ν становится малозаметным, то переход скорости перемещения давления через C , когда этот вклад исчезает, на распределении напряжений практически не сказывается.

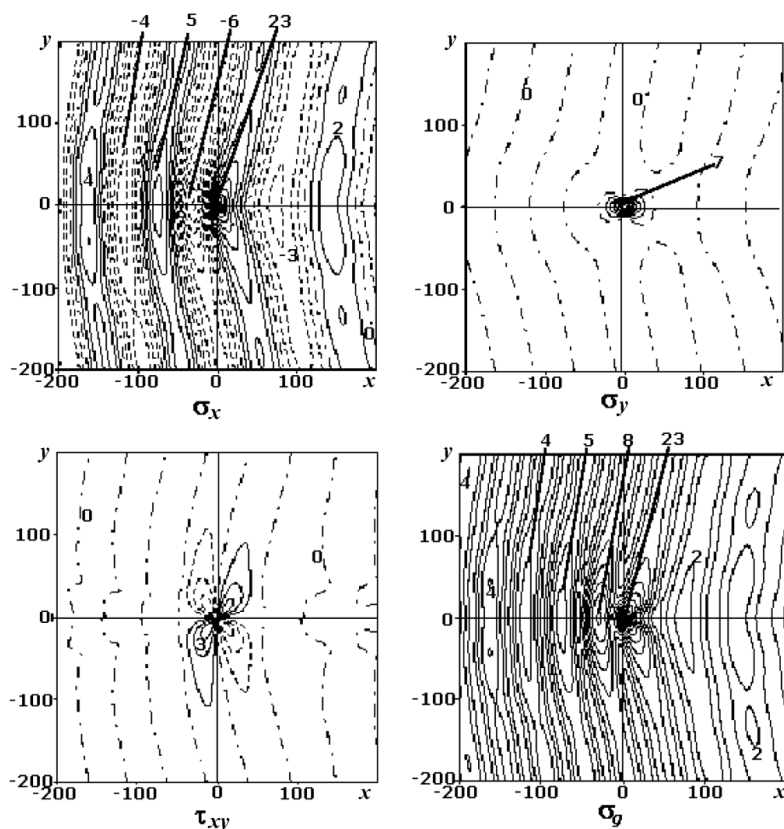


Рис. 6.27

Влияние рассредоточения давлений в движущейся области на распределение изгибных напряжений ледяного покрова можно проследить, сравнивая топографии на рис. 6.28 и рис. 6.29 при одинаковых значениях ν и h , но для сосредоточенной (рис. 6.28) и распределенной ($k = 10$, рис. 6.29) нагрузки массой 1 т. При этом изолинии на рис. 6.29 даны через 0,2 кПа. Видно, что максимальные положительные значения напряжений σ_x и σ_y с уменьшением k начинают отставать от эпицентра дви-

Причем с уменьшением k изгибное напряжение, вызванное прогибом под давлениями, убывает более значительно, чем напряжение, обусловленное возмущениями волнового характера.

Таким образом, компоненты напряжений, обусловленных изгибными колебаниями плавающего ледяного покрова, зависят не только от характеристик ледяного покрова, но и от скорости перемещения и характера распределения нагрузки. Наибольший вклад в распределение напряжений вносят изгибные волны и прогиб льда под нагрузкой. В случае сосредоточенных давлений максимальные напряжения возникают непосредственно под нагрузкой при любых скоростях ее перемещения. Увеличение области распределения нагрузки фиксированной массы приводит к уменьшению изгибных напряжений. При этом точка максимального напряжения под нагрузкой отстает от ее эпицентра. Угол между направлением максимальных напряжений, обусловленных изгибными волнами, и трассой перемещения эпицентра давлений, растет с увеличением как скорости движения нагрузки, так и площади ее распределения, а убывает с ростом цилиндрической жесткости льда.

ЧАСТЬ II. ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ МОРЕ С ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

ГЛАВА 7. ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В МОРЕ СО СКАЧКОМ ПЛОТНОСТИ

7.1. Волны от начальных возмущений

Пусть на поверхности двухслойной идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей неограниченный бассейн постоянной глубины H , плавает сплошной ледяной покров. Верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний – толщину H_2 и плотность ρ_2 . В начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится, а поверхность льда ζ_1 и граница раздела слоев ζ_2 горизонтальны. Исследуем процесс развития волн, возникающих под действием малых возмущений участка дна бассейна, происходящих с вертикальной скоростью.

$$w = af(x, y)\psi(t), \quad \psi(0) = 0. \quad (7.1)$$

Обозначим через φ_1 и φ_2 потенциалы возмущенных скоростей верхней и нижней жидкостей. Моделируя ледяной покров тонкой упругой пластинкой, получим для определения этих функций уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial z^2} = 0, \quad s=1,2 \quad (7.2)$$

с граничными

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \varphi_1 &= 0 \text{ при } z = H_1, \quad \mathcal{L}_2(\varphi_2 - \gamma \varphi_1) = 0 \text{ при } z = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= af(x, y)\psi(t) \text{ при } z = -H_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

и начальными условиями.

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \text{ при } t = 0. \quad (7.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= D\nabla^4 \frac{\partial}{\partial z} + \chi \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} + \rho_1 g \frac{\partial}{\partial z} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z}, \quad \gamma = \rho_1 / \rho_2, \quad \chi = \rho h, \quad H = H_1 + H_2, \end{aligned}$$

ρ , h – плотность и толщина льда, D и ∇^4 определены в (4.3), ось z направлена вертикально вверх, начало координат выбрано на невозмущенной границе раздела слоев.

Применяя для решения задачи (7.1)–(7.4) преобразование Фурье по переменным x и y , преобразование Лапласа по t и учитывая условия

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \text{ при } z = H_1, \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \quad (7.5)$$

найдем для ζ_s такое интегральное представление

$$\zeta_s = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(m, n) K_s \exp[i(mx + ny)] dm dn, \quad s=1, 2, \quad (7.6)$$

$$K_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{d_s}{\Delta} \psi^*(\alpha) e^{\alpha t} d\alpha,$$

$$d_1 = \alpha^3 (\text{chr} H_1 \text{chr} H_2)^{-1}, \quad d_2 = \alpha (\alpha^2 \psi_0 + d_3) \text{ch}^{-1} r H_2, \quad d_3 = r g D_0 \text{thr} H_1,$$

$$\Delta = b\alpha^4 + b_1\alpha^2 + b_2, \quad b = \chi_1 r g l_1 + l_3, \quad b_1 = r g (l_1 D_0 + \varepsilon \psi_0 \text{thr} H_2),$$

$$b_2 = r g D_0 l_2, \quad l_1 = \text{thr} H_1 + \gamma \text{thr} H_2, \quad l_2 = \varepsilon g \text{thr} H_2 \text{thr} H_1,$$

$$l_3 = 1 + \gamma \text{thr} H_1 \text{thr} H_2, \quad \psi_0 = 1 + \chi_1 r g \text{thr} H_1, \quad r^2 = m^2 + n^2,$$

$$\chi_1 = \frac{\chi}{\rho_1 g}, \quad D_0 = 1 + D_1 r^4, \quad D_1 = D/(\rho_1 g), \quad \varepsilon = 1 - \gamma,$$

$f^*(m, n)$ и $\psi^*(\alpha)$ - преобразование Фурье и Лапласа функций $f(x, y)$ и $\psi(t)$. Интегралы K_s сходящиеся, так как подынтегральные функции стремятся к нулю при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Кроме того, $\lim_{r \rightarrow \infty} K_s(r, t) = 0$. Следовательно, интегралы (7.6) также сходятся для произвольной функции $f(x, y)$, представимой интегралом Фурье.

Вычислим K_s для $\psi(t) = \delta(t - t_0)$, $t_0 > 0$, где $\delta(t)$ - дельта функция. Тогда ζ_s в осесимметричном случае ($f(x, y) = f(R)$, $R^2 = x^2 + y^2$) с ошибкой порядка $O(R^{-3/2})$ можно переписать так:

$$\zeta_s = (-1)^{s+1} \frac{a}{\sqrt{2\pi R}} (J_{s1} - J_{s2}). \quad (7.7)$$

$$J_{s1} = \int_0^\infty F_{s1} \sum_{k=1}^2 \cos \alpha_k dr, \quad J_{s2} = \int_0^\infty F_{s2} \sum_{k=3}^4 \cos \alpha_k dr,$$

$$F_{1n} = f_1 \gamma_n, \quad F_{2n} = f_1 (d_3 - \gamma_n \psi_0) \text{chr} H_1, \quad n=1, 2,$$

$$\alpha_k = R M_k(r) - (-1)^k \frac{\pi}{4}, \quad M_{1,2} = v \tau_1 \mp r, \quad M_{3,4} = v \tau_2 \mp r,$$

$$f_1(r) = \sqrt{r} f^*(r) [b(\gamma_1 - \gamma_2) \text{chr} H_1 \text{chr} H_2]^{-1}, \quad v = t/R,$$

$$\tau_{1,2} = \sqrt{\gamma_{1,2}}, \quad \gamma_{1,2} = \frac{1}{2} b_1 b^{-1} [1 \pm (1 - 4 b b_2 b_1^{-2})^{-1/2}].$$

Здесь у t опущен индекс 1, при этом $t_1 = t - t_0$. Отсюда найдем асимптотическое выражение ζ_s для больших положительных R методом стационарных фаз. Фазовые функции M_2 и M_4 не имеют стацио-

нарных точек. Поэтому интегралы от вторых слагаемых в J_{s1} и J_{s2} затухают не медленнее, чем $R^{-3/2}$. Следовательно, можно записать

$$\zeta_s = (-1)^{s+1} \frac{a}{\sqrt{2\pi R}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (F_{s1} e^{iRM_1} - F_{s2} e^{iRM_3}) e^{i\pi/4} dr. \quad (7.8)$$

Функция $\tau'_1(r)$ для $0 < r < r_1^0$ убывает, а для $r > r_1^0$ возрастает. Причем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tau'_1(r) = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \tau'_1(r) = u_1^0, \\ u_1^0 = \sqrt{gH/2}(1+\beta)^{1/2}, \quad \beta = (1 - 4\varepsilon H_1 H_2 / H^2)^{1/2}. \quad (7.9)$$

Штрих означает производную по r , r_1^0 – корень уравнения $\tau'_1(r) = 0$. Зависимость $\tau'_1(r)$ для

$$E = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \rho = 870 \text{ кг/м}^3, \quad \mu = 0.34, \quad (7.10) \\ \varepsilon = 10^{-2}, \quad H_1 = 10^2 \text{ м}, \quad H_2 = 10^3 \text{ м}$$

иллюстрируется рис. 7.1. Сплошные линии соответствуют сплошному льду ($E \neq 0$), а штриховые – битому ($E = 0$). Кривые 1, 2, 3 отвечают толщинам льда, равным 1, 2, 5 м. Зависимость $\tau'_1(r)$ в море со свободной поверхностью ($h = 0$) и в море, покрытом битым льдом толщиной 1 м (штриховая линия 1), с точностью до 1% совпадают между собой.

Из рис. 7.1 видно, что влияние сплошного ледяного покрова на $\tau'_1(r)$ заметно сказывается лишь для $r > r_1^0$. При этом упругие силы влияют более существенно, чем массовые.

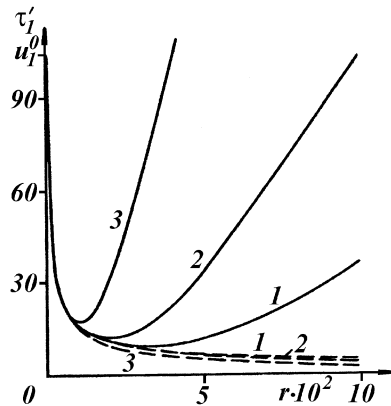


Рис. 7.1

Таким образом, фазовая функция $M_1(r)$ имеет при $v^{-1} > u_1^0$ одну ($r = r_1^*$), а при $u_1 < v^{-1} < u_1^0$ две ($r = r_1$, $r = r_1^*$) стационарные точки – корни уравнения $1 - v\tau'_1(r) = 0$. Здесь $u_1 = \tau'_1(r_1^0)$, $r_1^* > r_1$. Для $v^{-1} < u_1$

стационарных точек у $M_1(r)$ нет. Стационарная точка r_1^* обусловлена исключительно наличием упругих сил ледяного покрова. При фиксированных v и h большему E отвечает меньшее значение r_1^* . Если лед битый, то $\tau_1'(r)$ – функция убывающая. В этом случае будет только одна стационарная точка $r = r_1$. Значение r_1 убывает с ростом h .

Так как для сплошного и для битого льда $\tau_2''(r) < 0$, а

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tau_2' = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \tau_2' = u_2^0, \quad u_2^0 = \sqrt{gH/2}(1-\beta)^{1/2}, \quad (7.11)$$

то фазовая функция $M_3(r)$ при $u_2 > v^{-1}$ имеет только одну стационарную точку $r = r_2$. Для $u_2^0 < v^{-1}$ стационарных точек нет. Влияние ледяного покрова на величину r_2 при значениях параметров (7.10) и $h \leq 5$ м не превышает 1%.

Таким образом, для ζ_s из (7.8) найдем

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1}^* + O(R^{-3/2}), & R > u_1^0 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + O(R^{-3/2}), & u_2^0 t < R < u_1^0 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & u_1 t < R < u_2^0 t, \\ \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & R < u_1 t, \end{cases} \quad (7.12)$$

если $u_2^0 > u_1$ и

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1}^* + O(R^{-3/2}), & R > u_1^0 t \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + O(R^{-3/2}), & u_1 t < R < u_1^0 t, \\ O(R^{-3/2}), & u_2^0 t < R < u_1 t, \\ \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & R < u_2^0 t, \end{cases} \quad (7.13)$$

если $u_2^0 < u_1$. Здесь

$$\eta_{sk} = a_1 \frac{a}{R} F_{sk}(r_k) [-v\tau_k''(r_k)]^{-1/2} \cos \theta_k(r_k),$$

$$\eta_{s1}^* = (-1)^s \frac{a}{R} F_{s1}(r_1^*) [v\tau_1''(r_1^*)]^{-1/2} \sin \theta_1(r_1^*),$$

$$\theta_k = rR - \tau_k(r)t, \quad r = 1, 2.$$

При $k=1$ следует положить $a_1 = (-1)^{s+1}$, а при $k=2$ – $a_1 = (-1)^s$.

В случае битого льда ($E=0$)

$$\zeta_s = \begin{cases} O(R^{-3/2}), & R > u_1^0 t, \\ \eta_{s1} + O(R^{-3/2}), & u_2^0 t < R < u_1^0 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s2} + O(R^{-3/2}), & R < u_2^0 t. \end{cases} \quad (7.14)$$

При $h = 0$ это выражение определяет вид ζ_s в море со свободной поверхностью. Из формул (7.12), (7.13) видно, что импульсные смещения участка дна бассейна в случае осесимметричной функции $f(x, y)$ и сплошного льда генерируют на поверхности лед-вода и поверхности раздела слоев по три системы волн η_{s1} , η_{s1}^* , η_{s2} , затухающих с удалением от эпицентра возмущений как R^{-1} . Если же лед битый, то возникают только волны η_{s1} , η_{s2} . На основании (7.12) – (7.14) можно построить количественную картину изменения ζ_1 и ζ_2 с течением времени в произвольной фиксированной точке и картину волн в фиксированный момент времени.

Волны η_{11} , η_{21} , отвечающие стационарной точке $r = r_1$, обычные поверхностные волны, деформированные за счет ледяного покрова [17] и неоднородности жидкости [20]. Волны η_{s2} – внутренние. Они соответствуют стационарной точке $r = r_2$. Волны η_{s1}^* обусловлены исключительно упругими силами ледяного покрова. В случае битого льда они не генерируются, что видно из (7.14).

Упругие волны приходят в фиксированную точку раньше гравитационных и поэтому выполняют роль их предшественников. Задние фронты поверхностных гравитационных и упругих волн перемещаются со скоростью u_1 . Скорости передних фронтов поверхностных и внутренних волн равны соответственно u_1^0 и u_2^0 . Как видно из (7.9), (7.11), скорости $u_{1,2}^0$ не зависят от характеристик льда. Скорость же u_1 существенно растет с ростом h . При значениях параметров (7.10) это иллюстрируется рис. 7.2. На данном рисунке u_1^0 , u_2^0 , u_1 , представленные штрихпунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно, образуют пять областей G_k ($k = 1, 2, \dots, 5$). В области G_1 генерируются только упругие η_{s1}^* , а в G_2 – упругие η_{s1}^* и гравитационные поверхностные η_{s1} волны. В области G_3 – упругие η_{s1}^* , гравитационные поверхностные η_{s1} и внутренние η_{s2} , а в G_4 – только волны η_{s2} . В заштрихованной области G_5 образуются волны, затухающие с расстоянием как $R^{-3/2}$.

Отсюда видно, что при значениях параметров (7.10) и $h < 6 \cdot 10^{-2}$ м в фиксированную точку, находящуюся на заданном расстоянии R от эпицентра возмущений, приходят сначала упругие, затем гравитационные поверхностные и, наконец, внутренние волны, затухающие как R^{-1} . Для $h > 6 \cdot 10^{-2}$ м в эту точку также приходят сначала упругие, а затем по-

верхностные волны, затухающие как R^{-1} . За ними приходят волны, затухающие как $R^{-3/2}$, и только потом – внутренние волны, имеющие порядок затухания R^{-1} . При этом время от ухода поверхностных волн до прихода внутренних увеличивается с ростом толщины льда.

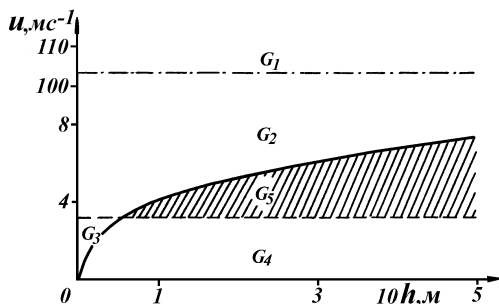


Рис. 7.2

Расчеты скорости u_1 приводились для ε , H_1 (м) и h (м) изменяющихся в пределах

$$10^{-4} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}, \quad 50 \leq H_1 \leq 200, \quad 10^{-2} \leq h \leq 5. \quad (7.15)$$

Они показали, что изменения ε и H_1 в указанных пределах весьма мало влияют на поведение $u_1(h)$.

Отметим, что в море со свободной поверхностью и в море, покрытом битым льдом, роль предшественников выполняют волны, затухающие как $R^{-3/2}$. Они сосредоточены в этом случае в области G_1 . Волны η_{11} , η_{12} , η_{11}^* , образующиеся на поверхности лед-вода, отличаются при фиксированном k от волн η_{21} , η_{22} , η_{21}^* на поверхности раздела только амплитудами.

Для количественной оценки влияния ледового покрытия на соотношения между амплитудами волн η_{11} и η_{21} , η_{11}^* и η_{21}^* , η_{12} и η_{22} проводились численные расчеты отношений $\tau_1^0 = \eta_{11} / \eta_{21}$, $\tau_1^* = \eta_{11}^* / \eta_{21}^*$, $\tau_2^0 = \eta_{12} / \eta_{22}$ при значениях параметров (7.10). Толщина льда h и перепад плотности ε изменялись при этом в пределах (7.15). Результаты расчетов приведены на рис. 7.3, 7.4. На этих рисунках $v_1 = (v u_1^0)^{-1}$, $v_2 = (v u_2^0)^{-1}$, $v_1^* = u_1 / u_1^0$, кривые 1–6 отвечают толщинам льда 5, 4, 2, 1, 0.2, 0 м, сплошные линии соответствуют $\varepsilon = 10^{-2}$, а штриховая – $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Причем τ_2^0 приведены с точностью до знака. Так как $v = t / R$, то функции τ_1^0 , τ_1^* , τ_2^0 при фиксированном R иллюстрируют изменение отношений амплитуд волн на поверхности лед-вода к амплитудам волн на поверхности раздела слоев с течением времени в данной точке, а при

фиксированном t – пространственное изменение этих отношений. Функция $\tau_1^0(v_1)$ в случае сплошного льда вычислялась при $u_1 < v^{-1} < u_1^0$, а для битого льда – при $0 < v^{-1} < u_1$. Функции же τ_1^* и τ_2^0 рассчитывались соответственно для $u_1 < v^{-1} < 2u_1^0$, $0 < v^{-1} < u_2^0$.

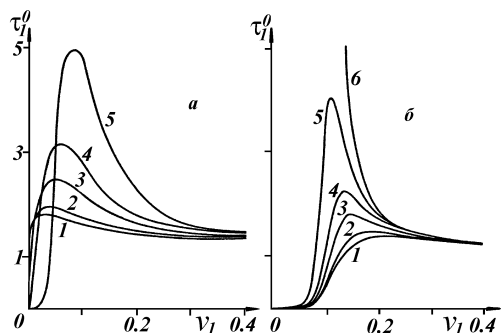


Рис. 7.3

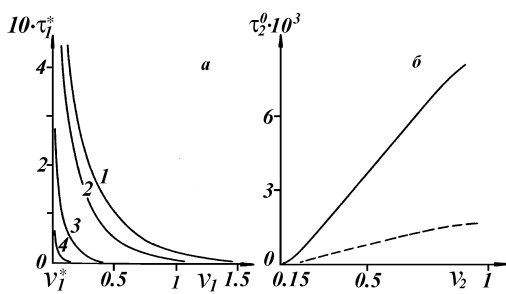


Рис. 7.4

Из рис. 7.3 видно, что при наличии сплошного (рис. 7.3,а) и битого (рис. 7.3,б) льда существует такое v_3 , что η_{11} для $v_1 > v_3$ больше, а для $v_1 < v_3$ меньше, чем η_{21} . Величина v_3 убывает с ростом h , если лед сплошной, и растет, если лед битый. Отметим, что более тонкому льду отвечает большее значение максимума τ_1^0 . Его положение с ростом h смещается при $E = 0$ в сторону больших, а при $E \neq 0$ – в сторону меньших значений v_1 . В области малых значений v_1 функция $\tau_1^0(v_1)$ убывает тем сильнее, чем толще лед. Упругие силы ледяного покрова уменьшают это затухание причем τ_1^0 для v , близких к u_1^0 , не зависит от h .

Таким образом, в море, покрытом сплошным или битым льдом, можно указать при фиксированном t такое R (при фиксированном R такое t), что η_{21} существенно больше η_{11} , в то время как в море со свободной поверхностью всегда $\eta_{11} > \eta_{21}$.

Функция τ_1^* (рис. 7.4,а) убывает с ростом v^{-1} . При этом $\tau_1^* < 1$ для $v^{-1} > 5 \cdot 10^{-3}(u_1^0 - u_1)$ и $h \leq 5$. Следовательно, в указанной области изменения v^{-1} упругая волна имеет на поверхности лед-вода существенно меньшую амплитуду, чем на поверхности раздела слоев.

Зависимость τ_2^0 от v^{-1} такая же, как и в море со свободной поверхностью. Внутренняя волна на поверхности раздела имеет амплитуду во много раз большую, чем на поверхности лед-вода, а фазы волн противоположны [113]. Чем меньше ε , тем η_{22}/η_{21} больше.

Пусть волны генерируются давлениями

$$p = p_0 f(x, y) \delta(t - t_0), \quad t_0 > 0, \quad (7.16)$$

действующими над ограниченной областью ледяного покрова в течение малого промежутка времени. Для изучения возникающего волнового движения следует потребовать, чтобы потенциалы φ_1 и φ_2 возмущенных скоростей верхней и нижней жидкостей, полученные из уравнений (7.2), удовлетворяли на поверхности лед-вода и на дне соответственно условиям $\mathcal{L}_1 \varphi_1 = -\partial p / \partial t$, $\partial \varphi_2 / \partial z = 0$, а на разделе слоев и в начальный момент времени – условиям (7.3), (7.4). Решая задачу так же, как и при импульсных смещениях участка дна, найдем в осесимметричном случае для ζ_s формулы (7.12), (7.13), если лед сплошной ($E > 0$), и формулу (7.14), если лед битый ($E = 0$). В этих формулах

$$F_{1n} = f_n(r)(l_2 - \gamma_n l_1), \quad F_{2n} = f_n(r) \gamma_n \operatorname{th} r H_2 \operatorname{ch}^{-1} r H_1, \\ \theta_n = rR - \tau_n(r) - \frac{\pi}{2}, \quad f_n(r) = r^{3/2} g f^*(r) [b(\gamma_1 - \gamma_2) \tau_n]^{-1}, \quad a = \frac{p_0}{\rho_1 g}, \quad n = 1, 2.$$

Предположим теперь, что в начальный момент времени $t = 0$ жидкость покоится, а поверхность лед-вода ζ_1 и поверхность раздела слоев ζ_2 возмущены, т.е.

$$\varphi_1(x, y, z, 0) = \varphi_2(x, y, z, 0) = 0, \\ \zeta_1(x, y, 0) = c_1 f_1(x, y), \quad \zeta_2(x, y, 0) = c_2 f_2(x, y). \quad (7.17)$$

Решая (7.2) с условиями (7.3) при $z = H_1$ и $z = 0$; $\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0$ при $z = -H_2$ и (7.17) при $t = 0$ методом интегральных преобразований, получим для ζ_s в случае симметричных относительно оси z начальных возмущений (7.17) формулы (7.12) – (7.14), где

$$F_{1n} = -f_3(r) [c_1 f_1^*(r) (l_2 \psi_0 \operatorname{th}^{-1} r H_1 - \gamma_n b) - c_2 f_2^*(r) l_2 \operatorname{sh}^{-1} r H_1], \\ F_{2n} = f_3(r) [c_1 f_1^*(r) r g D_0 \gamma \operatorname{th} r H_2 \operatorname{h}^{-1} r H_1 - c_2 f_2^*(r) (r g D_0 l_1 - \gamma_n b)], \\ n = 1, 2, \quad t_1 = t, \quad f_3 = \sqrt{r} [b(\gamma_1 - \gamma_2)]^{-1}, \quad a = 1, \quad (7.18)$$

$f_1^*(r)$, $f_2^*(r)$ – преобразование Фурье функций $f_1(R)$, $f_2(R)$, а все другие обозначения те же, что и при импульсных смещениях участка дна.

Формулы (7.12), (7.13), (7.18) характеризуют процесс распространения заданных начальных возмущений (7.17) в море, покрытом сплошным льдом, а формулы (7.14), (7.18) – в море с битым льдом при условии, что внешние возмущающие силы отсутствуют. Видно, что начальные возвышения (7.17) в условиях сплошного льда приводят к

образованию поверхностных η_{11} , η_{21} , внутренних η_{12} , η_{22} и упругих η_{11}^* , η_{21}^* волн. Последние выполняют роль предшественников для гравитационных волн. Если лед битый, то η_{11}^* , η_{21}^* не генерируются.

Пусть начальное возвышение поверхности лед-вода отсутствует ($c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$). Тогда при $rH_3 \gg 1$, $H_3 = \min(H_1 H_2)$ найдем

$$\tau_2^0 = -2\varepsilon[D_0(r_2)(1+\gamma) - \varepsilon(1+\chi_1 r_2 g)]^{-1} \exp(-r_2 H_1).$$

Эта формула показывает, что амплитуда внутренней волны на поверхности раздела во много раз больше, чем на поверхности лед-вода, а фазы волн противоположны при малых ε . Если отсутствует начальное возвышение поверхности раздела ($c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$), то $\tau_1^0 = \tau_3(r_1)$, $\tau_1^* = \tau_3(r_1^*)$, где

$$\tau_3 = [(1+\gamma)D_0 - \varepsilon(1+\chi_1 r g)](2\gamma D_0)^{-1} \exp(rH_1).$$

Следовательно, при $rH_3 \gg 1$ амплитуды η_{11} и η_{11}^* больше амплитуд η_{21} и η_{21}^* соответственно, а фазы поверхностных гравитационных и упругих волн на поверхности лед-вода совпадают с фазами на границе раздела.

Таким образом, характер волнового процесса, генерируемого в двухслойной жидкости импульсными смещениями участка дна бассейна (7.1), импульсными давлениями (7.16) и начальными возвышениями (7.17) поверхности лед-вода и поверхности раздела слоев, не зависит от вида возмущений. Каждый из рассмотренных генераторов приводит к образованию одинакового числа волн, отличающихся только амплитудами. Скорости же передних фронтов гравитационных волн и скорости заднего фронта поверхностной гравитационной и упругой волн при этом одни и те же

7.2. Неустановившиеся волны от периодических поверхностных давлений

Пусть на поверхности двухслойной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H плавает сплошной ледяной покров. Верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний – толщину H_2 и плотность ρ_2 . В начальный момент времени ледяной покров и жидкость находятся в покое, а поверхность лед-вода ζ_1 и граница раздела слоев ζ_2 горизонтальны. Начиная с $t = 0$ к поверхности ледяного покрова прикладываются периодические давления.

$$p = p_0 f(x, y) \exp(i\sigma t). \quad (7.19)$$

Проведем исследование процесса развития возникающего волнового движения. Потенциалы φ_1 и φ_2 возмущенных скоростей в верхнем и нижнем слоях определим из уравнений (7.2), граничных условий (7.3) на границе раздела слоев, условий

$$\mathcal{L}_1\varphi = -\frac{\partial p}{\partial t} \text{ при } z = H_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -H_2$$

на поверхности лед-вода и на дне, а также начальных условий (7.4). Применяя для решения задачи преобразование Фурье по x , y и Лапласа по t и используя для определения ζ_1 и ζ_2 кинематические условия (7.5), найдем [60]

$$\zeta_s = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r f^*(m, n) K_s \exp[mx + ny] dm dn, \quad s=1, 2, \quad (7.20)$$

$$K_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{d_s}{(\alpha-i\sigma)(r, \alpha)} \exp(\alpha t) d\alpha,$$

$$d_1 = \alpha^2 l_1 + l_2, \quad d_2 = \alpha^2 \gamma \text{th} r H_2 \text{ch}^{-1} r H_1, \quad a = p_0 / \rho_1,$$

где обозначения l_1, l_2, γ те же, что и в (7.6).

Вычисляя интегралы Меллина, получим

$$K_s = a_s \sum_{k=1}^5 p_{sk} \alpha_k, \quad a_1 = b^{-1}, \quad a_2 = b^{-1} \gamma \text{th} r H_2 \text{ch}^{-1} r H_1,$$

$$p_{11} = (l_2 - \sigma^2 l_1) / \Delta_1, \quad p_{1,2} = -(l_2 - \gamma_1 l_1) / \Delta_2, \quad p_{13} = (l_2 - \gamma_1 l_1) / \Delta_3,$$

$$p_{14} = (l_2 - \gamma_2 l_1) / \Delta_4, \quad p_{15} = -(l_2 - \gamma_2 l_1) / \Delta_5, \quad p_{21} = -\sigma^2 / \Delta_1,$$

$$p_{22} = \gamma_1 / \Delta_2, \quad p_{23} = -\gamma_1 / \Delta_3, \quad p_{24} = -\gamma_2 / \Delta_4, \quad p_{25} = \gamma_2 / \Delta_5,$$

$$\Delta_1 = (\sigma^2 - \gamma_1)(\sigma^2 - \gamma_2), \quad \Delta_{2,3} = 2\tau_1(r)(\gamma_1 - \gamma_2)(\sigma \mp \tau_1),$$

$$\Delta_{4,5} = 2\tau_2(r)(\gamma_1 - \gamma_2)(\sigma \mp \tau_2),$$

$$\alpha_1 = \exp(i\sigma t), \quad \alpha_{2,3} = \exp(\pm i\tau_1 t), \quad \alpha_{4,5} = \exp(\pm i\tau_2 t), \quad r^2 = m^2 + n^2,$$

где l_1, l_2, b определяются из (7.6), а $\gamma_{1,2}$ и $\tau_{1,2}$ те же, что и в (7.7).

В случае осесимметричного распределения давлений (7.19) выражение (7.20) с ошибкой порядка не ниже $R^{-3/2}$ примет вид

$$\zeta_s = a \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \int_0^{\infty} r^{3/2} f^*(r) K_s \cos\left(rR - \frac{\pi}{4}\right) dr. \quad (7.21)$$

Подынтегральные выражения в (7.21) представляют собой аналитические функции в окрестности положительной действительной полуоси, так как особенности типа простых полюсов, содержащиеся в отдельных слагаемых, взаимно погашаются. Эти особенности являются корнями уравнений

$\sigma = \tau_1$ и $\sigma = \tau_2$, имеющих только по одному положительному корню $r = r_1$ и $r = r_2$. Деформируем исходный путь интегрирования в контур, идущий вдоль действительной полуоси, но обходящий полюса $r = r_{1,2}$ по малым полуокружностям в верхней полуплоскости, и перепишем (7.21) в виде

$$\zeta_s = \sum_{k=1}^5 J_{sk}, \quad (7.22)$$

$$J_{sk} = a \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \int_{L_k} a_s r^{3/2} f^*(r) p_{sk} \alpha_k \cos\left(rR - \frac{\pi}{4}\right) dr, \quad s=1,2.$$

Здесь путь L_1 обходит точки $r = r_1$ и $r = r_2$, путь L_2 – только точку $r = r_1$, L_4 – только точку $r = r_2$, а L_3, L_5 совпадают с положительной полуосью. На этих контурах $\text{Re}(i\tau_{1,2}) \leq 0$. Следовательно, интегралы J_{sk} при $k = 2-5$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного R . Поэтому J_{s1} представляют собой решение рассматриваемой задачи для установившегося движения. Вычисляя J_{s1} методом контурного интегрирования, найдем

$$J_{s1} = \eta_{s1} + \eta_{s2}, \quad (7.23)$$

$$\eta_{sk} = (-1)^k a \sqrt{\frac{\pi}{2R}} V_k^{-1} M(r_k) N_s(r_k) \sin \theta_k,$$

$$N_1 = f_1(l_2 - \sigma^2 l_1) \sigma^{-1}, \quad N_2 = -f_1 \gamma \sigma \text{th} r H_2 \text{ch}^{-1} r H_1,$$

$$M = [b(\gamma_1 - \gamma_2)]^{-1}, \quad V_k = \tau'_k(r_k), \quad f_1 = r^{3/2} f^*(r),$$

$$\theta_k = r_k R - \sigma t - \frac{\pi}{4}, \quad k=1,2, \quad s=1,2.$$

Отметим, что эти формулы в случае сплошного льда справедливы при выполнении приближения теории тонких пластин. Они заключаются в том, что линейный размер пластины (в нашем случае половина длины волны изгиба) превосходит ее толщину не менее чем в 5 раз [74].

Для жидкости со свободной поверхностью и покрытой битым ($E = 0$) льдом формулы (7.23) справедливы при $\sigma > 0$ и $0 < \sigma < \sqrt{1/\chi_1}$ соответственно. При $\sigma > \sqrt{1/\chi_1}$ волны, имеющие порядок затухания $1/\sqrt{R}$, в море, покрытом битым льдом, не генерируются. Это подтверждается и экспериментальными наблюдениями [189].

Асимптотические выражения J_{sk} для $k = 2-5$ и больших значений R найдем методом стационарных фаз. Вычислим вначале J_{12} , представив

$$J_{12} = J_1 + J_2,$$

$$J_{1,2} = \frac{a}{\sqrt{2\pi R}} \exp\left(\mp i \frac{\pi}{4}\right) \int_{L_2} b^{-1} f_1(r) p_{12} \exp(iRM_{1,2}) dr,$$

$$M_{1,2} = \pm r + v\tau_1, \quad v = t/R.$$

Так как фазовая функция M_1 не имеет стационарных точек ($M_1'(r) > 0$ при $r > 0$), а на контуре L_2 выполняется условие $\text{Re}(iM_1) \leq 0$, то для всех значений v интегрированием по частям находим $J_1 \rightarrow 0$ по крайней мере как $R^{-3/2}$. Фазовая функция $M_2(r)$ для $vu_1 > 1$ также не имеет стационарных точек. Для $u_1 < v^{-1} < u_1^0$ она имеет две, а для $u_1^0 v < 1$ – одну стационарные точки, являющиеся корнями уравнения $v\tau_1' - 1 = 0$.

Анализируя расположение стационарных точек, находим, что $\text{Re}(iM_2) \leq 0$ на исходном контуре L_2 для $vV_1 > 1$. Для $vV_1 < 1$ это условие выполняется на контуре L_2^* , совпадающем с L_2 всюду, кроме окрестности полюса $r = r_1$, которую L_2^* обходит по полуокружности в нижней полуплоскости. Заменяя в J_2 для $vV_1 < 1$ интегрирование по контуру L_2 интегрированием по L_2^* с добавлением соответствующего вычета, находим

$$J_{12} = \begin{cases} O(R^{-3/2}), & R < u_1 t, \\ O(R^{-1}), & u_1 t < R < V_1 t, \\ -\eta_{11} + O(R^{-1}), & R > V_1 t. \end{cases}$$

Вычисляя аналогичным образом J_{1k} при $k = 3, 4, 5$ и J_{2k} при $k = 2, 3, 4, 5$ и подставляя J_{sk} в (7.22), получим

$$\begin{aligned} \zeta_s &= \zeta_{s1} + \zeta_{s2}, \\ \zeta_{s1} &= \begin{cases} \eta_{s1} + O(R^{-3/2}), & R < u_1 t, \\ \eta_{s1} + O(R^{-1}), & u_1 t < R < V_1 t, \\ O(R^{-1}), & R > V_1 t, \end{cases} \\ \zeta_{s2} &= \begin{cases} \eta_{s2} + O(R^{-1}), & R < V_2 t, \\ O(R^{-1}), & V_2 t < R < u_2^0 t, \\ O(R^{-3/2}), & R > u_2^0 t. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Если лед битый, то

$$\zeta_{sk} = \begin{cases} \eta_{sk} + O(R^{-1}), & R < V_k t, \\ O(R^{-1}), & V_k t < u_k^0 t, \\ O(R^{-3/2}), & R > u_k^0 t, \end{cases} \quad (7.25)$$

где $k = 1, 2$. Из (7.24), (7.25) видно, что на поверхности лед-вода и на поверхности раздела слоев генерируются по две системы прогрессивных

цилиндрических волн, бегущих от области давлений вдоль радиуса и затухающих с расстоянием как $R^{-1/2}$. Причем волны ζ_{11} , ζ_{21} – поверхностные, а ζ_{12} , ζ_{22} – внутренние, обусловленные наличием плотностной стратификации. Фазовые скорости и длины у поверхностных волн большие, чем у внутренних ($r_1 < r_2$). Эти величины определяются из формул $v_{1,2} = \sigma / r_{1,2}$, $\lambda_{1,2} = 2\pi / r_{1,2}$.

В случае коротких волн ($r_1 H_0 \gg 1$, $H_0 = \min(H_1, H_2)$) найдем

$$r_2 = (1 + \gamma) \frac{\sigma^2}{\varepsilon g}, \quad v_2 = \frac{\varepsilon g}{(1 + \gamma)\sigma}, \quad \lambda_2 = \frac{\varepsilon 2\pi g}{(1 + \gamma)\sigma^2}, \quad \frac{a_{22}}{a_{12}} = -\frac{1}{\varepsilon} (1 + \gamma) e^{r_2 H_1},$$

где a_{12} и a_{22} – амплитуды волн ζ_{12} и ζ_{22} . Видно, что скорость и длина коротких внутренних волн, а также отношение амплитуды внутренних волн на поверхности раздела к амплитуде этой волны на поверхности лед-вода практически не зависят от характеристик ледяного покрова. Для поверхностных волн при сплошном ледяном покрове и малых значениях $D_2 = D_1 \sigma^8 g^{-4}$, $\chi_0 = \chi_1 \sigma^2$ получим

$$r_1 = \frac{\sigma^2}{g} (1 + \chi_0 - D_2), \quad v_1 = \frac{g}{\sigma} (1 - \chi_0 + D_2), \quad \lambda_1 = \frac{2\pi g}{\sigma^2} (1 - \chi_0 + D_2),$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \left[1 + \frac{\varepsilon}{2\gamma} (D_2 - \chi_0) \right] \exp(r_1 H_1).$$

Следовательно, рост модуля упругости льда увеличивает скорость и длину коротких поверхностных волн, в то время как массовые силы уменьшают v_1 и λ_1 . Отношение амплитуды a_{11} поверхностной волны ζ_{11} на границе лед-вода к амплитуде a_{21} волны ζ_{21} на границе раздела слоев также увеличивается с ростом E и уменьшается с ростом χ_0 . Однако при малых значениях ε это изменение мало.

В случае длинных волн ($r_2 H^0 \ll 1$, $H^0 = \max(H_1, H_2)$) величины r_1 и r_2 находятся из

$$(1 - \chi_0 + D_1 r^4) [g \varepsilon H_1 H_2 r^4 - \sigma^2 (H_1 + \gamma H_2) r^2] + \frac{\sigma^4}{g} = 0.$$

Отсюда при $E = 0$ и значений $\chi_0 < 1$ получим

$$r_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{g H_0 (1 - \chi_0)}}, \quad v_1 = \sqrt{g H_0 (1 - \chi_0)}, \quad \lambda_1 = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{g H_0 (1 - \chi_0)},$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = 1 + \frac{H_1}{\gamma H_2}, \quad H_0 = H_1 + \gamma H_2.$$

При $D_3 = D_1 (\sigma / \sqrt{g H})^4 \ll 1$ и $\chi_0 \ll 1$

$$r_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{gH_0}} \left[1 + \frac{1}{2}(\chi_0 - D_3) \right], \quad v_1 = \sqrt{gH_0} \left[1 - \frac{1}{2}(\chi_0 - D_3) \right],$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{gH_0} \left[1 - \frac{1}{2}(\chi_0 - D_3) \right], \quad \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{H_0}{\gamma H_1}.$$

Видно, что в случае длинных волн битый лед уменьшает, хотя и незначительно, скорость и длину поверхностных волн. Сплошной же лед при $D_3 > \chi_0$ увеличивает, а при $D_3 < \chi_0$ уменьшает v_1 и λ_1 . Отношение амплитуд поверхностных волн на границах верхнего слоя при этом не зависит от характеристик льда. Что касается внутренних волн [16, 18], то как для битого льда при $\chi_0 < 1$, так и для сплошного льда и малых D_3 и χ_0 найдем

$$r_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{gH_0}} \frac{H_0}{\sqrt{\varepsilon H_1 H_2}},$$

$$v_2 = \sqrt{gH_0} \frac{1}{H_0} \sqrt{\varepsilon H_1 H_2}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{\sigma H_0} \sqrt{g\varepsilon H_0 H_1 H_2}, \quad \frac{a_{22}}{a_{12}} = -\frac{\gamma H_0}{\varepsilon H_1}.$$

Эти формулы показывают, что v_2 , λ_2 и отношение a_{22}/a_{12} не зависят от D_1 и χ_1 .

Таким образом, как в случае короткопериодных, так и в случае длиннопериодных возмущений, скорость, длина и соотношение между амплитудами внутренних волн на поверхности лед-вода и на поверхности раздела слоев не зависят от параметров ледяного покрова [26].

Для выяснения количественного влияния ледяного покрова на $v_{1,2}$ и $\lambda_{1,2}$ возникающих в общем случае поверхностных и внутренних волн проводились численные расчеты для параметров (7.10) и двух значений ε , равных $2 \cdot 10^{-3}$, 10^{-2} . Толщина льда h (м), глубины слоев $H_{1,2}$ (м) и частота колебаний σ (с⁻¹) менялись при этом в пределах $0 \leq h \leq 3$, $50 \leq H_1 \leq 500$, $500 \leq H_2 \leq 4 \cdot 10^3$, $5 \cdot 10^{-3} \leq \sigma \leq 7 \cdot 10^{-1}$. Анализ результатов расчетов показал, что ледяной покров фактически не влияет на скорость v_2 и длину λ_2 внутренних волн. Скорость v_1 и λ_1 поверхностных волн при $\sigma > \sigma^0$ увеличивается, а при $\sigma < \sigma^0$ уменьшается с ростом толщины сплошного льда. Здесь $\sigma^0 = \sqrt[6]{g/h/D_1}$. Битый лед уменьшает v_1 и λ_1 по сравнению со скоростью и длиной поверхностных волн при отсутствии льда. Однако при $\lambda_1 > 2H$ влияние льда на элементы поверхностных волн меньше 1%.

Влияние неоднородности жидкости на v_1 и λ_1 не превышает 0.1%. Скорость же и длина внутренних волн существенно увеличиваются с ростом ε . Это иллюстрируется табл. 7.1, где приведены численные значе-

ния $v_{1,2}$, $\lambda_{1,2}$ для $H_1 = 50$, $H_2 = 10^3$ м. Видно, что увеличение ε с $2 \cdot 10^{-3}$ до 10^{-2} при $\sigma = 5 \cdot 10^{-1} \text{с}^{-1}$ и при $\sigma = 3 \cdot 10^{-1} \text{с}^{-1}$ привело к увеличению v_2 и λ_2 примерно в 5 раз. Причем это увеличение одинаковое как при отсутствии льда, так и при наличии сплошного ($E \neq 0$) и битого ($E = 0$) льда. С ростом толщины сплошного льда от $h = 0$ до $h = 3$ м скорость и длина поверхностных волн при $\sigma = 5 \cdot 10^{-1} \text{с}^{-1}$ и обоих значениях ε увеличились на 13% для $E \neq 0$ и уменьшились на 6.6% для $E = 0$. При $\sigma = 3 \cdot 10^{-1} \text{с}^{-1}$ и этих же h и ε сплошной лед уменьшил v_1 , λ_1 на 1.8%, а битый лед уменьшил v_1 и λ_1 на 2.4%.

Основные возмущения, затухающие как $R^{-1/2}$, сосредоточены для поверхностных волн в области $R < V_1 t$, а для внутренних – в области $R < V_2 t$. Границы этих областей перемещаются со скоростями V_1 и V_2 . Для исследования влияния льда на скорости V_1 и V_2 передних фронтов поверхностных и внутренних волн проводились численные расчеты при E , ρ , μ , H_1 , H_2 из (7.10) и

$$10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}, \quad h \leq 10 \text{ м.} \quad (7.26)$$

Анализ расчетов показал, что ледяной покров не влияет на скорость переднего фронта внутренних волн для $\sigma < \sigma^0$, соответствующего $h = 10$ м. При σ больших этого значения можно (если $h < 10$ м) положить $\text{thr} H_2 \approx \text{thr} H_1 \approx 1$. Тогда $V_2 = \varepsilon g [2\sigma(1 + \gamma)]^{-1}$. Видно, что и в случае короткопериодных колебаний для заданного h лед не влияет на V_2 .

Таблица 7.1

$v_1, \text{M/c}$	λ_1, M	$v_2, \text{M/c}$	λ_2, M	h, M	$E, H / \text{M}^2$	$\varepsilon \cdot 10^3$	$10 \sigma \cdot \text{c}^{-1}$	
19.61	246.3	0.019	0.246	0	$3 \cdot 10^9$	2	5	
22.17	278.5	0.019	0.246	3				
18.30	229.9	0.019	0.246	3				0
19.61	246.3	0.098	1.238	0	$3 \cdot 10^9$	10		3
22.17	278.5	0.098	1.238	3				
18.30	229.9	0.098	1.238	3				
30.68	684.1	0.033	0.685	0	$3 \cdot 10^9$	2	3	
32.08	671.6	0.033	0.685	3				
31.88	667.4	0.033	0.685	3				
32.68	684.1	0.164	3.438	0	$3 \cdot 10^9$	10		3
32.08	671.6	0.164	3.438	3				
31.91	668.1	0.164	3.438	3				

Влияние льда на V_1 начинает заметно сказываться лишь для $\sigma > 0.1 \text{ с}^{-1}$. Перепад плотности практически не влияет на V_1 . Рис. 7.5 иллюстрирует зависимость $V_1(\text{м/с})$ от h при $\varepsilon = 10^{-2}$ и $\sigma(\text{с}^{-1})$, равных 0.65, 0.75, 0.85, 0.95 (линии 1 – 4). Сплошные линии отвечают упругому льду ($E \neq 0$), а штриховые – битому. Видно, что на данных частотах V_1 с ростом толщины битого льда от $h = 0$ до $h = 1 \text{ м}$ уменьшается соответственно на 7.2, 9.7, 12.1, 15%. В случае сплошного льда для каждого σ есть такое $h = h^*$, что с ростом h от нуля до h^* скорость уменьшается, хотя и незначительно. Для $h > h^*$ скорость переднего фронта поверхностных волн быстро возрастает с увеличением h .

С ростом σ скорость V_1 при фиксированном $h = h_1$ сплошного льда убывает от u_1^0 до u_1 , если σ изменяется в интервале $(0, \sigma_0)$ и возрастает от u_1 до $\tau_1'(r^*)$, если $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1^0$. Здесь $\sigma_0 = \tau_1(h_1, r_0)$, r_0 – корень уравнения $\tau_1''(h_1, r) = 0$, r^* – корень уравнения $\sigma_1^0 = \tau_1(h_1, r)$, а σ_1^0 – значение σ_1 , отвечающее толщине льда $h = h_1$. Отметим, что $u_1^0 > u_1$, а разность $u_1^0 - u_1$ уменьшается с ростом h . При отсутствии льда более высокой частоте отвечает меньшая скорость V_1 . Причем $\lim_{\sigma \rightarrow 0} V_1 = u_1^0$, $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V_1 = 0$.

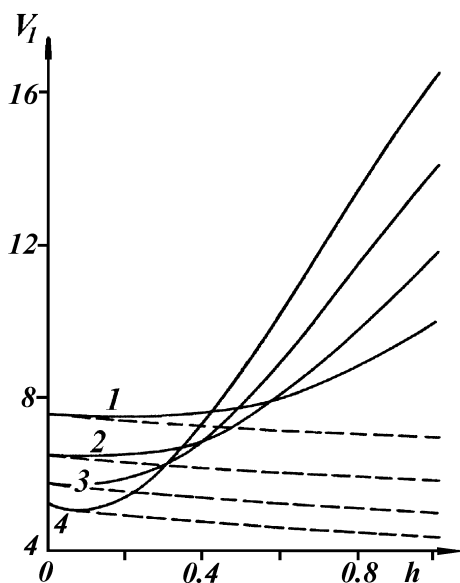


Рис. 7.5

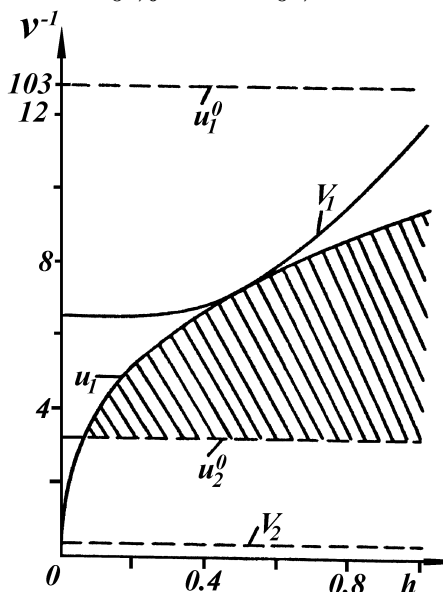


Рис. 7.6

На рис. 7.6 скорости u_1 , $u_{1,2}^0$, $V_{1,2}$, приведенные для $\varepsilon = 10^{-2}$, $\sigma = 0.75 \text{ с}^{-1}$ в случае сплошного льда, разбивают плоскость на ряд обла-

стей. Отсюда и из (7.24) видно, что в море, покрытом сплошным льдом, в фиксированную точку, находящуюся на расстоянии R от области приложения давлений, приходят сначала упругие предшественники, затухающие как R^{-1} и обусловленные исключительно упругими силами льда. Затем приходят поверхностные η_{s1} , а после них внутренние η_{s2} волны. При значениях v^{-1} из области $(0, V_1)$ на основные волновые возмущения накладываются волны, затухающие как R^{-1} . Исключение составляет заштрихованная область, где накладываются волны, имеющие порядок затухания не ниже $R^{-3/2}$.

Волны, амплитуда которых затухает как R^{-1} , являются в области $R > u_1^0 t$ чисто упругими, а в области $u_1 t < R < u_1^0 t$ – упругими и гравитационными, а при $R < u_1 t$ и $R < u_2^0 t$ – чисто гравитационными. Следовательно, u_1 есть скорость заднего фронта упругих волн-предшественников. Она не зависит от частоты колебаний, а влияние ε на u_1 несущественно. Отметим, что кривая u_1 в каждой своей точке касается линии V_1 , отвечающей одному из значений σ , т.е. u_1 есть огибающая семейства $V_1(\sigma)$.

В плоском случае распределения давлений (7.19) проводились численные расчеты амплитуд a_{sk} генерируемых волн η_{sk} , $k=1, 2$, $s=1, 2$. При толщине сплошного упругого льда $h=3$ м и при отсутствии льда они представлены с точностью до множителя a в табл. 7.2 для $H_1=50$, $H=500$ м, значений параметров (7.10) и $f(x)$, равной 1 при $|x| \leq l$ и равной нулю для $|x| > l$, где $l=10^3$ м. В случае битого льда зависимость примерно такая же. Видно, что увеличение ε приводит к уменьшению численных значений амплитуд a_{11} , a_{21} поверхностных волн η_{11} , η_{21} . Однако уменьшение амплитуд фактически не зависит от толщины льда. Амплитуды внутренних волн a_{12} , a_{22} с ростом ε увеличились для $\sigma=10^{-2} \text{ с}^{-1}$ и $\sigma=5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ соответственно в 5.2 и 6.9 раза. Это увеличение одинаковое как для $h=0$, так и для $h=3$ м. При $\sigma=3 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ амплитуды a_{12} , a_{22} малы по сравнению с амплитудами поверхностных волн. Увеличение толщины льда от $h=0$ до $h=3$ при $\sigma=0.3 \text{ с}^{-1}$ привело к уменьшению амплитуды a_{11} примерно в 3.2 раза как для $\varepsilon=2 \cdot 10^{-3}$ так и для $\varepsilon=10^{-2}$. При $\sigma=10^{-2} \text{ с}^{-1}$ и $\sigma=5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ ледяной покров для этих же значений ε фактически уже не оказывает влияния на a_{11} , a_{21} , а a_{12} , a_{22} с ростом h от 0 до 3 м несколько уменьшаются. При $\varepsilon=2 \cdot 10^{-3}$ и $\sigma=10^{-2} \text{ с}^{-1}$ уменьшение a_{12} составляет 2.8%, а a_{22} – 3.1%. Однако влия-

ние льда на a_{12} , a_{22} уменьшается с уменьшением σ и уже при $\sigma = 5 \cdot 10^{-3}$ характеристики ледяного покрова не оказывают заметного влияния на них, так же как и на v_2 , λ_2 .

Таблица 7.2

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	h , м	$10\sigma \text{ с}^{-1}$	$\varepsilon \cdot 10^3$
4.838	$8.46 \cdot 10^{-5}$	3.057	0	0	3	2
1.484	$8.34 \cdot 10^{-14}$	0.930	0	3		
1.359	$1.43 \cdot 10^{-2}$	1.235	6.154	0	0.1	
1.359	$1.39 \cdot 10^{-2}$	1.235	5.994	3		
0.680	$6.89 \cdot 10^{-1}$	0.618	3.997	0	0.05	
0.680	$6.88 \cdot 10^{-1}$	0.618	3.993	3		
4.823	$4.29 \cdot 10^{-3}$	3.047	0	0	3	10
1.479	$7.55 \cdot 10^{-10}$	0.927	0	3		
1.351	$7.45 \cdot 10^{-2}$	1.228	7.983	0	0.1	
1.351	$7.44 \cdot 10^{-2}$	1.228	7.979	3		
0.676	$1.00 \cdot 10^{-1}$	0.615	5.837	0	0.05	
0.676	$1.00 \cdot 10^{-1}$	0.615	5.837	3		

Амплитуда a_{22} может намного превосходить a_{11} . Например, при $2\pi/\sigma = 6\text{ ч}$, $H_1 = 50\text{ м}$, $H_2 = 10^3\text{ м}$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ отношение $a_{22}/a_{11} = 100$. Отметим при этом, что соответствующий выбор ширины l области может привести к нулевому значению амплитуд a_{11} , a_{21} поверхностных волн. Амплитуда a_{22} внутренней волны будет при этом отлична от нуля и, следовательно, будем иметь ярко выраженное явление «мертвой воды» [137]. Аналогичным образом в двухслойной жидкости под действием атмосферных возмущений могут возникать только поверхностные волны. Для рассматриваемой функции $f(x)$ это имеет место при $l = \pi n / r_2$, $n = 1, 2, \dots$

7.3. Зависимость поверхностных и внутренних волн от глубины погружения источника периодической интенсивности

Пусть волны генерируются действующим внутри жидкости в точке с координатами $(0, 0, z_0)$ периодическим источником [72, 138, 153], потенциал которого равен

$$\bar{\varphi} = \frac{\tilde{M}}{4\pi} [x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} \exp(i\sigma t).$$

В этом случае для выяснения влияния льда на неустановившееся волновое движение двухслойной идеальной несжимаемой жидкости

следует решить уравнения (7.2) с начальными (7.4) и граничными условиями $\partial\varphi_2/\partial z=0$ при $z=-H_2$, (7.3) при $z=H_1$ и при $z=0$. Причем нужно заменить φ_1 на $\varphi_1 + \bar{\varphi}$, если источник в верхнем слое, или φ_2 на $\varphi_2 + \bar{\varphi}$ для источника в нижнем слое. Решая задачу аналогично предыдущей, найдем для $\zeta_{1,2}$ формулы (7.23)–(7.25), где

$$a = \tilde{M}/2\pi, \quad \theta_k = r_k R - \sigma t + \pi/4, \quad l_3 = 1 + \gamma \text{thr} H_2 \text{thr} h_1, \quad (7.27)$$

а $N_{1,2}$ имеют вид

$$N_1 = f_1(\varepsilon g \text{thr} H_2 - l_3 \sigma^2), \quad N_2 = f_2[rgD_0 - \sigma^2(\text{thr}(H_1 - h_1) + \chi_1 rg)],$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{r}}{\text{chr} H_1} \text{chr} h_1, \quad f_2 = \frac{\sqrt{r}}{\text{chr} H_1} \gamma \text{chr}(H_1 - h_1) \text{thr} H_2 \quad (7.28)$$

для источника в верхнем слое и

$$N_1 = -f_1 \sigma^2, \quad N_2 = f_2(rgD_0 \text{thr} H_1 - \sigma^2 \psi_0),$$

$$f_1 = \frac{\sqrt{r}}{\text{chr} H_1 \text{chr} H_2} \text{chr}(H_1 - h_1), \quad f_2 = \frac{\sqrt{r}}{\text{chr} H_2} \text{chr}(H_2 - h_1) \quad (7.29)$$

для источника в нижнем слое. Здесь h_1 – расстояние от источника до границы раздела слоев.

Из (7.23), (7.27), (7.29) видно, что амплитуды a_{11} , a_{21} волн η_{11} , η_{21} убывают с погружением источника в нижнем слое жидкости как $\text{chr}_1(H_2 - h_1)$. Амплитуды a_{12} , a_{22} волн η_{12} , η_{22} убывают при этом как $\text{chr}_2(H_2 - h_1)$. Поэтому отношения η_{11}/η_{21} и η_{12}/η_{22} не зависят от h_1 . Так как $r_1 < r_2$, то при фиксированных значениях исходных параметров a_{12} и a_{22} убывают с ростом h_1 быстрее, чем a_{11} и a_{21} . Отношение a_{11}/a_{22} также убывает.

В случае источника в верхнем слое зависимость амплитуд генерируемых волн от глубины погружения источника более сложная. Для выяснения этой зависимости и влияния на нее неоднородности жидкости и характеристик ледяного покрова проводились численные расчеты при значениях параметров (7.10), (7.26). Глубина погружения источника h_0 (расстояние от поверхности лед-вода до источника) менялась в пределах $0 < h_0 < H$. При $0 < h_0 < H_1$ расчеты велись по формулам (7.23), (7.28), а при $H_1 < h_0 < H_2$ – по (7.23), (7.29). Результаты показали, что периодический источник может генерировать внутренние волны с амплитудами, во много раз большими, чем у волн поверхностных. Например, для $\sigma = 10^{-2} \text{с}^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $E = 3 \cdot 10^9 \text{Н/м}^2$, $h = 1 \text{м}$ и $h_0 = 1 \text{м}$ амплитуда a_{22} превосходит a_{11} в 742.7 раза (табл. 7.3). С ростом ε отношение a_{22}/a_{11} убывает. Так как влияние неоднородности жидкости на a_{11} мало (меньше 1%), то с увеличением ε амплитуда a_{22} уменьшается. Кроме того, из табл. 7.3 видно, что a_{22}/a_{12} может быть значительно меньше, чем

a_{22}/a_{11} . Это говорит о том, что a_{12} при определенных условиях может существенно превосходить a_{11} .

Таблица 7.3

$\varepsilon \cdot 10^3$	1	2	5	10
a_{22}/a_{11}	742.7	651.0	347.8	204.0
a_{22}/a_{12}	7923	1553	358.4	144.9

Ледяной покров не оказывает заметного влияния на внутреннюю волну η_{22} . Зависимость амплитуды этой волны от глубины погружения источника в море, покрытом льдом, аналогична зависимости в море со свободной поверхностью. Влияние же перепада плотности ε на данную зависимость существенно, что иллюстрируется рис. 7.7. Функция $\eta_0(h_0)$ на этом рисунке представляет собой отношение амплитуды волны η_{22} , генерируемой источником, действующим на глубине h_0 , к амплитуде этой волны, генерируемой при тех же условиях аналогичным источником, помещенным на расстоянии 1 м от границы раздела слоев. Кривые 1 – 4 отвечают значениям $\varepsilon \cdot 10^3$, равным 1, 2, 5, 10 при $\sigma = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. Видно, что с погружением источника в верхнем слое амплитуда внутренней волны η_{22} растет, а в нижнем убывает. Максимальное значение a_{22} принимает в случае источника на границе раздела. Причем уменьшение a_{22} с удалением источника от границы раздела тем сильнее, чем меньше ε .

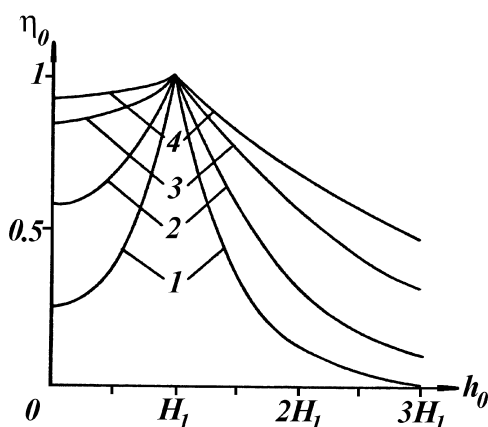


Рис. 7.7

Что же касается волны η_{12} , то ледяной покров при малых ε приводит к существенному уменьшению ее амплитуды. В табл. 7.4 приведена зависимость отношения a_{22}/a_{12} от толщины h сплошного льда при тех же значениях па-

раметров, что и для табл. 7.3. Из табл. 7.4 следует, что при изменении h от 0 до 10 м отношение a_{22}/a_{12} для $\varepsilon = 10^{-3}$ возросло в 6.3 раза, а для $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ – в 1.5 раза. Так как влияние льда на a_{22} мало (меньше 1%), то это изменение характеризует уменьшение амплитуды a_{12} . Оно обусловлено упругими силами ледяного покрова. В море, покрытом битым льдом, отношение a_{22}/a_{12} практически не зависит от h . С ростом ε влияние сплошного льда на отношение a_{22}/a_{12} уменьшается и уже при $\varepsilon = 10^{-2}$ почти не сказывается. Зависимость a_{12} от глубины погружения источника качественно такая же, как и зависимость a_{22} от h_0 .

Таблица 7.4

$\varepsilon \cdot 10^3 \backslash h, \text{м}$	0	2	4	6	8	10
1	7323	8251	10545	16821	29016	49122
2	1553	1559	1600.2	1644.9	1927.8	2284.6

Отметим, что при одинаковых условиях источник, действующий в нижнем слое на расстоянии h_1 от границы раздела слоев, генерирует внутренние волны меньшей амплитуды, чем аналогичный источник, действующий в верхнем слое на таком же расстоянии от границы раздела. В частности, при $\sigma = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ и $h_1 = 10 \text{ м}$ амплитуда a_{22} в первом случае больше, чем во втором в 1.9 раза. Это отношение убывает с уменьшением ε и уже для $\varepsilon = 10^{-3}$ близко к единице. При фиксированном ε указанное отношение убывает до единицы с ростом σ .

Кроме того, результаты расчетов показали возможность генерации периодическим источником значительных внутренних волн на высоких частотах. Это имеет место, когда источник действует в окрестности границы раздела слоев. Например, при $\sigma = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $h = 0.1 \text{ м}$ и $h_1 = 1 \text{ м}$ амплитуда волны η_{22} превосходит a_{11} в 559 раз. С удалением источника от границы раздела на 2, 3, 4 м амплитуда a_{22} уменьшается на 83.9, 97.4, 99.6%. При $\sigma = 0.1 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ амплитуда a_{22} для $h_1(\text{м})$, равного 2, 4, 5, 10, 20, 30 составляет соответственно 81.6, 66.5, 54.4, 16.1, 2.2, 0.3% от a_{22} в случае $h_1 = 1 \text{ м}$.

Амплитуды поверхностных волн η_{11} и η_{21} при фиксированной толщине сплошного и битого льда с погружением источника от поверхности лед-вода до дна убывают. Причем величина a_{11} , определенная при $h_1 = 0$ по формулам для источника в верхнем слое, практически совпадает с определенной по формулам для источника в нижнем слое.

Это же имеет место и для a_{21} . Зависимость a_{11} от h сплошного льда и глубины h_0 погружения источника для $\sigma = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ иллюстрируется табл. 7.5. Эта таблица показывает, на сколько процентов убывает a_{11} при изменении h_0 от 1 м до $0.1H_1$, $0.5H_1$, H_1 , $2H_1$, $3H_1$, $4H_1$. Видно, что с ростом h_0 от 1 м до $4H_1$ амплитуда a_{11} уменьшается для $h = 0$ на 97.4 %, а для $h = 10$ м на 96.7 %. При $h \leq 2$ с погружением источника от поверхности лед-вода до заданной глубины большей толщине льда отвечает быстрее уменьшение a_{11} . При изменении h от 4 до 10 м, наоборот, большему h соответствует более медленное уменьшение a_{11} , обусловленное упругими силами ледяного покрова. Однако, как следует из табл. 7.5, влияние льда находится в пределах 3%.

Битый лед для всех $h \leq 10$ м увеличивает затухание амплитуды поверхностных волн с погружением источника. Однако влияние битого льда на зависимость a_{11} от h_0 в рассматриваемом случае также не превосходит 2.5 %.

Таблица 7.5

$h \backslash h_0$	$H_1/10$	$H_1/2$	H_1	$2 H_1$	$3 H_1$	$4 H_1$
0	8.0	36.2	59.7	83.7	93.5	97.4
1	8.1	36.5	60.0	83.9	93.6	97.5
2	8.1	36.7	60.1	84.2	93.7	97.6
4	8.1	36.8	60.3	84.3	93.8	97.6
6	8.0	36.4	59.8	83.9	93.6	97.5
8	7.8	35.4	59.6	82.9	93.1	97.2
10	7.5	34.3	57.2	81.6	92.2	96.7

7.4. Влияние вязких свойств снежно-ледового покрова на свободные волны

Рассмотрим влияние внутреннего трения снега, покрывающего сплошной плавающий лед, на затухание изгибных деформаций льда и волновых возмущений жидкости со скачком плотности. Полагая движение жидкости потенциальным, получим [51] для определения потенциала скорости в верхнем φ_1 и нижнем φ_2 слоях уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq H_1; \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0, \quad -H_2 \leq z \leq 0 \quad (7.30)$$

с граничными условиями

$$D_1 \frac{\partial^4 \zeta_1}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2} + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 \zeta_1}{\partial t \partial x^2} + \zeta_1 + \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0, \quad z = H_1, \quad (7.31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi_2 - \gamma\varphi_1) + g\varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \quad z = 0, \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \quad z = -H_2. \quad (7.33)$$

Здесь $\chi_1 = (\rho h + \rho^* h^*) / (\rho_1 g)$, $\eta_1 = \eta h^* / (\rho_1 g)$, $\gamma = \rho_1 / \rho_2$, $\varepsilon = 1 - \gamma$, ρ_k , H_k – плотность и глубина верхнего ($k = 1$) и нижнего ($k = 2$) слоев; ρ , h – плотность и толщина льда; η , ρ^* , h^* – коэффициент внутреннего трения, плотность и толщина слоя снега. Определение D_1 , Q_1 приведено в (2.11).

Начало декартовой системы координат находится на невозмущенной границе раздела слоев, ось z направлена вертикально вверх. Возвышение поверхности лед-вода ζ_1 и границы раздела слоев ζ_2 связаны с φ_1 и φ_2 кинематическими соотношениями (7.5).

Представляя решение уравнений (7.30) в виде $\varphi_1 = (A \cosh rz + B \sinh rz) \exp i\theta$, $\varphi_2 = C \cosh r(z + H_2) \exp i\theta$, $\theta = \sigma t - rx$ и удовлетворяя граничным условиям (7.31) – (7.33), (7.5), получим дисперсионное уравнение

$$\sigma^4 \alpha_1 - \sigma^2 \alpha_2 + \alpha_3 - i\eta_1(\sigma^3 \alpha_4 - \sigma \alpha_5) = 0, \quad (7.34)$$

$$\alpha_1 = \chi_1 r g \alpha_6 + 1 + \gamma \operatorname{th} r H_1 \operatorname{th} r H_2, \quad \alpha_2 = r g (\varepsilon \chi_1^* \operatorname{th} r H_2 + D^* \alpha_6),$$

$$\alpha_3 = \varepsilon r g D^* \alpha_7, \quad \alpha_4 = r^3 g \alpha_6, \quad \alpha_5 = \varepsilon r^3 g \alpha_7,$$

$$\alpha_6 = \gamma \operatorname{th} r H_2 + \operatorname{th} r H_1, \quad \alpha_7 = r g \operatorname{th} r H_1 \operatorname{th} r H_2,$$

$$D^* = D_1 r^4 - Q_1 r^1 + 1, \quad \chi_1^* = 1 + \chi_1 r g \operatorname{th} r H_1.$$

Если $\eta_1 = 0$, то (7.34) переходит в дисперсионную зависимость, описывающую незатухающие изгибно-гравитационные волны при отсутствии снега.

Учитывая, что неоднородность жидкости оказывает слабое влияние на характеристики поверхностных волн, запишем (7.34) в виде

$$\Delta_1 \Delta_2 = 0, \quad (7.35)$$

$$\text{где } \Delta_1 = \sigma^2 \chi^* - i \sigma \eta_1 r^3 g \operatorname{th} r H - D^* r g \operatorname{th} r H, \quad \Delta_2 = \sigma^2 - \varepsilon \alpha_8 (1 - \varepsilon \alpha_9)^{-1},$$

$$\alpha_8 = \alpha_7 (\operatorname{th} r H_1 + \operatorname{th} r H_2)^{-1},$$

$$\alpha_9 = \operatorname{th} r H_2 (\chi_1 r g + \operatorname{th} r H_1) [\chi^* (1 + \operatorname{th} r H_1 \operatorname{th} r H_2)]^{-1},$$

$$\chi^* = 1 + \chi_1 r g \operatorname{th} r H, \quad H = H_1 + H_2.$$

Уравнение $\Delta_1 = 0$ представляет собой дисперсионную зависимость для поверхностных волн, а $\Delta_2 = 0$ – для внутренних волн с учетом льда и снега. Видно, что из характеристик льда и снега лишь силы инерции влияют, хотя и незначительно, на частоты и длины свободных внутренних волн. Уравнение $\Delta_2 = 0$ имеет только действительные корни. Следова-

тельно, в бассейне с ледяным покровом внутренние волны являются незатухающими как при наличии снежного покрова, так и при его отсутствии.

Решая уравнение $\Delta_1 = 0$ при фиксированной длине волны $\lambda = 2\pi/r$, находим $\sigma = \sigma_0 + i\tilde{\sigma}$, где

$$\sigma_0 = [rg \operatorname{th} rH (4D^* \chi^* - \eta_{\text{л}}^2 r^5 \operatorname{th} rH)]^{1/2} (2\chi^*)^{-1} \quad (7.36)$$

$$\tilde{\sigma} = \eta_{\text{л}} r^3 g (2\chi^*)^{-1} \operatorname{th} rH. \quad (7.37)$$

Величина $\tilde{\sigma}$ определяет скорость затухания изгибно-гравитационных поверхностных волн. Условием существования периодических поверхностных возмущений является неравенство

$$4D^* \chi^* - \eta_{\text{л}}^2 r^5 g \operatorname{th} rH > 0.$$

Если волновое число не удовлетворяет этому условию, то $\operatorname{Re} \sigma = 0$ и имеют место только затухающие возмущения.

Численный анализ распределений σ_0 по r , характеризующих дисперсионную зависимость, а также распределений фазовой $v = \sigma_0/r$ и групповой $V = d\sigma_0/dr$ скоростей проводился при значениях H, h, h^* , равных $10^3, 1.5, 1$ м соответственно. Величины $E(\text{Н/м}^2)$, $\mu, \varepsilon, \rho, \rho^*$ (кг/м^3) полагались равными $3 \cdot 10^9, 0.34 \cdot 10^{-3}, 10^3, 870, 250$ соответственно. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 7.8 без учета ледового сжатия и на рис. 7.9, 7.10 при $Q_1 = 1,6\sqrt{D}$. Штриховые и штрихпунктирные линии на рис. 7.8 соответствуют значениям $5 \cdot 10^6, 5.5 \cdot 10^6$ коэффициента η ($\text{Па}\cdot\text{с}$) внутреннего трения снега. Причем линии 1 характеризуют случай битого льда ($E = 0$), а линии 2 – сплошного льда. Штриховые, штрихпунктирные с одной и двумя точками и пунктирные линии на рис. 7.9, 7.10 соответствуют коэффициентам η ($\text{Па}\cdot\text{с}$), равным $4.5 \cdot 10^6, 4.8 \cdot 10^6, 5 \cdot 10^6, 5.5 \cdot 10^6$. Сплошная линия характеризует $\sigma_0(r)$ при $\eta = 0$.

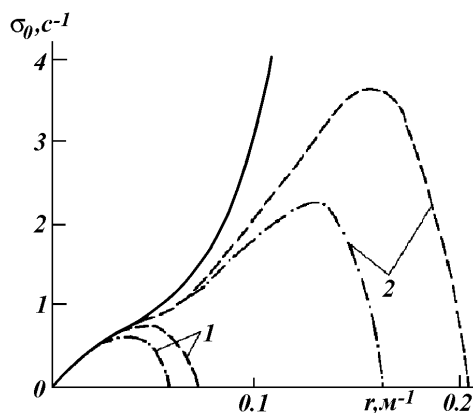


Рис. 7.8

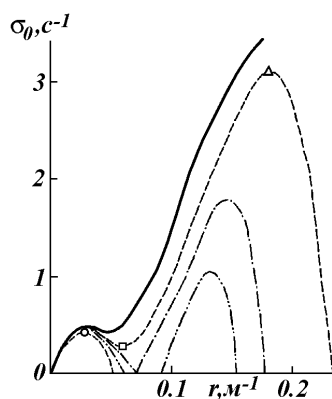


Рис. 7.9

На рис. 7.8 видно, что при отсутствии ледового сжатия и $\eta \neq 0$ могут существовать две системы периодических волновых возмущений одинаковой частоты, но разной длины. Одна из них (ζ_{11}) является гравитационной ($E = 0$) или изгибно-гравитационной ($E \neq 0$), а вторая (ζ_{14}) обусловлена силами внутреннего трения снега.

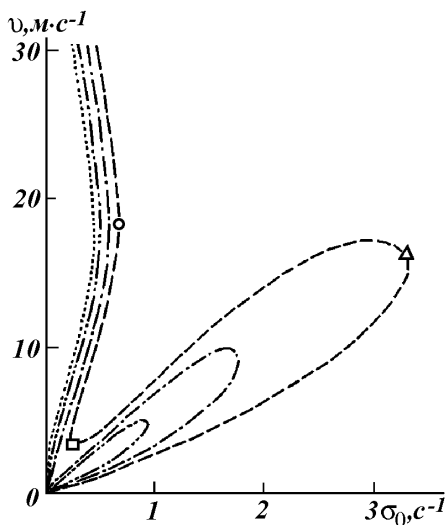


Рис. 7.10

Для обеих систем верхняя граница частотного интервала σ_1 волновых возмущений и нижняя граница λ^0 интервала длин волн одни и те же. Они определяются характеристиками льда и снега. Здесь $\sigma_1(r) = \sigma_0(r_1)$, $\lambda^0 = 2\pi/r^0$, а r^0, r_1 — положительные корни уравнений $\sigma_0(r) = 0$, $\sigma'_0(r) = 0$ соответственно. Штрих означает производную по r .

Увеличение коэффициента внутреннего трения снега приводит к уменьшению σ_1 и увеличению λ^0 , в то время как рост цилиндрической жесткости льда D , наоборот, расширяет интервалы частоты и длины поверхностных затухающих волн. Поэтому при оценке диапазонов изменения σ и λ изгибных деформаций сплошного льда и возмущений жидкости, обусловленных поверхностными волнами, необходим учет характеристик льда, и снега. Скорость затухания волн ζ_{11} меньше, чем волн ζ_{14} . При этом рост η усиливает затухание как ζ_{11} , так и ζ_{14} , что следует из (7.37).

В условиях ледового сжатия при величинах сжимающего усилия $Q_1 < Q_0$ зависимость σ_0 от r качественно такая же, как и при отсутствии ледового сжатия. Здесь $Q_0 = \tau(r^*)$, r^* — положительный корень уравнения $\tau'(r) = 0$, а $\tau(r)$ имеет вид

$$\tau = [\chi^* (4D_1 r^4 \tau_2(r) + (D_1 r^4 + 1) \tau_1(r)) - \tau_3(r)] [r^2 \chi^* (\tau_1(r) + 2\tau_2(r))]^{-1},$$

$$\tau_1 = \operatorname{th} rH + rH \operatorname{ch}^{-1} rH, \quad \tau_2 = \chi^* \operatorname{th} rH, \quad \tau_3 = 0,5 \eta_1^2 g r^5 [2\tau_2(r) - \tau_1(r)]$$

и определяется цилиндрической жесткостью и толщиной льда, толщиной и коэффициентом внутреннего трения снега. В случае отсутствия снега ($h^* = 0$) значение Q_0 совпадает с аналогичной величиной, приведенной в разделе 2.4. Зависимость критической величины ледового сжатия Q_0 от коэффициента внутреннего трения η при $h^* = 1$ представлена в таблице 7.6.

Таблица 7.6

η	0	$2 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	10^7	$1.87 \cdot 10^8$
Q_0	1.447	1.432	1.421	1.367	1.359	1.35

Если же $Q_1 > Q_0$ то, как следует из графиков на рис. 7.9, 7.10, может существовать до четырех систем волн разной длины, но одинаковой частоты. Кроме волн ζ_{11} , ζ_{14} , возможны и волновые системы, обусловленные ледовым сжатием (ξ_{12}) и упругими характеристиками льда (ζ_{13}).

Верхние границы интервалов частоты гравитационных волн и волн ζ_{14} определяются величинами σ_1 и σ_3 соответственно. Частоты изгибных (ζ_{13}) волн и волн, обусловленных сжатием, изменяются на интервалах (σ_2, σ_3) и (σ_2, σ_1) . Здесь $\sigma_k = \sigma_0(r_k)$, $k = 1, 2, 3$, а r_k – действительные корни уравнения $\sigma'_0(r) = 0$, причем $r_k < r_{k+1}$. Следовательно, и скорость затухания ζ_{1k} меньше, чем ζ_{1k+1} . Для наглядности на дисперсионной кривой (рис. 7.9) и графике зависимости фазовой скорости от частоты (рис. 7.10) кружком, треугольником и квадратом отмечены значения, соответствующие $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ при $\eta = 4.5 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

На рис. 7.10 видно, что волны ζ_{11} , соответствующие гравитационной ветви кривой $v(\sigma_0)$, имеют нормальную, а ζ_{12} , ζ_{13} , ζ_{14} – аномальную дисперсию.

При увеличении коэффициента внутреннего трения снега характер зависимости фазовой скорости от частоты качественно не изменяется для всех четырех систем волн. Количественное влияние роста η проявляется в уменьшении фазовых скоростей и интервалов частот соответствующих волн. Кроме того, рис. 7.10 показывает, что возможно существование нескольких волн разных периодов колебаний, имеющих одинаковую фазовую скорость. С одинаковой скоростью могут распространяться и группы волн разных частот колебаний.

Значения σ_k ($k = 1, 2, 3$), определяющие диапазоны частоты волн ζ_{1k} , уменьшаются с ростом η . Причем можно указать такое значение коэффициента внутреннего трения снега

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \rho_1 g [(a_1^2 + a_2)^{1/2} - a_1]^{1/2} (r^2 h^*)^{-1}, \\ a_1 &= 2[D^*(5 - 2Hr^2 g\chi_1) - 4D_1 r^4 - 2Q_1 r^2](r^2 gH)^{-1}, \\ a_2 &= 16D^{*2}[H + g\chi_1(1 - g\chi_1 r)](r^2 g^2 H)^{-1},\end{aligned}$$

что для заданного волнового числа $\sigma_0(r) = 0$. Поэтому количество волновых систем заданной частоты колебаний зависит не только от Q , но и от η .

Графики $\eta_0(r)$ представлены в логарифмическом масштабе на рис. 7.11, где кривые по порядку сверху вниз соответствуют значениям $Q_1/\sqrt{D_1}$, равным 0, 1.4, 1.6, 1.8. При величинах сжимающего усилия, меньших Q_0 , данная зависимость является убывающей, т.е. условие $\sigma_0(r) = 0$ выполняется только при одном ненулевом значении $r = r_0$ для любых значений η (рис. 7.8). Если $Q_1 > Q_0$, то $\eta_0(r)$ имеет экстремумы $\eta_{k-2} = \rho_1 g h^{*-1} \beta^{1/2}(r_k)$, $k = 4, 5$, а r_k — положительные корни уравнения $\beta'(r) = 0$. Здесь $\beta(r) = 4D^* \chi^* r^{-5} (g \operatorname{th} rH)^{-1}$, причем $r_k < r_{k+1}$, $\eta_2 < \eta_3$. Следовательно, при $\eta_0 < \eta_2$ возможно единственное, отличное от нуля значение r^0 , когда $\sigma_0 = 0$ (штриховая линия на рис. 7.9). Это характерно и для $\eta_0 > \eta_3$ (пунктирная линия на рис. 7.9). Если $\eta_2 < \eta_0 < \eta_3$, то функция $\sigma_0(r)$ обращается в нуль в трех, а при $\eta_0 = \eta_2$ в двух ненулевых точках (штриховая с одной и двумя точками кривые на рис. 7.9).

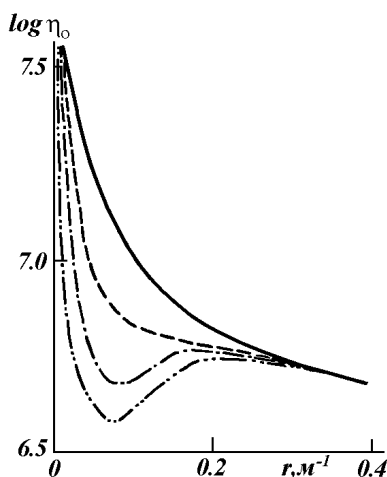


Рис. 7.11

Таким образом, для фиксированного сжимающего усилия можно определить, используя зависимость $\eta_0(r)$, такое значение коэффициента внутреннего трения снега $\eta_0 > \eta_2$, при котором периодические волновые возмущения возможны в двух ограниченных диапазонах значений волнового числа.

Величины групповых скоростей волн ζ_{11} , ζ_{14} изменяются соответственно в диапазонах $[0, \sqrt{gH}]$, $[0, \tilde{V}(r^0)]$, где $\tilde{V}(r) = [0,5\sigma''(r)]^{1/2}$.

Групповые скорости волн ζ_{12} , ζ_{13} изменяются в диапазонах $[0, \sigma'_0(r_6)]$, $[0, \sigma'_0(r_7)]$, если $\eta_0 < \eta_2$ и в диапазонах $[0, \tilde{V}(r_8)]$, $[0, \tilde{V}(r_9)]$ при $\eta_2 < \eta_0 < \eta_3$. Здесь r_6, r_7 – действительные корни уравнения $\sigma_0''(r) = 0$, а r_8, r_9 – уравнения $\sigma_0(r) = 0$.

Рассмотрим пространственное затухание поверхностных волновых возмущений заданной частоты. Для этого найдем волновые числа $r = r_0 - i\tilde{r}$, удовлетворяющие уравнению $\Delta_1 = 0$ при фиксированном действительном значении σ .

Предполагая коэффициент затухания $\tilde{r}$ малым и ограничиваясь двумя членами разложения $\Delta_1(\sigma, r_0, \tilde{r})$ в ряд, получим

$$\begin{aligned} \Delta_1(\sigma, r_0, \tilde{r}) &= \operatorname{Re} \Delta_1(\sigma, r_0, 0) - \tilde{r} \operatorname{Im} \frac{\partial \Delta_1(\sigma, r_0, 0)}{\partial(i\tilde{r})} + \\ &+ i \left(\operatorname{Im} \Delta_1(\sigma, r_0, 0) + \tilde{r} \operatorname{Re} \frac{\partial \Delta_1(\sigma, r_0, 0)}{\partial(i\tilde{r})} \right) + \dots \\ \operatorname{Re} \Delta_1(\sigma, r_0, 0) &= \sigma^2 \left(\chi_1 + \frac{1}{r_0 g \operatorname{th} r_0 H} \right) - (D_1 r_0^4 - Q_1 r_0^2 + 1), \\ \operatorname{Im} \Delta_1(\sigma, r_0, 0) &= -\sigma \eta_1 r_0^2. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Из уравнения $\Delta_1(\sigma, r_0, \tilde{r}) = 0$ с учетом (7.38) найдем

$$\tilde{r} = \eta_1 r_0^4 g [8\sigma(1 + \chi_1 r_0 g \operatorname{th} r_0 H)]^{-1} \operatorname{th} r_0 H. \quad (7.39)$$

При этом σ и r_0 связаны соотношением

$$\operatorname{Re} \Delta_1(\sigma, r_0, 0) \operatorname{Re} \frac{\partial \Delta_1(\sigma, r_0, 0)}{\partial(i\tilde{r})} + \operatorname{Im} \Delta_1(\sigma, r_0, 0) \operatorname{Im} \frac{\partial \Delta_1(\sigma, r_0, 0)}{\partial(i\tilde{r})} = 0. \quad (7.40)$$

Численный анализ для рассматриваемых значений параметров показал, что выражение (7.40) определяет почти такую же зависимость частоты от r_0 , как и формула (7.36).

В общем случае значение $\tilde{r}$ можно определить, решая уравнения $\operatorname{Re} \Delta_1(\sigma, r_0, \tilde{r}) = 0$ и $\operatorname{Im} \Delta_1(\sigma, r_0, \tilde{r}) = 0$, численно. Сопоставление значений $\tilde{r}$, полученных численно для указанных параметров и по формуле (7.39), показало их практическое совпадение.

Зависимость коэффициента затухания от частоты представлена на рис. 7.12. Здесь те же обозначения, что и на рис. 7.9. Видно, что коэффициент затухания волн ζ_{11} увеличивается, а волн ζ_{12} , ζ_{14} , обусловленных соответственно сжатием и вязкостью, убывает с ростом частоты при фиксированном η . Кроме того, $\tilde{r}$ для изгибных волн ζ_{13} растет с увеличением σ при $\eta < \eta_2$. Если же $\eta > \eta_2$, то на интервале σ до значения, соответствующего квадрату на графике, $\tilde{r}$ для изгибных волн убывает, а после увеличивается.

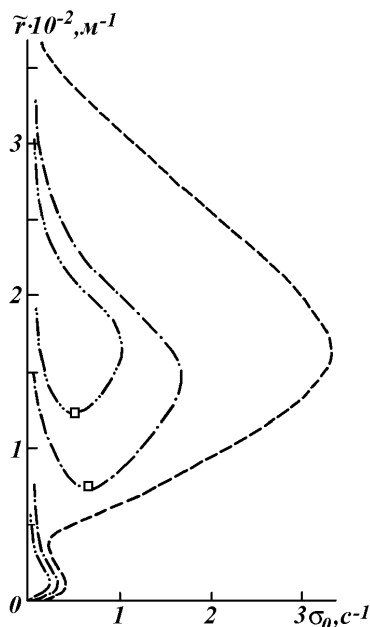


Рис. 7.12

Таким образом, возможно существование нескольких волн, различных периодов, имеющих одинаковый пространственный коэффициент затухания.

7.5. Влияние вязких свойств снежно-ледового покрова на вынужденные волны

Рассмотрим теперь влияние снежно-ледового покрова на волновые возмущения, генерируемые источником [52], расположенным внутри жидкости в точке $(0, z_0)$, потенциал которого равен

$$\bar{\varphi} = \frac{\tilde{M}}{4\pi} \ln \left\{ [x^2 + (z - z_0)^2] / [x^2 - (z - z_0)^2] \right\} \exp(i\sigma t),$$

$\tilde{M}$ – мощность источника. Источник включается в момент времени $t = 0$. До начала его действия жидкость невозмущена, а поверхность лед-вода ζ_1 и граница раздела слоев жидкости ζ_2 горизонтальны.

Для определения потенциала скорости жидкости ϕ_1 в верхнем и ϕ_2 в нижнем слоях имеем уравнения (7.30) с граничными (7.31) – (7.33), (7.5) и начальными (7.4) условиями.

Предположим, что источник располагается в верхнем слое. Заменяя ϕ_1 на $\phi_1 + \bar{\phi}$ и применяя для решения данной задачи преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по времени находим

$$\zeta_k = M_1 \int_{-\infty}^{+\infty} a_k(r) I_k \exp(irx) dr \quad (k = 1, 2), \quad (7.41)$$

$$a_1 = \text{ch } r h \text{ch}^{-1} r H_1, \quad a_2 = \gamma \text{ch } r (H_1 - h_1) \text{th } r H_2 \text{ch}^{-1} r H_1,$$

$$I_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{N_k(r, \alpha) \exp(\alpha t)}{(\alpha - i\sigma) \Delta(r, \alpha)} d\alpha,$$

$$N_1 = \alpha^2 (\gamma \text{th } r H_2 \text{th } r h + 1) + \varepsilon \gamma \text{th } r H_2,$$

$$N_2 = r g (D^* + \alpha^2 \chi_1 - \alpha \eta_1 r^2) + \alpha^2 \text{th } r (H_1 - h_1),$$

$$M_1 = \tilde{M} / 2\pi g, \quad D^* = D_1 r^4 - Q_1 r^2 + 1,$$

где h_1 – расстояние от источника до границы раздела слоев жидкости.

Учитывая, что неоднородность жидкости оказывает слабое влияние на характеристики поверхностных волн, запишем

$$\Delta = \Delta_1(r, \alpha) \Delta_2(r, \alpha) \quad (7.42)$$

$$\Delta_1 = \alpha^2 \chi^* + \alpha \eta_1 r^3 g \text{th } r H + D^* r g \text{th } r H, \quad \Delta_2 = \alpha^2 + \gamma_2, \quad \chi^* = 1 + \chi_1 r g \text{th } r H,$$

$$\gamma_2 = \varepsilon r g \text{th } r H_1 \text{th } r H_2 \chi^* [\text{th } r H (\chi_1 r g (\text{th } r H_1 - \gamma \text{th } r H_2) + 1 + \gamma \text{th } r H_1 \text{th } r H_2)]^{-1},$$

$$H = H_1 + H_2.$$

Вычисляя интегралы I_k получим

$$I_k = \sum_{s=1}^5 N_k(r, \alpha) \tau_s^{-1} \exp(\theta_s t), \quad (7.43)$$

$$\theta_1 = i\sigma, \quad \theta_{2,3} = \pm i\sqrt{\gamma_1} - \gamma_0, \quad \theta_{4,5} = \pm i\sqrt{\gamma_2}, \quad \tau_1 = \Delta_1(r, \theta_1) \Delta_2(r, \theta_1),$$

$$\tau_{2,3} = 2\sqrt{\gamma_1} (\alpha_{1,2} - i\sigma) (\alpha_{1,2}^2 + \gamma_2),$$

$$\tau_{4,5} = 2\sqrt{\gamma_2} (\sqrt{\gamma_2} \mp \sigma) (\sqrt{\gamma_2} \mp \alpha_1) (\sqrt{\gamma_2} \mp \alpha_2),$$

$$\alpha_{1,2} = -\gamma_0 \pm i\sqrt{\gamma_1}, \quad \gamma_0 = 0,5 \eta_1 r^3 g \text{th } r H \chi^{*-1},$$

$$\gamma_1 = 0,25 (4 \chi^* D - \eta_1^2 r^5 g \text{th } r H) r g \chi^{*-2} \text{th } r H.$$

Рассмотрим интегралы (7.41) для $x > 0$. Подынтегральные функции здесь являются аналитическими в окрестности действительной оси. Особенности типа полюсов (вещественные корни уравнения $\Delta_2(r, \theta_1) = 0$), содержащиеся в отдельных слагаемых, взаимно погашаются, а $\Delta_1(r, \theta_1) \neq 0$ при действительных значениях r . Поэтому исходный путь интегрирования можно деформировать в путь L_1 , идущий вдоль действительной оси и обходящий по малым полуокружностям точку $r = r_2$ в верхней, $r = -r_2$ – в нижней полуплоскости. Здесь $r = \pm r_2$ – корни уравнения $\Delta_2(r, \theta_1) = 0$. Такой выбор обхода полюсов на контуре L_1 гарантирует выполнение условия $\text{Re}(\theta_{4,5}) \leq 0$. Отметим, что в верхней полуплоскости справедливы неравенства $\text{Re}(\theta_{2,3}) \leq 0$.

Запишем (7.41) в виде

$$\zeta_k = \sum_{s=1}^5 \zeta_k^s, \quad \zeta_k^s = M_1 \int_{L_s} a_k N_k \tau_s^{-1} \exp(irx + \theta_s t) dr. \quad (7.44)$$

Пути L_2, L_3 совпадают с действительной осью. Контур L_4, L_5 обходят соответственно одну из точек $r = \mp r_2$. Выполнение условий $\text{Re}(\theta_s) \leq 0$ обеспечивает при $t \rightarrow \infty$ стремление к нулю интегралов $\zeta_k^s (s = 2-5)$, определяющих неустановившиеся колебания. Рассмотрим установившуюся часть движения поверхности лед-вода ($k = 1$) и границы раздела слоев жидкости ($k = 2$), характеризуемых интегралами ζ_k^1 .

Кроме двух действительных корней $r = \pm r_2$ уравнения $\Delta_2 = 0$ подынтегральные выражения в ζ_k^1 имеют особенности в точках, соответствующих корням уравнения $\Delta_1 = 0$. Вычисляя интегралы ζ_k^1 , ограничиваясь рассмотрением периодических возмущений, получим

$$\zeta_k^1 = \sum_{l=1}^n \zeta_{kl}^l + \zeta_{k2}^0, \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{kj}^l &= Y_{kj}^l(r_j^l) \cos(\beta_j^l + \psi_{kj}^l), \quad Y_{kj}^l = |A_{kj}|, \quad \psi_{kj}^l = \arg A_{kj}, \quad \beta_j^l = \sigma t - m^l x, \\ \beta_2^0 &= \sigma t - r_2^0 x, \quad A_{kj} = a_k N_k q_j^{-1}, \quad q_1 = \Delta_1' \Delta_2 \exp(\xi^l x), \quad q_2 = \Delta_1 \Delta_2', \\ &(l = 0 \dots n, k = 1, 2; j = 1, 2) \end{aligned}$$

Значение $l \neq 0$ принимаются при $j = 1$, а $l = 0$ при $j = 2$. Здесь n – количество корней $r_1^l = m^l + i\xi^l$ ($m^l > 0, \xi^l > 0$) уравнения $\Delta_1 = 0$, штрих означает производную по r .

Если источник располагается в нижнем слое то, заменяя φ_2 на $\varphi_2 + \bar{\varphi}$ и решая аналогично, находим для ζ_k выражения (7.41) – (7.42), где $a_{1,2}$ и $N_{1,2}$ имеют вид

$$a_1 = \text{chr}(H_2 - h_1)(\text{chr}H_1 \text{chr}H_2)^{-1}, \quad a_2 = \text{chr}(H_2 - h_1)\text{ch}^{-1}rH_2, \\ N_1 = \alpha^2, \quad N_2 = rg(D^* + \alpha^2\chi_1 - \alpha\eta_1r^2) + \alpha^2. \quad (7.46)$$

Из (7.45) – (7.46) видно, что изгибные деформации льда и возмущения поверхности скачка плотности формируются поверхностными ζ_{k1}^1 и внутренними ζ_{k2}^0 волнами. Если $Q_1 \leq Q_0$, где Q_0 определяется решением уравнений $(\sqrt{\gamma_1})' = 0$, $(\sqrt{\gamma_1})'' = 0$, то из поверхностных волн возбуждаются только гравитационные ζ_{k1}^1 и обусловленные внутренним трением снега ζ_{k1}^4 волны. Частота этих волн изменяется в диапазоне $0 < \sigma < \sigma_1$, $\sigma_1 = \sqrt{\gamma_1(r_1)}$, r_1 – положительный корень уравнения $(\sqrt{\gamma_1})' = 0$.

При условии $Q_1 > Q_0$ возможно возбуждение до четырех систем волн. Кроме волн $\zeta_{k1}^1, \zeta_{k1}^4$ могут генерироваться и волны обусловленные ледовым сжатием ζ_{k1}^2 и упругими характеристиками льда ζ_{k1}^3 . Верхние границы интервалов волн ζ_{k1}^1 и ζ_{k1}^4 определяются величинами σ_1 и σ_3 соответственно. Частоты изгибных (ζ_{k1}^3) волн и обусловленных сжатием (ζ_{k1}^2) изменяются на интервалах $(\sigma_2, \sigma_3), (\sigma_2, \sigma_1)$. Здесь $\sigma_k = \sqrt{\gamma_1(r_k)}$, $k = 1, 2, 3$, а r_k – действительные корни уравнения $(\sqrt{\gamma_1})' = 0$. При этом $\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_3$.

Отметим, что можно указать (см. раздел 7.4) такое значение $\eta = \eta_0$, при котором возбуждаются только две системы волн $\zeta_{k1}^1, \zeta_{k1}^4$ для любых усилий ледового сжатия.

Численный анализ зависимости волновых возмущений от условий их генерации проводился при значениях H_1, H_2, h, h^* , равных $10^2, 10^3, 1.5, 1$ м соответственно. При этом, как и в разделе 7.4, величины E, μ, ε полагались равными $3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, 0.34, 10^{-3}$, а $\rho_1, \rho, \rho^* - 10^3, 870, 250 \text{ кг/м}^3$.

Коэффициент внутреннего трения снега η изменялся в пределах $4 \cdot 10^6 - 1.87 \cdot 10^8 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Глубина h_0 погружения источника (расстояние от поверхности лед-вода до источника) изменялась в пределах $0 < h_1 < H$.

Анализ результатов численных расчетов показал, что снежный покров изменяет амплитудно-фазовые характеристики поверхностных волн. Увеличение коэффициента внутреннего трения снега приводит к уменьшению модулей амплитуд Y_{k1}^1, Y_{k1}^3 гравитационной и изгибной волн. Амплитуда волн, обусловленных ледовым сжатием и внутренним трением снега, возрастают с ростом η . Значения σ_k ($k = 1, 2, 3$), определяющие интервалы изменения частоты поверхностных волновых возмущений, уменьшаются с ростом коэффициента трения. При этом ча-

стотный диапазон возбуждения волн ζ_{k1}^2 расширяется, а волн ζ_{k1}^3 , ζ_{k1}^4 сужается. Интервал частот для гравитационных волн практически не изменяется. Распределения модулей амплитуд поверхностных волн по частоте колебаний на границе лед-вода (рис. 7.13) и поверхности скачка плотности (рис. 7.14) иллюстрируют графики при $h_0 = 80$ м, $Q_1 = 1.6\sqrt{D_1}$, $\chi = 0$. Номерам кривых 1, 2 отвечают значения коэффициента внутреннего трения $4 \cdot 10^6$, $4.7 \cdot 10^6$ Па·с.

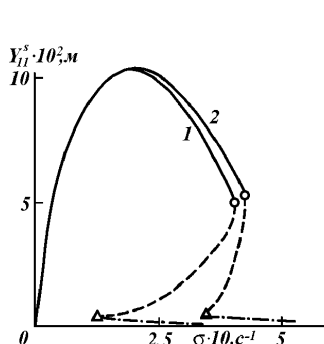


Рис. 7.13.

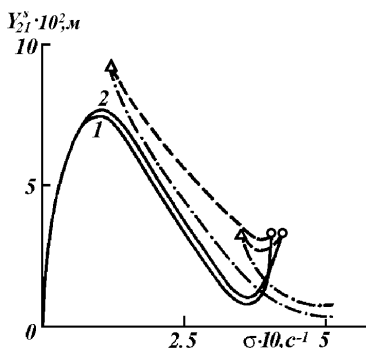


Рис. 7.14

Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии 1, 2 характеризуют волны ζ_{k1}^1 , ζ_{k1}^2 , ζ_{k1}^3 соответственно. Кружками и треугольниками отмечены значения модулей амплитуд волн при σ_1 и σ_2 . Верхняя граница частотного диапазона (σ_3) волны ζ_{k1}^4 выходит за пределы рис. 7.13, 7.14. Амплитуда этой волны мала (существенно меньше, чем у волн ζ_{k1}^2). Отметим, что при $\eta > \eta_0$, когда волны ζ_{k1}^2 , ζ_{k1}^3 не возбуждаются, модули Y_{k1}^1 , Y_{k1}^4 для рассмотренных значений параметров могут достигать 10^{-1} м. Модуль амплитуды волн, обусловленных ледовым сжатием, на поверхности лед-вода увеличивается, а волны ζ_{k1}^3 — убывает с частотой. Для поверхностных волн ζ_{k1}^2 , ζ_{k1}^3 отношения модуля амплитуд на границе лед — вода к его значению на поверхности скачка плотности в зависимости от частоты и глубины погружения источника может быть как больше, так и меньше единицы. Причём на границе раздела слоев жидкости значения модулей амплитуд этих волн могут быть соизмеримы с амплитудой гравитационной волны. Если $\eta = 0$, то амплитуды всех поверхностных волн затухают с глубиной, а вносимый ими вклад в формирование поверхности скачка плотности определяется главным образом волной ζ_{21}^1 .

Амплитуды изгибных деформаций, формируемых каждой из поверхностных волн, убывают с глубиной погружения источника. Анало-

гичная зависимость характерна и для амплитуд волн $\zeta_{21}^1, \zeta_{21}^2, \zeta_{21}^3$ на разделе слоев, если $\eta = 0$. При $\eta \neq 0$ с увеличением h_0 уменьшается только γ_{21}^1 . Модули амплитуд других поверхностных волн на границе скачка плотности растут с приближением к ней источника. Для волны ζ_{21}^2 обусловленной ледовым сжатием это иллюстрируют графики на рис. 7.15 при $\sigma = 0,4 \text{ с}^{-1}$, которые определяют зависимость Y_{21}^2 от глубины погружения источника. Номера кривых соответствуют тем же значениям параметров, что и на рис. 7.13.

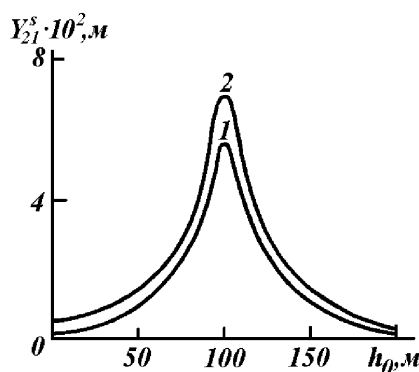


Рис. 7.15

Наличие снежного покрова приводит также к изменению фазового сдвига (ψ_{k1}^l) всех поверхностных волн, значение которого растет с увеличением η . При этом фазовый сдвиг каждой из волн на поверхности лед-вода больший, чем на поверхности скачка плотности. Для гравитационной волны он изменяется в интервалах $(-90^\circ, 0)$ и $(0, 20^\circ)$ на верхней и нижней границах верхнего слоя соответственно. Фаза изгибных колебаний льда, обусловленных другими волнами, под влиянием внутреннего трения снега может изменяться на противоположную. Кроме того, ψ_{k1}^1, ψ_{k1}^3 растут, а ψ_{k1}^2, ψ_{k1}^4 уменьшаются с увеличением глубины погружения источника.

Отметим, что увеличение h^* приводит к качественно тем же изменениям поверхностных возмущений, что и рост η .

Амплитудно-фазовые характеристики возмущений, обусловленные внутренними волнами на поверхности скачка плотности, практически не зависят от льда и снега. Их распределение по частоте колебаний и глубине погружения источника такие же, как и в бассейне со свободной поверхностью. Это видно из табл. 7.7, где даны значения амплитуд внутренней волны на границе раздела слоев при источнике находящимся на расстоянии h_1 от этой границы в верхнем (верхняя строка) и ниж-

нем (нижняя строка) слое. Характерно, что источник, действующий в верхнем слое, генерирует внутренние волны большей амплитуды, чем аналогичный источник, расположенный на том же расстоянии от поверхности скачка плотности, в нижнем слое.

Таблица 7.7

$\sigma \cdot 10^2, \text{с}^{-1}$	$h_1, \text{м}$			
	20	40	60	80
3	12.1	8.73	6.61	5.45
	11.4	7.8	5.34	3.65
4	9.83	5.15	2.8	1.72
	9.81	5.0	2.63	1.36
5	7.08	2.66	1.0	0.43
	7.0	2.65	0.97	0.38

Амплитуда проявлений внутренних волн в ледяном покрове уменьшается, а их фазовый сдвиг увеличивается с ростом коэффициента трения. Ледовое сжатие ослабляет влияние вязкости на амплитуду проявления Y_{12}^0 , увеличивая при этом ψ_{12}^0 . Убывает воздействие вязкости и с уменьшением частоты колебаний. Наглядная иллюстрация зависимости модуля амплитуды проявлений ($\text{м} \cdot 10^3$) и сдвига фазы внутренних волн от частоты и глубины расположения источника представлена в таб. 7.8 и на рис. 7.16.

Таблица 7.8

$\eta, \text{Па} \cdot \text{с}$	$Q/2\sqrt{D}$	$\sigma \cdot 10^2, \text{с}^{-1}$			$h_1, \text{м}$
		3	4	5	
0	0	18.1	1.73	0.03	20
		8.5	1.3	0.02	
		8.15	0.58	0.01	
	1.6	2.7	0.44	0.009	80
		22.1	6.47	1.5	
		10.4	3.4	0.76	
$4.5 \cdot 10^6$	0	9.9	1.1	0.1	20
		3.3	0.45	0.07	
		22.1	6.4	1.5	
	1.6	10.4	3.2	0.7	80
		9.9	1.1	0.006	
		3.2	0.2	0.003	
	0	18.1	0.3	0.02	20
		8.5	0.2	0.01	
		8.1	0.06	0.008	
	1.6	2.7	0.01	0.005	80
		22.1	6.4	1.5	
		10.4	3.2	0.7	

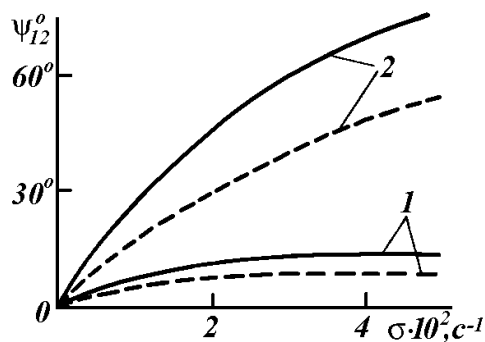


Рис. 7.16.

Номера кривых 1, 2 отвечают сдвигу фаз при $0 < h_1 < H_1$ для значений η , равных $4.5 \cdot 10^6$, $1.87 \cdot 10^8$ Па·с. Сплошные линии даны при $Q_1 = 1.6\sqrt{D_1}$, штриховые – $Q_1 = 0$.

Отметим, что величина сдвига фазы проявлений не зависит от расстояния между границей раздела слоев и источником. При переходе источника через границу раздела фаза внутренних волн меняется на противоположную.

ГЛАВА 8. ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЙ НА РАЗВИТИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВНУТРЕННИХ ВОЛН В МОРЕ СО СКАЧКОМ ПЛОТНОСТИ

8.1. Волны от начальных возмущений

Пусть на поверхности двухслойной жидкости, текущей со скоростью u в положительном направлении оси x , плавает ледяной покров. Верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний — толщину H_2 и плотность ρ_2 . В начальный момент времени поток не возмущен, а поверхность лед-вода ζ_1 и граница раздела слоев ζ_2 горизонтальны. Начиная с момента времени $t = 0$ участок дна бассейна совершает вертикальное смещение с заданной скоростью

$$w = af(x)\psi(t), \quad \psi(0) = 0. \quad (8.1)$$

Проведем анализ влияния скорости потока на процесс развития волнового движения. Потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 возмущенных скоростей в верхнем и нижнем слоях определим из уравнений (7.30) с граничными

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\zeta_1 + \rho_1 \mathcal{L}\phi_1 &= 0 \quad \text{при } z = H_1, \quad \mathcal{L}_2(\phi_2 - \gamma\phi_1) = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= af(x)\psi(t) \quad \text{при } z = -H_2; \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

и начальными (7.4) условиями. Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= D \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \chi \mathcal{L}_3 + \rho_1 g, \quad \mathcal{L}_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ \mathcal{L}_1 &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 + g \frac{\partial}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \chi = \rho h, \end{aligned}$$

D , ρ , h — цилиндрическая жесткость, плотность и толщина льда, ось z направлена вертикально вверх, начало координат выбрано на невозмущенной границе раздела слоев, ζ_1 и ζ_2 связаны с ϕ_1 и ϕ_2 кинематическими условиями

$$\frac{\partial \zeta_s}{\partial t} = \frac{\partial \phi_s}{\partial z} - u \frac{\partial \zeta_s}{\partial x}, \quad s = 1, 2. \quad (8.3)$$

Применяя для решения задачи преобразование Фурье по переменной x и преобразование Лапласа по времени t , найдем

$$\begin{aligned} \zeta_s &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(r) K_s e^{irx} dr, \quad K_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{d_s}{\Delta} \psi^*(\alpha) e^{\alpha t} d\alpha, \\ f^*(r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-irx} dx, \quad \psi^*(\alpha) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-\alpha t} dt, \\ d_1 &= F^3(\text{chr}H_1 \text{chr}H_2)^{-1}, \quad d_2 = F(F^2\psi_0 + d_3) \text{ch}^{-1}rH_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= rgD_0 \text{thr} H_1, \quad \Delta = bF^4 + b_1F^2 + b_2, \quad F = \alpha + iur, \\
b &= \chi_1 rgl_1 + l_3, \quad b_1 = rg(l_1D_0 + \varepsilon\psi_0 \text{thr} H_2), \quad \chi_1 = \chi/\rho g, \\
b_2 &= rgD_0l_2 \text{thr} H_2, \quad l_1 = \text{thr} H_1 + \gamma \text{thr} H_2, \quad l_2 = \varepsilon rg \text{thr} H_1 \text{thr} H_2, \quad \varepsilon = 1 - \gamma, \\
l_3 &= 1 + \gamma \text{thr} H_1 \text{thr} H_2, \quad \psi_0 = 1 + \chi_1 rg \text{thr} H_1, \quad D_0 = 1 + D_1 r^4.
\end{aligned}$$

Выражение ζ_s представляет собою точное решение поставленной задачи для произвольной функции $\psi(t)$, порядок роста которой меньше экспоненциального, и функции $f(x)$, представимой интегралом Фурье. Вычисляя интегралы Меллина K_s для $\psi(t) = \delta(t - t_0)$, $t_0 > 0$, где $\delta(t)$ – дельта функция, найдем [21]

$$\begin{aligned}
\zeta_s &= (-1)^{s+1} \frac{a}{2\sqrt{2}\pi} \text{Re} \sum_{k=1}^4 J_{sk}, \\
J_{sk} &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} F_{s1} \exp(i|x|M_k) dr, & k=1, 2, \\ \int_{-\infty}^{\infty} F_{s2} \exp(i|x|M_k) dr, & k=3, 4, \end{cases} \\
M_{1,2} &= \pm[\tau_1(r) \mp ur]v + r \text{sign} x, \quad M_{3,4} = \pm[\tau_2(r) \mp ur]v + r \text{sign} x, \\
F_{1n} &= f_1 \gamma_n, \quad F_{2n} = f_1(d_3 - \gamma_n \psi_0) \text{chr} H_1, \quad n=1, 2, \\
f_1 &= f^*(r) [b(\gamma_1 - \gamma_2) \text{chr} H_1 \text{chr} H_2]^{-1}, \quad v = t/|x|, \\
\tau_{1,2} &= \sqrt{\gamma_{1,2}}, \quad \gamma_{1,2} = \frac{1}{2} b_1 b^{-1} [1 \pm (1 - 4bb_2 b_1^{-2})^{1/2}].
\end{aligned}$$

Отсюда методом стационарных фаз найдем асимптотические выражения ζ_s , справедливые на достаточно большом удалении от эпицентра возмущений вверх ($x < 0$) и вниз ($x > 0$) по потоку.

Рассмотрим случай битого льда ($E = 0$) и вычислим ζ_s для $x > 0$ (вниз по потоку) в случае четной функции $f(x)$. Фазовая функция $M_1(r)$ имеет при этом одну стационарную точку $r = r_1 > 0$ если $u > u_1^0$, $(u - u_1^0) < v^{-1} < u$ или $u < u_1^0$, $v^{-1} < u$ и стационарную точку $r = -r_1$ при $u \geq 0$, $u < v^{-1} < u + u_1^0$. Одну стационарную точку $r = r_3$, корень уравнения $\tau'_2 = u - v^{-1}$, имеет и M_3 для $u > u_2^0$, $(u - u_2^0) < v^{-1} < u$ или $u < u_2^0$, $v^{-1} < u$. Если же $u \geq 0$, $u < v^{-1} < u + u_2^0$, то стационарной точкой M_3 будет $r = -r_3$. Стационарные точки функции $M_2(r)$, корни уравнения $\tau'_1(r) = v^{-1} - u$, при соответствующих условиях отличаются от стационарных точек функции $M_1(r)$ только знаками. Это же имеет место и для

функций $M_3(r)$, $M_4(r)$. Здесь $u_{1,2}^0 = \sqrt{gH} \left(\frac{1}{2} \pm \beta \right)^{1/2}$, $\beta = \left(\frac{1}{4} - \varepsilon H_1 H_2 / H^2 \right)^{1/2}$.

При других значениях v стационарных точек нет. Учитывая, что при отсутствии стационарных точек интегралы J_{sk} для больших x имеют порядок не ниже x^{-2} , в чем легко убедиться интегрированием по частям, а при наличии стационарных точек – порядок $x^{-1/2}$, найдем при любых скоростях потока для ζ_s в области $x > ut$ выражение

$$\zeta_s = \begin{cases} O(x^{-2}), & x > (u + u_1^0)t, \\ \eta_{s2}, & (u + u_2^0)t < x < (u + u_1^0)t, \\ \eta_{s2} + \eta_{s4}, & ut < x < (u + u_2^0)t. \end{cases} \quad (8.4)$$

В области $x < ut$ вид ζ_s определяется скоростью потока. При условии $u < u_2^0$

$$\zeta_s = \eta_{s1} + \eta_{s3}, \quad x < ut, \quad (8.5)$$

а при условии $u_2^0 < u < u_1^0$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s3}, & (u - u_2^0)t < x < ut, \\ \eta_{s1}, & x < (u - u_2^0)t. \end{cases} \quad (8.6)$$

Если же $u > u_1^0$, то

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s3}, & (u - u_2^0)t < x < ut, \\ \eta_{s1}, & (u - u_1^0)t < x < (u - u_2^0)t, \\ O(x^{-2}), & x < (u - u_1^0)t. \end{cases} \quad (8.7)$$

Здесь

$$\eta_{sk} = \begin{cases} (-1)^{s+1} \frac{a}{\sqrt{|x|}} F_{s1}(r_1) [-v\tau_1''(r_1)]^{-1/2} \cos\theta_k, & k=1,2, \\ (-1)^{s+1} \frac{a}{\sqrt{|x|}} F_{s2}(r_3) [-v\tau_2''(r_3)]^{-1/2} \cos\theta_k, & k=3,4, \end{cases} \quad (8.8)$$

$$\theta_k = \begin{cases} |x|M_k(r_1) + (-1)^k \frac{\pi}{4}, & k=1,2, \\ |x|M_k(r_3) + (-1)^k \frac{\pi}{4}, & k=3,4, \end{cases}$$

штрих означает производную по r .

Видно, что в случае битого ледяного покрова вид поверхности льда и поверхности раздела слоев вниз по потоку формируется гравитационными волнами η_{sk} , затухающими с ростом x как $1/\sqrt{x}$. Две из них η_{s1} , η_{s2} – обычные поверхностные и две η_{s3} , η_{s4} – внутренние, обуслов-

ленные неоднородностью жидкости. Причем η_{s1} и η_{s3} появляются в области $x > 0$ только в условиях потока. Передний фронт волновых возмущений перемещается со скоростью $u + u_1^0$. Первыми в заданный район приходят поверхностные волны η_{s2} , задний фронт которых перемещается со скоростью потока. Затем на η_{s2} накладываются внутренние волны η_{s4} , передний и задний фронты которых имеют скорости $u + u_2^0$ и u соответственно. Сразу же после прохождения η_{s2} и η_{s4} в указанный район приходят волны η_{s1} и η_{s3} . Их передние фронты движутся со скоростью потока. Если при этом $u < u_2^0$, то η_{s1} и η_{s3} занимают область $x < ut$. В случае $u_2^0 < u < u_1^0$ задний фронт волн η_{s3} уходит со скоростью $u - u_2^0$, а область $x < (u - u_2^0)t$ покрыта только волнами η_{s1} . Если же $u > u_1^0$, то затухающее с расстоянием волновое возмущение поверхности лед-вода и поверхности раздела имеет четко выраженный задний фронт, движущийся со скоростью $u - u_1^0$ и совпадающий с задним фронтом волн η_{s1} , обусловленных потоком.

Получим теперь выражения ζ_k , $k=1, 2$ для $x < 0$ (вверх по потоку). В этом случае уравнение $M'_1(r)=0$ имеет действительный корень $r = r_1 > 0$ только при условии $u < u_1^0$, $v^{-1} < u_1^0 - u$. Имеет один корень $r = r_3 > 0$ и уравнение $M'_3(r)=0$, если $u < u_2^0$, $v^{-1} < u_2^0 - u$. Отметим, что при заданной скорости потока $u > 0$ и фиксированном v значения r_1 , r_3 для $x > 0$ отличаются от соответствующих значений для $x < 0$. Равны они только в случае $u = 0$.

Что касается фазовых функций M_2 и M_4 , то при $x < 0$ их стационарные точки отличаются от стационарных точек функций M_1 и M_3 при соответствующих условиях только знаками. Поэтому

$$\zeta_s = O(x^{-2}) \quad \text{при } u > u_1^0, \quad (8.9)$$

$$\zeta_s = \begin{cases} O(x^{-2}), & x < -(u_1^0 - u)t \\ \eta_{s1}, & x > -(u_1^0 - u)t \end{cases} \quad \text{при } u_2^0 < u < u_1^0, \quad (8.10)$$

$$\zeta_s = \begin{cases} O(x^{-2}), & x < -(u_1^0 - u)t, \\ \eta_{s1}, & -(u_1^0 - u)t < x < -(u_2^0 - u)t \text{ при } u < u_2^0, \\ \eta_{s1} + \eta_{s3}, & x > -(u_2^0 - u)t. \end{cases} \quad (8.11)$$

Следовательно, вверх по потоку в зависимости от его скорости затухающие как $1/\sqrt{|x|}$ волны либо вообще не появляются, либо есть только поверхностные η_{s1} или поверхностные η_{s1} и внутренние η_{s3} . Передние

фронты волн η_{s1} и η_{s3} движутся вверх по потоку со скоростями $u_1^0 - u$ и $u_2^0 - u$ соответственно.

Отметим, что формулы (8.4)–(8–11) при $h = 0$ описывают процесс развития волн от импульсных вертикальных смещений участка дна бассейна в двухслойном потоке со свободной поверхностью.

Рассмотрим случай сплошного упругого льда ($E \neq 0$). Для $x > 0$ (вниз по потоку) функция $M_1(r)$ при $u > u_1^0$, $v^{-1} < (u - u_1^0)$ имеет одну $r = r_1^*$, а при $u > u_1^0$, $(u - u_1^0) < v^{-1} < (u - u_1)$ и при $u_1 < u < u_1^0$, $v^{-1} < (u - u_1)$ – две стационарные точки $r = r_1^*$, $r = r_1$. Две стационарные точки $r = -r_1$, $r = -r_1^*$ эта функция имеет и при $u \geq 0$, $(u + u_1) < v^{-1} < (u + u_1^0)$, а если $u \geq 0$, $v^{-1} > (u + u_1^0)$, то только одну $r = -r_1^*$. Здесь $u_1 = \tau_1'(r_1^0)$, $u_1^0 > u_1$, $r_1^* > r_1 > 0$, r_1^0 – положительный корень уравнения $\tau_1''(r) = 0$. Зависимость u_1 от толщины сплошного льда такая же, как и при отсутствии потока. Она представлена сплошной линией на рис. 7.2. Фазовая функция $M_2(r)$ для $u \geq 0$, $v^{-1} > (u + u_1^0)$ имеет только одну $r = r_1^*$, а при $u \geq 0$, $(u + u_1) < v^{-1} < (u + u_1^0)$ две $r = r_1$, $r = r_1^*$ стационарные точки. У этой функции есть две стационарные точки $r = -r_1$, $r = -r_1^*$ и при $u > u_1^0$, $(u - u_1^0) < v^{-1} < (u - u_1)$ или $u_1 < u < u_1^0$, $v^{-1} < (u - u_1)$, а для $u > u_1^0$, $v^{-1} < (u - u_1^0)$ – только одна $r = -r_1^*$. При других значениях u и v уравнения $M'_{1,2} = 0$ вещественных корней не имеют. Отметим, что r_1^* обусловлена исключительно упругими силами ледяного покрова. Что касается функций $M_{3,4}(r)$, то распределение их стационарных точек по u и v такое же, как и в случае битого льда.

Проведенный анализ показывает, что число стационарных точек и их расположение, а следовательно, и характер волновых возмущений определяются главным образом скоростью потока и соотношением величин u_1 и u_2 . Влияние толщин слоев, стратификации жидкости, толщины и модуля упругости льда на эти величины изучено в разделе 7.1.

Пусть выполняется соотношение $u_1 > u_2^0$. Тогда для ζ_s в области $x > ut$ вниз по потоку найдем выражение

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s2}, & x > (u + u_1^0)t, \\ \eta_{s2} + \eta_{s2}^*, & (u + u_1)t < x < (u + u_1^0)t, \\ O(x^{-2}), & (u + u_2^0)t < x < (u + u_1^0)t, \\ \eta_{s4}, & ut < x < (u - u_2^0)t, \end{cases} \quad (8.12)$$

справедливое при любых значениях u . В области $x < ut$ вид ζ_s зависит от скорости потока. Для $u < u_2^0$

$$\zeta_s = \eta_{s3}, \quad x < ut, \quad (8.13)$$

а для $u_2^0 < u < u_1$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s3}, & (u - u_2^0)t < x < ut, \\ O(x^{-2}), & x < (u - u_2^0)t. \end{cases} \quad (8.14)$$

В случае $u_1 < u < u_1^0$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s3}, & (u - u_2^0)t < x < ut, \\ O(x^{-2}), & (u - u_1)t < x < (u - u_2^0)t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^*, & x < (u - u_1)t. \end{cases} \quad (8.15)$$

Если же $u > u_1^0$, то для $x > (u - u_1)t$ вид ζ_s такой же, как и в (8.12), (8.15), а в области $x < (u - u_1)t$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s1}^*, & (u - u_1^0)t < x < (u - u_1)t, \\ \eta_{s1}^*, & x < (u - u_1^0)t. \end{cases} \quad (8.16)$$

В формулах (8.12) – (8.16) выражения η_{sk} определяются по (8.8) при $E \neq 0$ и представляют собою гравитационные волны, деформированные за счет упругих и массовых сил льда. Волны η_{s2}^* чисто упругие, а η_{s1}^* образуются также за счет упругих сил льда, но появляются в области $x > 0$ только в условиях потока. Они имеют вид

$$\eta_{sk}^* = (-1)^{s+1} \frac{a}{\sqrt{|x|}} [vM''(r_1^*)]^{-1/2} F_{s1}(r_1^*) \cos \theta_k^*,$$

$$\theta_k^* = |x| M_k(r_1^*) - (1)^k \frac{\pi}{4}, \quad k=1, 2.$$

Из (8.12) – (8.16) видно, что при $u > u_1^0$ или $u_1 < u < u_1^0$ поверхность лед-вода и граница раздела слоев вниз по потоку от эпицентра формируются волнами η_{sk} ($k=1-4$), η_{sk}^* ($k=1, 2$), затухающими с ростом $|x|$ как $1/\sqrt{|x|}$. При этом η_{s3} , η_{s1} , η_{s1}^* находятся в области $x > 0$ только при $u > 0$. Волны η_{sk} при $k=1, 2$ поверхностные, а при $k=3, 4$ – внутренние. Если выполняются соотношения $u_2^0 < u < u_1$ или $u < u_2^0$, то волновое возмущение формируют четыре волны (те же, что и выше, кроме η_{s1} и η_{s1}^*). Волны на ζ_1 отличаются от соответствующих волн на ζ_2 только амплитудами.

Для любых скоростей потока область $x > (u + u_1^0)t$ покрыта упругими волнами η_{s2}^* , не имеющими выраженного переднего фронта. Скорость перемещения границы указанной области совпадает со скоростью переднего фронта поверхностных гравитационных волн η_{s2} . Как η_{s2}^* , так и η_{s2} проходят заданную границу $x = x_1$ в одно и то же время, ибо их задние фронты имеют одинаковую скорость перемещения $u + u_1$. После η_{s2} и η_{s2}^* через $x = x_1$ в течение времени от $t_1 = x_1 / (u + u_1)$ до $t_2 = x_1 / u$ проходят волны, затухающие как x^{-2} . За ними появляются внутренние η_{s4} , а затем – η_{s3} . Передний фронт η_{s4} движется со скоростью $u + u_2^0$, а задний – со скоростью потока. Передний фронт η_{s3} также перемещается со скоростью потока. Если при этом $u < u_2^0$, то η_{s3} будут последними, пересекающими заданную границу. Они не имеют выраженного заднего фронта и покрывают область $x < ut$. В случае $u_2^0 < u < u_1$ у волн η_{s3} есть задний фронт (его скорость $u - u_2^0$), после прохождения которого будут только волны, затухающие как x^{-2} . Когда $u_1 < u < u_1^0$, замыкать волновой процесс будут волны η_{s1} и η_{s1}^* , приходящие вместе через время $x_1[(u - u_2^0)^{-1} - (u - u_1)^{-1}]$ после ухода η_{s3} и покрывающие область $x < (u - u_1)t$. Если же $u > u_1^0$, то η_{s1} имеют задний фронт (его скорость $u - u_1^0$), а область $x < (u - u_1^0)t$ занимают только упругие поверхностные волны η_{s1}^* , обусловленные потоком.

Пусть теперь $u_1 < u_2^0$. В этом случае при любых значениях u для ζ_s в области $x > ut$ вниз по потоку найдем

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s2}^*, & x > (u + u_1^0)t, \\ \eta_{s2} + \eta_{s2}^*, & (u + u_2^0)t < x < (u + u_1^0)t, \\ \eta_{s2} + \eta_{s2}^* + \eta_{s4}, & (u + u_1)t < x < (u + u_2^0)t, \\ \eta_{s4}, & ut < x < (u + u_1)t. \end{cases} \quad (8.17)$$

В области же $x < ut$ вниз по потоку ζ_s зависит от u и имеет вид

$$\zeta_s = \zeta_{s3}, \quad x < ut \quad \text{при } u < u_1, \quad (8.18)$$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s3}, & (u - u_1)t < x < ut \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s3}, & x < (u - u_1)t \end{cases} \quad \text{при } u_1 < u < u_1^0, \quad (8.19)$$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s3}, & (u - u_1)t < x < ut, \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s3}, & (u - u_2^0)t < x < (u - u_1)t \text{ при } u_2^0 < u < u_1, \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^*, & x < (u - u_2^0)t, \end{cases} \quad (8.20)$$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s3}, & (u - u_1)t < x < ut, \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s3}, & (u - u_2^0)t < x < (u - u_1)t \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^*, & (u - u_1^0)t < x < (u - u_2^0)t \\ \eta_{s1}^*, & x < (u - u_1^0)t. \end{cases} \text{ при } u > u_1^0, \quad (8.21)$$

Эти формулы показывают, что под действием импульсных смещений участка дна бассейна волновое возмущение поверхности лед-вода и поверхности раздела слоев при условиях $u > u_1^0$, $u_2^0 < u < u_1^0$, $u_1 < u < u_2^0$ формируется шестью волнами, а для $u < u_1$ — четырьмя (η_{s1} и η_{s1}^* отсутствуют). Для любых скоростей потока, как и при выполнении соотношения $u > u_2^0$, область $x > (u + u_1^0)t$ покрыта только упругими волнами η_{s2}^* . В области $(u + u_2^0)t < x < (u + u_1^0)t$ на них накладываются волны η_{s2} . При $(u + u_1)t < x < (u + u_2^0)t$ волновая картина формируется из трех волн η_{s2} , η_{s2}^* , η_{s4} . Причем передние фронты волн η_{s2} , η_{s2}^* движутся быстрее, чем передний фронт η_{s4} . Поэтому η_{s4} отстает от них, и в области $ut < x < (u + u_1)t$ имеют место только внутренние волны η_{s4} . Сразу же после прохождения через фиксированную границу заднего фронта η_{s4} появляются η_{s3} . Они и занимают область $x < ut$ если $u < u_1$. При $u_1 < u < u_2^0$ за η_{s3} заданной границы достигают η_{s1} , η_{s1}^* , которые наблюдаются в области $x < (u - u_1)t$. Для $u_2^0 < u < u_1^0$ эти три системы волн занимают не всю область $x < (u - u_1)t$, а только ее часть $(u - u_2^0)t < x < (u - u_1)t$. Область же $x < (u - u_2^0)t$ покрыта волнами η_{s1} и η_{s1}^* . В случае $u > u_1^0$ они в свою очередь занимают только часть этой области $(u - u_1^0)t < x < (u - u_2^0)t$. Замыкает же волновой процесс при $u > u_1^0$ упругая волна η_{s1}^* , покрывающая область $x < (u - u_1^0)t$.

Вычислим теперь η_s для $x < 0$ (вверх по потоку).

Функция $M_1(r)$ при $u_1^0 > u$, $v^{-1} > (u_1^0 - u)$ имеет одну стационарную точку $r = r_1^*$. Если $u < u_1$, $(u_1 - u) < v^{-1} < (u_1^0 - u)$ или $u_1 < u < u_1^0$, $v^{-1} < (u_1^0 - u)$, то у нее есть две стационарные точки $r = r_1^*$, $r = r_1$. При аналогичных условиях стационарные точки функции $M_2(r)$ отличаются

от стационарных точек $M_1(r)$ только знаками. Значение r_1^* для $x > 0$ отличается от r_1^* для $x < 0$. Равны они только при $u = 0$. Распределение действительных корней уравнений $M_3'(r) = 0$ и $M_4'(r)$ по u и v такое же, что и в случае битого льда при $x < 0$. На основании этого найдем для ζ_s вверх по потоку выражение (8.9), если $u > u_1^0$. При других значениях u вид ζ_s вверх по потоку зависит от соотношения величин u_1 и u_2^0 . Для $u_1 < u_2^0$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s1}^*, & x > -(u_1^0 - u)t \\ \eta_{s1}^*, & x < -(u_1^0 - u)t \end{cases} \text{ при } u_2^0 < u < u_1^0, \quad (8.22)$$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s3}, & x > -(u_2^0 - u)t \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^*, & -(u_1^0 - u)t < x < -(u_2^0 - u)t \\ \eta_{s1}^*, & x < -(u_1^0 - u)t. \end{cases} \text{ при } u_1 < u < u_2^0, \quad (8.23)$$

При $u < u_1$ в области $x < -(u_2^0 - u)t$ вверх по потоку ζ_s определяется как и в формуле (8.23), а в области $x > -(u_2^0 - u)t$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s3}, & x > -(u_1 - u)t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^* + \eta_{s3}, & -(u_2^0 - u)t < x < -(u_1 - u)t. \end{cases} \quad (8.24)$$

Если же $u_1 > u_2^0$, то для $u_1 < u < u_1^0$ справедливо выражение (8.22), а при $u_2^0 < u < u_1$

$$\zeta_s = \begin{cases} O(x^{-2}), & x > -(u_1 - u)t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s1}^*, & -(u_1^0 - u)t < x < -(u_1 - u)t, \\ \eta_{s1}^*, & x < -(u_1^0 - u)t. \end{cases} \quad (8.25)$$

В случае $u < u_2^0 < u_1$ поверхность лед-вода и граница раздела слоев в области $x < -(u_1 - u)t$ вверх по потоку такие же, как и в формуле (8.25), а при $x > -(u_1 - u)t$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s3}, & x > -(u_2^0 - u)t, \\ O(x^{-2}), & -(u_1 - u)t < x < -(u_2^0 - u)t. \end{cases} \quad (8.26)$$

Анализируя выражения (8.22) – (8.26), видим, что в море, покрытом сплошным льдом, в случае $u_1 < u_2^0$, $u_2^0 < u < u_1^0$ внутренние волны, затухающие как $|x|^{-1/2}$, отсутствуют вверх по потоку. Нет их вверх по потоку и для $u_1 > u_2^0$, $u_2^0 < u < u_1^0$. Аналогичное явление при условии

$u_2^0 < u < u_1^0$ имеет место и в море со свободной поверхностью или покрытом битым льдом, что видно из (8.10). Если же $u > u_1$, то вверх по потоку есть только волны, затухающие с расстоянием от эпицентра возмущений как x^{-2} .

Пусть волны генерируются давлениями

$$p = p_0 f(x) \delta(t - t_0), \quad t_0 > 0, \quad (8.27)$$

действующими в течение малого промежутка времени над участком поверхности ледяного покрова. Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция. Потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 скоростей генерируемого волнового движения определим аналогично предыдущему из уравнений (7.30) и условий (7.4) при $t = 0$, (8.2) при $z = 0$, а также

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H_2, \quad \mathcal{L} \zeta_1 + \rho_1 \mathcal{L}_1 \phi_1 = -p \quad \text{при } z = H_1. \quad (8.28)$$

В результате найдем в случае битого льда формулы (8.4)–(8.8) для ζ_s вниз по потоку и формулы (8.8)–(8.11) вверх по потоку. Если лед сплошной, то вниз по потоку ζ_s определяется выражениями (8.12)–(8.21), а вверх по потоку – выражениями (8.22)–(8.26). В этих формулах

$$\begin{aligned} F_{1n} &= f_n(l_2 - \gamma_n l_1), \quad F_{1n} = f_n \gamma_n \text{th} r H_2 \text{ch}^{-1} r H_1, \\ f_n &= r g f^*(r) [b \tau_n (\gamma_1 - \gamma_2)]^{-1}, \quad n = 1, 2, \quad a = p_0 / \rho_1 g, \\ \theta_k &= |x| M_k(r_k) - \frac{3}{4} \pi, \quad k = 1, 3; \quad \theta_k = |x| M_k(r_{k-1}) - \frac{\pi}{2}, \quad k = 2, 4; \\ \theta_k^* &= |x| M_k(r_1^*) - (-1)^k \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

а все остальные обозначения прежние.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ поток двухслойной жидкости не возмущен ($\phi_1 = \phi_2 = 0$), а поверхность лед-вода и граница раздела слоев имеют вид

$$\zeta_1 = c_1 f_1(x), \quad \zeta_2 = c_2 f_2(x). \quad (8.29)$$

Решая уравнения (7.30) с указанными начальными и граничными условиями (8.2), где $\partial \phi_2 / \partial z = 0$ при $z = -H_2$, получим методом интегральных преобразований для ζ_s формулы (8.4)–(8.8), (8.9)–(8.11), (8.12)–(8.16), (8.17)–(8.21), (8.22)–(8.26) при выполнении соответствующих условий. В этих формулах

$$\begin{aligned} F_{1n} &= -f_3(r) [c_1 f_1^*(r) (l_2 \psi_0 \text{th}^{-1} r H_1 - \gamma_n b) - c_2 f_2^*(r) l_2 \text{sh}^{-1} r H_1], \\ F_{2n} &= -f_3(r) [c_1 f_1^*(r) r g D_0 \gamma \text{th} r H_2 \text{ch}^{-1} r H_1 - c_2 f_2^*(r) (r g D_0 l_1 - \gamma_n b)], \\ f_3 &= [b(\gamma_1 - \gamma_2)]^{-1}, \quad a = 1, \quad n = 1, 2, \end{aligned}$$

$f_1^*(r)$ и $f_2^*(r)$ – преобразование Фурье функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, а все другие обозначения те же, что и в случае импульсных смещений участка дна бассейна.

Таким образом, характер волнового движения, вызываемого в потоке двухслойной жидкости, покрытой льдом, импульсными смещениями (8.1) участка дна бассейна, импульсными давлениями (8.27) и начальными отклонениями (8.29) поверхности лед-вода и границы раздела слоев от невозмущенного состояния, не зависит от вида возмущений. Он определяется только соотношением между скоростью потока и величинами u_1 и u_2^0 .

Каждый из рассмотренных генераторов возбуждает одинаковое число затухающих как $1/\sqrt{|x|}$ волн, скорости передних и задних фронтов которых для этих видов возмущений одни и те же. Отличаются волны только амплитудами. Наличие потока приводит к смещению волнового возмущения по сравнению со случаем отсутствия потока. Вниз по потоку от эпицентра при любых значениях u наблюдаются поверхностные, внутренние и упругие волны, в то время как вверх по потоку в зависимости от u может либо вообще не быть волн, затухающих с расстоянием как $1/\sqrt{|x|}$, либо есть только поверхностные гравитационные и упругие волны.

8.2. Неустановившиеся волны от периодических поверхностных давлений в море с битым льдом

Пусть двухслойная идеальная несжимаемая жидкость, текущая в положительном направлении оси x , покрыта битым льдом ($E = 0$). Верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний – толщину H_2 и плотность ρ_2 . Лед плавает вместе с потоком со скоростью u . Начиная с момента времени $t = 0$ к поверхности ледяного покрова прикладываются периодические давления

$$p = p_0 f(x) \exp(i\sigma t). \quad (8.30)$$

Проведем анализ процесса развития волнового движения, предполагая, что в начальный момент времени потока не возмущен, а поверхность лед-вода ζ_1 и граница раздела слоев ζ_2 горизонтальны [22]. Задача заключается в решении уравнений (7.30) с условиями (8.2) при $z = 0$, (7.4) при $t = 0$, (8.28) при $z = H_1$ и $z = -H_2$. При этом в (8.28) следует положить $E = 0$ (лед битый), что приводит к $\mathcal{L} = \chi \mathcal{L}_3 + \rho_1 g$. Определяя $\phi_{1,2}$ из (7.30) и удовлетворяя указанным начальным и граничным условиям, получим методом интегральных преобразований с учетом кинематических условия (8.3)

$$\zeta_s = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} r f^*(r) K_s e^{irx} dr, \quad K_s = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{d_s}{(\alpha-i\sigma)\Delta(r,\alpha)} e^{\alpha t} d\alpha, \quad (8.31)$$

$$d_1 = F^2 l_1 + l_2, \quad d_2 = F^2 \gamma \text{thr} H_2 \text{ch}^{-1} r H_1, \quad a = -p_0 / \rho_1,$$

$$\Delta = b F^4 + b_1 F^2 + b_2, \quad F = \alpha + iur, \quad b = \chi_1 r g l_1 + l_3,$$

$$b_1 = r g (l_1 D_0 + \varepsilon \psi_0 \text{thr} H_2), \quad b_2 = r g D_0 l_2, \quad \varepsilon = 1 - \gamma,$$

$$l_1 = \text{thr} H_1 + \gamma \text{thr} H_2, \quad l_2 = \varepsilon r g \text{thr} H_2 \text{thr} H_1,$$

$$l_3 = 1 + \gamma \text{thr} H_1 \text{thr} H_2, \quad \psi_0 = 1 + \chi_1 r g \text{thr} H_1, \quad \chi_1 = \frac{\chi}{\rho_1 g}, \quad D_1 = 1.$$

После вычисления интегралов Меллина

$$\zeta_s = \sum_{k=1}^5 J_{sk}, \quad J_{sk} = a_1 \int_{L_5} \frac{F_{s5}}{\prod_{k=1} \Delta_k} r f^*(r) e^{irx} dr \cdot e^{i\sigma t}, \quad (8.32)$$

$$J_{sk} = \begin{cases} a_2 \int_{L_k} \frac{F_{s1}}{\Delta_k} f_1(r) \exp(i|x|M_k) dr, & k=1,2, \\ a_2 \int_{L_k} \frac{F_{s2}}{\Delta_k} f_2(r) \exp(i|x|M_k) dr, & k=3,4, \end{cases}$$

$$F_{11} = l_2 - \gamma_1 l_1, \quad F_{12} = l_2 - \gamma_2 l_1, \quad F_{21} = \gamma_1 \text{thr} H_2 \text{ch}^{-1} r H_1,$$

$$F_{22} = \gamma_2 \text{thr} H_2 \text{ch}^{-1} r H_1, \quad f_{1,2}(r) = r f^*(r) [2(\gamma_1 - \gamma_2) \tau_{1,2}]^{-1},$$

$$\Delta_{1,2} = \sigma + ur \mp \tau_1, \quad \Delta_{3,4} = \sigma + ur \mp \tau_2, \quad F_{15} = l_2 - (\sigma + ur)^2 l_1,$$

$$F_{25} = (\sigma + ur)^2 \text{thr} H_2 \text{ch}^{-1} r H_1, \quad M_{1,2} = -(ur \mp \tau_1) v + r \text{sign} x,$$

$$M_{3,4} = -(ur \mp \tau_2) v + r \text{sign} x, \quad v = t/|x|, \quad \tau_{1,2} = \sqrt{\gamma_{1,2}},$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2} b_1 b^{-1} [1 \pm (1 - 4 b b_2 b_1^{-2})^{1/2}], \quad a_1 = (-1)^s j a / \sqrt{2\pi}, \quad s=1,2,$$

$$j = \begin{cases} -1 & \text{при } k=2,3,5, \\ 1 & \text{при } k=1,4 \end{cases}$$

В интеграле J_{15} за путь интегрирования взят контур L_5 , идущий вдоль действительной оси, обходя вещественные корни уравнения $\Delta_k = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\text{Re}(i\Delta_k) > 0$. Контур L_k ($k=1-4$) обходит точки, где $\Delta_k = 0$. Такой обход полюсов подынтегральных функций обеспечивает стремление к нулю интегралов J_{sk} ($k=1-4$) при $t \rightarrow \infty$ для заданного x .

Рассмотрим случай $\sigma < \chi_1^{-1/2}$. Тогда уравнения $\Delta_{2,4} = 0$ имеют при любых скоростях потока только по одному вещественному корню

$r = -\alpha_2$ и $r_{10} = -\alpha_{10}$. Число же корней уравнений $\Delta_{1,3} = 0$ зависит от u , что иллюстрируется табл.8.1, где

$$\begin{aligned} u_k &= \psi_k(\beta_k), \quad k=1,4, \quad \psi_1 = (\tau_1 - \sigma)r^{-1}, \quad \psi_4 = (\tau_2 - \sigma)r^{-1}, \\ \alpha_2 &> \alpha_5 > \alpha_7 > \alpha_8 > \alpha_6 > \alpha_1 > 0, \quad \alpha_{10} > \alpha_7, \quad \alpha_8 > \alpha_9, \\ \alpha_2 &> \alpha_{10} > \alpha_9 > \alpha_1, \quad u_1 > u_4, \end{aligned} \quad (8.33)$$

$\beta_{1,4} > 0$ корни уравнений $\psi'_{1,4}(r) = 0$, штрих означает производную по r . Вычислим интегралы (8.32) в каждом конкретном случае, имея в виду, что точки $r = -\alpha_k$, $k = 1, 2, 9, 10$ и $r = \alpha_{5,7}$ обходятся по малым полуокружностям в нижней, а точки $r = \alpha_{6,8}$ в верхней полуплоскостях.

Пусть $u < u_4$, $x > 0$. Вычисляя интегралы J_{s5} методом контурного интегрирования, найдем при больших значениях x вниз по потоку

$$\begin{aligned} J_{s5} &= \sum_k \eta_{sk}, \quad k = 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10, \\ \eta_{sk} &= \begin{cases} (-1)^{k+s} A(r_k) B_{s1}(r_k) V_k^{-1} \sin \theta_k, & k = 1, 2, 5, 6, \\ (-1)^{k+s} A(r_k) B_{s2}(r_k) V_k^{-1} \sin \theta_k, & k = 7, 8, 9, 10, \end{cases} \\ \theta_k &= \begin{cases} \alpha_k |x| - \sigma t, & k = 1, 2, 9, 10, \\ \alpha_k |x| + \sigma t, & k = 6, 8, \\ -(\alpha_k |x| + \sigma t), & k = 5, 7, \end{cases} \\ A &= a \sqrt{\frac{\pi r f^*(r)}{2 \gamma_1 - \gamma_2}}, \quad B_{s1} = \frac{F_{s1}}{\tau_1}, \quad B_{s2} = \frac{F_{s2}}{\tau_2}, \\ V_{2,5} &= u - \tau'_1(\alpha_{2,5}), \quad V_{7,10} = u - \tau'_2(\alpha_{7,10}), \quad V_6 = \tau'_1(\alpha_6) - u, \\ V_1 &= u + \tau'_1(\alpha_1), \quad V_9 = u + \tau'_2(\alpha_9), \quad V_8 = \tau'_2(\alpha_8) - u, \\ V_1 &> V_2 > V_5 > 0, \quad V_1 > V_9 > V_{10} > V_7 > 0, \quad V_9 > V_2, \quad V_6 > V_8 > 0. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Таблица 8.1.

u	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	σ
$u < u_4$	$-\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6$	$-\alpha_2$	$-\alpha_9, \alpha_1, \alpha_8$	$-\alpha_{10}$	$\sigma < \frac{1}{\sqrt{\chi_1}}$
$u_4 < u < u_1$	$-\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6$	$-\alpha_2$	$-\alpha_9$	$-\alpha_{10}$	
$u > u_1$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_9$	$-\alpha_{10}$	
$u < u_1$	$-\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6$	$-\alpha_2$	$-\alpha_9$	$-\alpha_{10}$	$\sigma > \frac{1}{\sqrt{\chi_1}}$
$u > u_1$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	$-\alpha_9$	$-\alpha_{10}$	

Теперь найдем асимптотическое выражение интеграла J_{s1} . Условие $\text{Re}(iM_1) \leq 0$ для $vV_5 > 1$ выполняется на L_1 , а при $V_5 < v^{-1} < V_1$ на контуре L_1^* , совпадающем с L_1 всюду, кроме окрестности точки $r = \alpha_5$, которую L_1^* обходит по малой полуокружности в верхней полуплоскости.

Для $vV_1 < 1$ указанное условие имеет место на контуре $\bar{L}_1$, идущем вдоль L_1 , но обходящем точки $r = \alpha_1$ и $r = \alpha_5$ сверху. Заменяя при $V_5 < v^{-1} < V_1$ и $vV_1 < 1$ интегрирование по контуру L_1 интегрированием по L_1^* и $\bar{L}_1$ с добавлением соответствующих вычетов и применяя метод стационарных фаз, получим

$$J_{s1} = \begin{cases} -(\eta_{s1} + \eta_{s5}), & x > V_1 t, \\ -\eta_{s5}, & V_5 t < x < V_1 t, \\ O(1/\sqrt{x}), & x < V_5 t. \end{cases}$$

Определяя аналогичным образом асимптотические выражения J_{sk} , $k = 2, 3, 4$ и подставляя J_{sk} в (8.34), найдем

$$\zeta_s = \begin{cases} O(1/\sqrt{x}), & x > V_1 t, \\ \eta_{s1}, & V_9 t < x < V_1 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9}, & V_{10} t < x < V_9 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10}, & V_2 t < x < V_{10} t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10} + \eta_{s2}, & V_5 t < x < V_2 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10} + \eta_{s2} + \eta_{s5}, & V_7 t < x < V_5 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10} + \eta_{s2} + \eta_{s5} + \eta_{s7}, & x < V_7 t, \end{cases} \quad (8.35)$$

если $V_7 < V_5$, $V_2 < V_{10}$. Если же $V_7 > V_5$ и $V_5 < V_{10} < V_2$, то в областях $x > V_9 t$ и $x < V_5 t$ вид ζ_s определяется формулой (8.35), а при $V_5 t < x < V_9 t$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s9}, & V_2 t < x < V_9 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s2}, & V_{10} t < x < V_2 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s2} + \eta_{s10}, & V_5 t < x < V_{10} t. \end{cases} \quad (8.36)$$

В случае $V_7 < V_5$ и $V_5 > V_{10}$ для ζ_s в областях $x < V_7 t$ и $x > V_9 t$ справедлива формула (8.35), при $V_2 t < x < V_9 t$ – формула (8.36), а при $V_7 < x < V_2 t$ верно выражение

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s2}, & V_5 t < x < V_2 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s2} + \eta_{s5}, & V_{10} t < x < V_5 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s2} + \eta_{s5} + \eta_{s10}, & V_7 t < x < V_{10} t. \end{cases} \quad (8.37)$$

При $V_5 < V_7 < V_2$, $V_{10} > V_2$ вид ζ_s для $x > V_2 t$ найдем из (8.35), а для $x < V_2 t$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10} + \eta_{s2}, & V_5 t < x < V_2 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10} + \eta_{s2} + \eta_{s7}, & V_2 t < x < V_7 t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10} + \eta_{s2} + \eta_{s7} + \eta_{s5}, & x < V_5 t. \end{cases} \quad (8.38)$$

При выполнении условий $V_5 < V_7 < V_2$, $V_{10} < V_2$ выражение ζ_s в областях $x > V_9t$, $x < V_7t$ определим соответственно из (8.35), (8.38), в областях $V_2t < x < V_9t$ и $V_{10}t < x < V_2t$ – из (8.36), а для $V_7t < x < V_{10}t$

$$\zeta_s = \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s2} + \eta_{s10}.$$

Если $V_7 > V_2$, то выражение ζ_s для $x > V_{10}t$ также найдем из (8.35), при $x < V_5t$ – из (8.38), а при $V_5t < x < V_{10}t$

$$\zeta_s = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10}, & V_7t < x < V_{10}t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10} + \eta_{s7}, & V_2t < x < V_7t, \\ \eta_{s1} + \eta_{s9} + \eta_{s10} + \eta_{s7} + \eta_{s2}, & V_5t < x < V_2t. \end{cases}$$

Пусть $u_4 < u < u_1$, $x > 0$. В этом случае по поверхности лед-вода и границе раздела слоев движется по пять систем незатухающих с расстоянием волн η_{sk} , $k = 1, 2, 5, 9, 10$. Каждая из них занимает область $x < V_kt$.

Пусть $u > u_1$, $x > 0$. В этом случае образуются четыре системы незатухающих волн η_{sk} , $k = 1, 2, 9, 10$, находящиеся в областях $x < V_kt$ соответственно.

Таким образом, при $\sigma < 1/\sqrt{\chi_1}$ и $x > 0$ периодические давления (8.30) в зависимости от скорости потока могут генерировать в двухслойном море, покрытом битым льдом, пять или шесть систем незатухающих с расстоянием волн η_{sk} . Волны η_{sk} при $k = 1, 2, 9, 10$ бегут вниз, а при $k = 5, 7$ – вверх по потоку. Из них η_{s1} , η_{s2} , η_{s5} – поверхностные, а η_{s7} , η_{s9} , η_{s10} – внутренние. Причем η_{sk} для $k = 2, 5, 7, 10$ обусловлены исключительно наличием потока. Фазовые скорости и длины волн равны соответственно

$$v_k = \frac{\sigma}{\alpha_k}, \quad \lambda_k = \frac{2\pi}{\alpha_k}, \quad (8.39)$$

а их передние фронты перемещаются вниз по потоку со скоростями V_k . Увеличение скорости потока для фиксированных h и σ ведет к росту λ_k и v_k . При этом λ_5 , v_5 и λ_7 , v_7 не могут быть больше $2\pi/\beta_1$, u_1 и $2\pi/\beta_4$, u_4 соответственно. Кроме того,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \lambda_k &= \lambda_k^0, \quad \lim_{u \rightarrow 0} v_k = v_k^0, \quad k = 1, 9, \\ \lim_{u \rightarrow 0} \lambda_k &= 0, \quad \lim_{u \rightarrow 0} v_k = 0, \quad k = 2, 5, 7, 10, \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \lambda_k &= \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} v_k = \infty, \quad k = 1, 2, 9, 10. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Здесь $\lambda_1^0 = 2\pi/\alpha_1^0$, $\nu_1^0 = \sigma/\alpha_1^0$, $\lambda_9^0 = 2\pi/\alpha_9^0$, $\nu_9^0 = \sigma/\alpha_9^0$ – длины и фазовые скорости волн η_{s1} , η_{s9} при отсутствии потока, α_1^0 и α_9^0 – положительные корни уравнений $\tau_1 = \sigma$ и $\tau_2 = \sigma$. В дальнейшем верхний индекс нуль также будет обозначать отсутствие потока.

Скорости передних фронтов V_1 , V_9 волн η_{s1} , η_{s9} растут с увеличением u . Причем $\lim_{u \rightarrow 0} V_{1,9} = V_{1,9}^0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} V_{1,9} = \infty$.

Вверх по потоку от области приложения возмущений ($x < 0$)

$$\zeta_s = \begin{cases} O(1/\sqrt{|x|}), & x < -V_6 t, \\ \eta_{s6}, & -V_6 t < x < -V_8 t, \\ \eta_{s6} + \eta_{s8}, & x > -V_8 t, \end{cases} \quad (8.41)$$

если $u < u_4$ и

$$\zeta_s = \begin{cases} O(1/\sqrt{|x|}), & x < -V_6 t, \\ \eta_{s6}, & x > -V_6 t, \end{cases} \quad (8.42)$$

если $u_4 < u < u_1$. Здесь η_{sk} и V_k , $k = 6, 8$ определяются формулами (8.34). При $u > u_1$ вверх по потоку

$$\zeta_s = O(1/\sqrt{|x|}). \quad (8.43)$$

Из (8.41) – (8.43) следует, что в области $x < 0$ незатухающие волны либо вообще не генерируются, либо возникает поверхностная η_{s6} или поверхностная η_{s6} и внутренняя η_{s8} системы волн. Они бегут вверх по потоку с фазовыми скоростями $\nu_{6,8}$ (см. (8.39)). Передние фронты волн имеют скорость V_6 и V_8 . Для фиксированных h и σ величины λ_k , ν_k , V_k , $k = 6, 8$ убывают, если u растет в интервалах $0 < u < u_1$ для η_{s6} и $0 < u < u_4$ для η_{s8} . При этом λ_6 и λ_8 изменяются в пределах

$$\frac{2\pi}{\beta_1} < \lambda_6 < \frac{2\pi}{\alpha_6^0}, \quad \frac{2\pi}{\beta_4} < \lambda_8 < \frac{2\pi}{\alpha_8^0}, \quad (8.44)$$

а ν_6 , V_6 и ν_8 , V_8 – в пределах

$$\frac{\sigma}{\beta_1} < \nu_6 < \frac{\sigma}{\alpha_6^0}, \quad \frac{\sigma}{\beta_4} < \nu_8 < \frac{\sigma}{\alpha_8^0}, \quad [\tau_1(\beta_1) - u_1] < V_6 < V_6^0, \quad [\tau_2(\beta_4) - u_4] < V_8 < V_8^0. \quad (8.45)$$

Отметим, что $\alpha_1^0 = \alpha_6^0$, $\alpha_9^0 = \alpha_8^0$.

Пусть теперь $\sigma > 1/\sqrt{\chi_1}$. При таких частотах уравнения $\Delta_k = 0$ ($k = 2, 3, 4$) имеют для любых скоростей потока только по одному веще-

ственному корню. Уравнение же $\Delta_1 = 0$ при $u > u_1$ имеет один, а при $u < u_1$ – три корня (табл.8.1). Проведя вычисление интегралов J_{sk} получим в этом случае для ζ_s вниз по потоку при $u > u_1$ те же формулы, что и в случае $\sigma < 1/\sqrt{\chi_1}$. Вверх по потоку при $u > u_1$ незатухающие волны не генерируются. В случае $u < u_1$ вид ζ_s вниз и вверх по потоку определяется формулами, полученными при $\sigma < 1/\sqrt{\chi_1}$, $u_4 < u < u_1$ для $x > 0$ и $x < 0$.

Если волны короткие, то

$$\frac{\varepsilon g}{4\sigma(1+\gamma)} = \begin{cases} u_4 & \text{при } h < h_0, \\ u_1 & \text{при } h > h_0, \end{cases} \quad (8.46)$$

где $h_0 = 2\gamma\rho_1 g[4\rho\sigma^2(1+\gamma)]^{-1}$. Значение же u_4 для $h > h_0$ и u_1 для $h < h_0$ найдем по формуле

$$\left[\left(\frac{\beta_0 g}{1+\chi_1 g \beta_0} \right)^{1/2} - \sigma \right] \beta_0^{-1},$$

где β_0 – действительный корень уравнения

$$\begin{aligned} \beta^3 + \chi_2 \beta^2 + \chi_3 \beta + \chi_4 &= 0, \\ \chi_2 &= (g - 3\sigma^2 \chi_1^0) / \chi_5, \quad \chi_3 = (g - 12\sigma^2 \chi_1^0) / (4\chi_1^0 \chi_5), \\ \chi_4 &= -\sigma^2 / (\chi_1^0 \chi_5), \quad \chi_5 = \chi_1^0 (g - \sigma^2 \chi_1^0), \quad \chi_1^0 = \chi_1 g. \end{aligned}$$

При отсутствии льда для коротких волн $u_1 = g / (4\sigma)$, $u_4 = \varepsilon g [4\sigma(1+\gamma)]^{-1}$.

Для количественной оценки влияния ледяного покрова и скорости потока на элементы волн проводились численные расчеты при

$$\varepsilon = 10^{-2}, \quad H_1 = 10^2 \text{ м}, \quad H_2 = 10^3 \text{ м}, \quad h \leq 20 \text{ м}. \quad (8.47)$$

Скорость потока изменялась при этом в пределах $0 < u < u_1$.

Анализ результатов численных расчетов показал, что на любой фиксированной частоте лед толщиной $h < h_0$ фактически не влияет на u_4 , обусловленное неоднородностью жидкости. Влияние же льда на u_1 при $h < h_0$ заметно только на частотах $\sigma > 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, что иллюстрируется табл. 8.2. При $h > h_0$, наоборот, u_1 не зависит от толщины льда, а u_4 с ростом h уменьшается, хотя и незначительно. Для значений (8.47) частоте $\sigma = 0.5 \text{ с}^{-1}$ отвечает $h_0 = 11.27 \text{ м}$.

Ледяной покров при любых σ не оказывает заметного влияния на волны η_{s8} , η_{s9} . Влияние льда на длины, фазовые скорости и скорости

передних фронтов поверхностных волн начинает проявляться лишь на частотах $\sigma > 5 \cdot 10^{-2}$. Оно сказывается в увеличении V_2 , $v_{2,5}$, $\lambda_{2,5}$ и уменьшении $\lambda_{1,6}$, $v_{1,6}$, $V_{1,6}$. Скорость же V_5 в зависимости от величины u может как возрастать, так и убывать с увеличением толщины льда.

Таблица 8.2.

$\begin{matrix} h, \text{м} \\ u, \text{м/с} \end{matrix}$	0	1	2	5	10	15	$10 \cdot \sigma \text{с}^{-1}$
u_1	44.78	44.73	44.69	44.53	44.28	44.03	0.5
$10 u_4$	2.465	2.465	2.465	2.465	2.465	2.465	
u_1	24.52	24.43	24.35	24.09	23.68	23.28	1
$10 u_4$	1.232	1.232	1.232	1.232	1.232	1.232	
u_1	4.905	4.503	4.153	3.297	2.264	0.246	5
$10 u_4$	0.246	0.246	0.246	0.246	0.246	0.240	

Влияние льда на волны η_{s7} , η_{s10} сказывается только в случае, если их длины больше $\pi \chi_1 g \epsilon \gamma^{-1}$. Для фиксированных h и σ это возможно при скоростях потока $0 < u < \bar{u}_4$. Здесь

$$\bar{u}_4 = \frac{\sqrt{2\gamma g} \mp \sigma \sqrt{(1+\gamma)g\chi_1}}{2\gamma \sqrt{(1+\gamma)g\chi_1}} g \epsilon \chi_1,$$

верхний знак относится к η_{s7} , а нижний – к η_{s10} . Для волн η_{s10} при $h = 10$ м, $\sigma (\text{с}^{-1})$, равных 0.1 и 0.2, величина $\bar{u}_4$ равна соответственно 0.35 u_4 и 0.85 u_4 . Другими словами, на волны η_{s7} , η_{s10} влияет только лед толщиной $h > h_0$. Он увеличивает значения $V_{7,10}$, $v_{7,10}$. Рис. 8.1 – 8.3 иллюстрируют количественную зависимость фазовых скоростей и скоростей передних фронтов (м/с) от скорости потока и толщины льда при значениях (8.47) и $\sigma = 0.3 \text{с}^{-1}$. Сплошные линии соответствуют $h = 0$, а штриховые – $h = 10$ м. На этих рисунках

$$u_j^+ = u_j \quad (h = 0), \quad u_j^* = u_j \quad (h = 10), \quad j = 1, 4,$$

$$u_4^+ \approx u_4^* \approx 4.1 \cdot 10^{-2}, \quad u_1^* \approx 8.17, \quad u_1^+ = 6.11.$$

Видно, что фазовые скорости волн η_{sk} при $k = 1, 6, 8, 9$ больше, чем скорости их передних фронтов. Передние же фронты волн η_{sk} при $k = 2, 10$ движутся со скоростями большими фазовых. Что касается волн η_{s5} , η_{s7} , то их фазовые скорости могут быть как больше, так и меньше скоростей передних фронтов. Это определяется величиной скорости потока. Причем, если все v_k и V_k ($k = 1, 2, 6, 8, 10$) монотонно изменяются с изменением u , то $V_{5,7}$ имеют по максимуму. В море, покрытом битым

льдом, они достигаются при меньших значениях u , чем в море со свободной поверхностью. При $u \rightarrow u_1$ скорости v_5 , V_5 стремятся соответственно к v_6 , V_6 а при $u \rightarrow u_4$ скорости v_7 , V_7 к v_8 , V_8 . Возникающие на поверхности лед-вода и границе раздела слоев поверхностные волны находятся в одинаковой фазе, а внутренние – в противоположной.

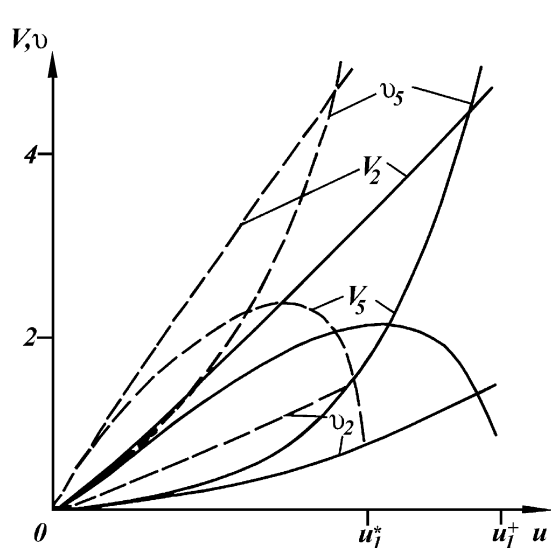


Рис. 8.1

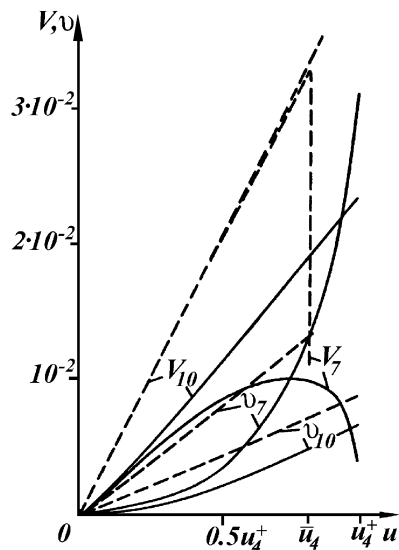


Рис. 8.2

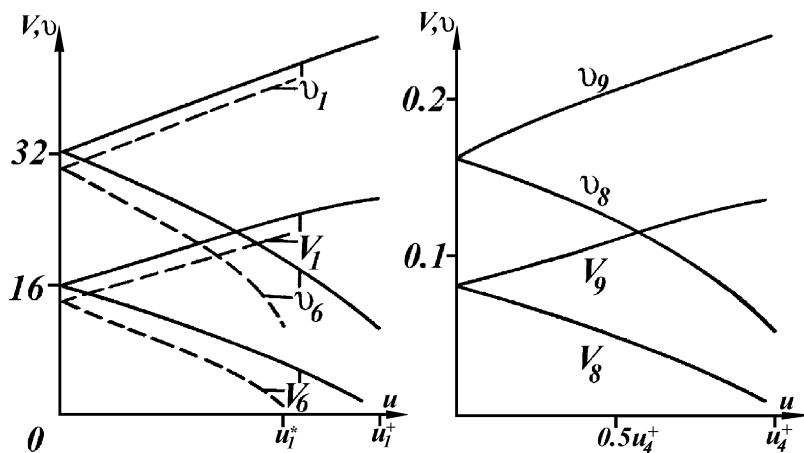


Рис. 8.3

8.3. Волны от периодических возмущений в море с упругим сплошным ледяным покровом

Пусть теперь двухслойная идеальная несжимаемая жидкость конечной глубины H покрыта сплошным упругим льдом. Жидкость течет в положительном направлении оси x с постоянной скоростью u . Ледяной покров плывет вместе с потоком. В начальный момент времени поток не возмущен, а ледяной покров и граница раздела слоев горизонтальны. Начиная с момента времени $t = 0$ к поверхности ледяного покрова прикладываются периодические давления (8.30). Рассмотрим влияние упругих сил льда, моделируемого тонкой упругой пластинкой, на генерируемое волновое движение. Для этого решим уравнения (7.30) с условиями (8.3) при $z = 0$, (8.28) при $z = -H_2$ и $z = H_1$, (7.4) при $t = 0$, имея в виду кинематические условия (8.3) на поверхности лед-вода ζ_1 и на границе раздела слоев ζ_2 . Здесь H_1 – толщина верхнего, а H_2 – нижнего слоев. Решая задачу методом интегральных преобразований Фурье по x и Лапласа по t , найдем [62] для $\zeta_{1,2}$ формулы (8.31), а после вычисления интегралов Меллина формулы (8.32) с той лишь разницей, что $D_0 = 1 + D_1 r^4$. Как и в предыдущем параграфе, контур интегрирования L_5 интеграла J_{s5} идет вдоль действительной оси, обходя вещественные корни уравнений $\Delta_k = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\text{Re}(i\Delta_k) > 0$. Каждый из контуров L_k ($k = 1 - 4$) обходит только точки, где $\Delta_k = 0$. Число корней уравнения $\Delta = 0$ (полюсов подынтегральных функций) определяется частотой колебаний, скоростью потока, упругими силами льда и неоднородностью жидкости. При любых σ и u уравнение $\Delta_4 = 0$ имеет как и в случае битого льда (предыдущий параграф) только один отрицательный корень $r_{10} = -\alpha_{10}$. Уравнение $\Delta_3 = 0$ для любых σ и $u < u_4$ имеет три действительных корня $r_7 = \alpha_7$, $r_8 = \alpha_8$, $r_9 = -\alpha_9$, а при $u < u_4$ только один $r_9 = -\alpha_9$. Не зависит от частоты и число вещественных корней уравнения $\Delta_2 = 0$. При $u < u_3$ у этого уравнения вещественных корней нет, а для $u > u_3$ есть два отрицательных $-r_3 = -\alpha_3$, $r_2 = -\alpha_2$. Число же корней уравнения $\Delta_1 = 0$ зависит от скорости потока и от частоты колебаний. Если $\sigma > \sigma_0$ то это уравнение при любых u имеет только один положительный и один отрицательный корни. Обозначим их при $\sigma_0 < \sigma < \sigma^*$ через $r_1 = -\alpha_1$, $r_6 = \alpha_6$ и $r_1 = -\alpha_1$, $r_4 = \alpha_4$, если $u < u_0^*$ и $u > u_0^*$ соответственно, а при $\sigma > \sigma^*$ – через $r_4 = \alpha_4$, $r_1 = -\alpha_1$. При $\sigma < \sigma_0$ корнями уравнения $\Delta_1 = 0$ будут α_4 , $-\alpha_1$ для $u > u_1$, α_6 , α_5 , α_4 , $-\alpha_1$ для $u_2 < u < u_1$ и α_6 , $-\alpha_1$ для $u < u_2$. Здесь

$$u_k = \psi_1(\beta_k), \quad k=1, 2, \quad u_k = \psi_k(\beta_k), \quad k=3, 4, \\ \psi_{1,3} = (\tau_1 \mp \sigma)r^{-1}, \quad \psi_4 = (\tau_2 - \sigma)r^{-1}, \quad \sigma_0 = \sigma_0^* - u_0 r_0,$$

$$\begin{aligned}\sigma_0^* &= \tau_1(r_0), \quad u = \tau_1'(r_0), \quad u_0^* = (\sigma^* - \sigma)r_0^{-1}, \\ \alpha_4 &> \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_{10} > \alpha_7 > \alpha_8 > \alpha_9 > \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > \alpha_5, \\ \alpha_4 &> \alpha_5 > \alpha_7 > \alpha_8 > \alpha_6 > \alpha_1,\end{aligned}$$

$r_0, \beta_{3,4}$ – положительные корни уравнений $\tau_1'(r) = 0, \psi'_{3,4}(r) = 0$ соответственно, $\beta_2 > \beta_1 > 0$ – корни уравнения $\psi_1'(r) = 0$, штрих означает производную по r . Корни r_3, r_4 обусловлены исключительно упругостью ледяного покрова, а r_k ($k = 7 - 10$) – плотностной неоднородностью жидкости. Отметим, что аналогичное распределение корней уравнений $\Delta_k = 0$ ($k = 1 - 4$) по частоте и скорости потока имеет место при исследовании гравитационно-капиллярных волн, генерируемых периодическими возмущениями (8.30) в потоке двухслойной жидкости [63].

Таким образом число корней уравнения $\Delta = 0$ определяется соотношением скорости потока u с величинами $u_k, k = 1 - 4$ и частоты колебаний σ с величинами σ_0, σ_0^* . Зависимость σ_0, σ_0^* от толщины сплошного льда, а u_0, u_0^*, u_k ($k = 1 - 3$) от h и σ при малых ε примерно такая же, как и в случае потока однородной жидкости (раздел 3.2). При значениях (1.15) наглядная иллюстрация функций $\sigma_0(h)$ для $H = 1100$ м дана на рис. 3.6, а $u_k(h), u_k(\sigma), k = 1-3$ для $H = 10^3$ м – на рис. 3.7. Влияние характеристик сплошного льда, для которого выполняется приближение тонких пластин, на u_4 фактически не сказывается. Величина u_4 определяется главным образом перепадом плотности жидкости. Кроме того,

$$\begin{aligned}u_1 &> u_2, \quad u_3 > u_2, \quad u_1 > u_4, \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_{1,4} &= \sqrt{gH} \left(\frac{1}{2} \pm \beta \right)^{1/2}, \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} u_{2,3} = \frac{\tau_1(\beta_5)}{\beta_5}, \\ \lim_{h \rightarrow 0} u_{2,3} &= 0, \quad \beta = \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon H_1 H_2}{H^2} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

и в зависимости от значений h, σ, ε выполняется одно из условий

$$\begin{aligned}u_2 &< u_3 < u_4 < u_1, \quad u_2 < u_4 < u_3 < u_1, \\ u_2 &< u_4 < u_1 < u_3, \quad u_4 < u_2 < u_1 < u_3, \quad u_4 < u_2 < u_3 < u_1.\end{aligned}$$

Здесь β_5 – положительный корень уравнения $r\tau_1' - \tau_1 = 0$, а неравенства $u_4 > u_3$ и $u_4 > u_2$ могут иметь место только при малых толщинах льда. В частности, для значений $H_1 = 10^2$ м, $H_2 = 10^3$ м, $E = 3 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 870$ кг/м³, $\mu = 0.34$, $\varepsilon = 10^{-2}$ и любых σ они не выполняются уже при $h \geq 2 \cdot 10^{-2}$ м. Для $h < 2 \cdot 10^{-2}$ м выполнение указанных неравенств зависит и от частоты колебаний. Например, при $h = 10^{-2}$ м они удовлетворяются только для $\sigma \leq 4 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹.

Проведем вычисление интегралов (8.32) методом контурного интегрирования с учетом расположения стационарных точек (корней урав-

нений $M'_k(r)=0$) относительно полюсов подынтегральных функции, имея в виду, что условия $\text{Re}(i\Delta_k) \geq 0$ выполняются на контуре, идущем вдоль действительной оси, но обходящем точки $r = -\alpha_k$ ($k = 1, 2, 9, 10$ и $r = \alpha_k$, $k = 5, 7$) по малым полуокружностям в нижней полуплоскости, а точки $r = -\alpha_3$ и $r = \alpha_k$ ($k = 4, 6, 8$) – в верхней. В результате получим, что незатухающие с расстоянием колебания ледяного покрова и поверхности раздела слоев формируются из нескольких волн вида

$$\zeta_{sk} = \begin{cases} (-1)^{k+s} A(r_k) B_{s1}(r_k) V_k^{-1} \sin \theta_k, & k = 1-6, \\ -(-1)^{k-s} A(r_k) B_{s2}(r_k) V_k^{-1} \sin \theta_k, & k = 7-10, \end{cases}$$

где

$$V_{3,4} = \tau'_1(\alpha_{3,4}) - u, \quad \theta_3 = -(\alpha_3|x| - \sigma t), \quad \theta = \alpha_4|x| + \sigma t,$$

а все остальные обозначения те же, что и в (8.34). Фазовые скорости и длины возникающих волн равны соответственно $v_k = \sigma / \alpha_k$, $\lambda_k = 2\pi / \alpha_k$. Число волн при заданном σ определяется соотношением скорости потока с величинами u_k , $k = 1-4$. Для $\sigma > \sigma_0^*$, это иллюстрируется табл. 8.3, а при $\sigma < \sigma_0$ – табл. 8.4, где приведены значения индекса k возникающих волн η_{sk} , $k = 1-10$ как вверх ($x < 0$), так и вниз ($x > 0$) по потоку. При $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$ волновое движение вниз по потоку формируется из тех же волн, что и для $\sigma > \sigma_0^*$ (см. табл. 8.3 при $x > 0$). Таблица 8.3 характеризует волновое движение при $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0^*$ и вверх по потоку, если $u > u_0^*$, а для $u < u_0^*$ в графе $x < 0$ этой таблицы следует заменить 4 на 6, так как при данных условиях генерируется волна η_{s6} .

Таблица 8.3.

u		$x > 0$					$x < 0$		
$u_3 > u_4$	$u < u_3$	1	2	9	10		4	3	
	$u_4 < u < u_3$	1	9	10			4		
	$u < u_4$	1	7	9	10		4	8	
$u_3 < u_4$	$u > u_4$	1	2	9	10		4	3	
	$u_3 < u < u_4$	1	2	7	9	10	4	3	8
	$u < u_3$	1	7	9	10		4	8	

Таким образом в сплошном ледяном покрове, а также на поверхности раздела слоев двухслойной жидкости с разрывом плотности вниз по потоку от области приложения возмущений в зависимости от σ и u может генерироваться от трех до шести незатухающих с расстоянием волн. Из них η_{s1} , η_{s2} , η_{s5} – гравитационные поверхностные волны, а η_{s7} , η_{s9} , η_{s10} – внутренние, обусловленные неоднородностью жидко-

сти. Вверх по потоку может возникнуть от одной до четырех незатухающих с расстоянием волн, из которых η_{s3} , η_{s4} чисто упругие, а η_{s6} и η_{s8} – поверхностные и внутренние гравитационные.

Таблица 8.4.

u		$x > 0$						$x < 0$			
$u_2 < u_4 < u_3 < u_1$	$u > u_1$	1	2	9	10			3	4		
	$u_3 < u < u_1$	1	2	5	9	10		3	4	6	
	$u_4 < u < u_3$	1	5	9	10			4	6		
	$u_2 < u < u_4$	1	5	7	9	10		4	6	8	
	$u < u_2$	1	9	7	10			6	8		
$u_2 < u_3 < u_4 < u_1$	$u < u_1$	1	2	9	10			3	4		
	$u_4 < u < u_1$	1	2	5	9	10		3	4	6	
	$u_3 < u < u_4$	1	2	5	7	9	10	3	4	6	8
	$u_2 < u < u_3$	1	5	7	9	10		4	6	8	
	$u < u_2$	1	7	9	10			6	8		
$u_4 < u_2 < u_3 < u_1$	$u > u_1$	1	2	9	10			3	4		
	$u_3 < u < u_1$	1	2	5	9	10		3	4	6	
	$u_2 < u < u_3$	1	5	9	10			4	6		
	$u_4 < u < u_2$	1	9	10				6			
	$u < u_4$	1	7	9	10			6	8		
$u_4 < u_2 < u_1 < u_3$	$u > u_3$	1	2	9	10			3	4		
	$u_1 < u < u_3$	1	9	10				4			
	$u_2 < u < u_1$	1	5	9	10			4	6		
	$u_4 < u < u_2$	1	9	10				6			
	$u < u_4$	1	7	9	10			6	8		
$u_2 < u_4 < u_1 < u_3$	$u > u_3$	1	2	9	10			3	4		
	$u_1 < u < u_3$	1	9	10				4			
	$u_4 < u < u_1$	1	5	9	10			4	6		
	$u_2 < u < u_4$	1	5	7	9	10		4	6	8	
	$u < u_2$	1	7	9	10			6	8		

Каждая из η_{sk} ($k = 1 - 10$) занимает область $x < V_{kt}$. Волны η_{sk} при $k = 1, 2, 3, 9, 10$ бегут вниз, а при $k = 4 - 8$ – вверх по потоку. Передние фронты волн η_{sk} ($k = 1, 2, 5, 7, 9, 10$) перемещаются вниз по потоку, а волн η_{sk} ($k = 3, 4, 6, 8$) – вверх соответственно со скоростями V_k . Отметим, что η_{sk} ($k = 2, 3, 4, 5, 7, 10$) генерируются только в условиях потока. Если $u = 0$, то они отсутствуют. При этом

$$\lim_{u \rightarrow 0} \lambda_k, v_k = \begin{cases} 0, & k = 7, 10, \\ \lambda_k^0, v_k^0, & k = 1, 6, 8, 9, \end{cases}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \lambda_k, \nu_k = \begin{cases} 0, & k = 3, 4, \\ \infty, & k = 1, 2, 9, 10, \end{cases}$$

$$\lambda_1^0 = \lambda_6^0, \nu_1^0 = \nu_6^0, \lambda_9^0 = \lambda_8^0, \nu_9^0 = \nu_8^0,$$

верхний индекс ноль означает отсутствие потока.

Влияние неоднородности жидкости на элементы поверхностных гравитационных и упругих волн мало. Их зависимость от частоты, скорости потока и характеристик льда примерно такая же, как и в случае потока однородной жидкости, покрытой льдом (раздел 3.2). На внутренние волны ледяной покров (тонкая упругая пластинка) не оказывает заметного влияния. Зависимость элементов внутренних волн от σ и u аналогична зависимости в случае потока двухслойной жидкости со свободной поверхностью.

Рассмотрим теперь в качестве генератора волн источник интенсивности $\tilde{M} \cos \sigma t$, начинающий действовать с момента времени $t = 0$ на заданной глубине текущей с постоянной скоростью u двухслойной жидкости, покрытой сплошным упругим льдом, плывущим вместе с потоком. Потенциалы ϕ_1 и ϕ_2 возмущенных скоростей для верхнего $0 \leq z \leq H_1$ и нижнего $-H_2 \leq z \leq 0$ слоев жидкости определим из уравнений (7.30) и условий (8.2), (8.3) при $z = 0$ и $z = H_1$, (7.4) при $t = 0$, (8.28) при $z = -H_2$, заменяя там ϕ_1 на $\phi_1 + \bar{\phi}$, если источник в верхнем слое, или ϕ_2 на $\phi_2 + \bar{\phi}$ для источника в нижнем слое. Здесь $\bar{\phi} = \frac{\tilde{M}}{4\pi} [x^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} e^{i\sigma t}$ — потенциал источника. Решая задачу аналогично предыдущему методом интегральных преобразований, получим для прогиба льда ζ_1 и поверхности раздела слоев те же выражения, что и в случае периодических возмущений (8.30). Отличие состоит в том, что

$$\eta_{sk} = \begin{cases} A_{sk}(r_k) B_{s1}(r_k) \cos \theta_k, & k = 1-6, \\ -A_{sk}(r_k) B_{s2}(r_k) \cos \theta_k, & k = 7-10, \end{cases}$$

$$A_{sk} = \tilde{M} f_s [2\sqrt{2\pi} V_k (\gamma_1 - \gamma_2)]^{-1},$$

где для источника в верхнем слое

$$f_1 = \text{chr} h_1 / \text{chr} H_1, \quad f_2 = -\gamma \text{thr} H_2 \text{chr} (H_1 - h_1) \text{ch}^{-1} r H_1,$$

$$B_{1k} = r g \epsilon \text{thr} H_2 - \gamma_k l_3, \quad B_{2k} = r g D_0 - \gamma_k l_4, \quad k = 1, 2,$$

$$l_3 = 1 + \gamma \text{thr} H_2 \text{thr} h_1, \quad l_4 = r g \chi_1 + \text{thr} (H_2 - h_1),$$

а для источника в нижнем слое

$$f_1 = -\frac{\text{chr} (H_2 - h_1)}{\text{chr} H_1 \text{chr} H_2}, \quad f_2 = \frac{\text{chr} (H_2 - h_1)}{\text{chr} H_2},$$

$$B_{1k} = \gamma_k, \quad B_{2k} = r g D_0 \text{thr} H_1 - \gamma_k (1 + r g \chi_1 \text{thr} H_1), \quad k = 1, 2.$$

При этом $D_0 = 1 + D_1 r^4$, $\chi_1 = \chi(\rho_1 g)^{-1}$, h_1 – расстояние от источника до поверхности раздела слоев жидкости. Полагая здесь цилиндрическую жесткость льда D равной нулю, получим выражение вида волн, генерируемых периодическим источником, действующим на заданной глубине потока двухслойной жидкости, покрытой битым льдом.

Таким образом, волновое движение формируется под воздействием как гравитационных поверхностных и упругих волн, так и волн внутренних. Причем поверхностные и внутренние гравитационные волны генерируются в областях $x > 0$ и $x < 0$, в то время как упругие возникают только вверх по потоку от области действия периодических возмущений и только при определенных скоростях потока.

При отсутствии потока такие же колебания сплошного ледяного покрова и поверхности раздела слоев жидкости вызываются движущимся по поверхности льда плоским фронтом периодических по времени давлений (периодическим источником, действующим под ледяным покровом на заданной глубине).

ГЛАВА 9. ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В МОРЕ СО СКАЧКОМ ПЛОТНОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ ОБЛАСТИ ПОСТОЯННЫХ ДАВЛЕНИЙ

9.1. Асимптотический анализ неустановившихся возмущений в зоне следа за областью давлений

Рассмотрим волновые возмущения, возникающие при движении давлений (4.1) по плавающему ледяному покрову. Верхний слой жидкости имеет толщину H_1 и плотность ρ_1 , а нижний – толщину H_2 и плотность ρ_2 . Давления включаются при $t = 0$. До начала их действия жидкость не возмущена, а поверхность лед-вода и граница раздела слоёв жидкости горизонтальны.

Исследуем амплитудные и фазовые характеристики внутренних волн на границе раздела слоев и их проявления в изгибе ледяного покрова. Потенциалы скоростей φ_1 в верхнем и φ_2 в нижнем слоях определим из уравнений

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad 0 \leq z \leq H_1; \quad \Delta\varphi_2 = 0, \quad -H_2 \leq z \leq 0 \quad (9.1)$$

с граничными

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \zeta_1 + g^{-1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -p_1 f(x_1, y), \quad z = H_1, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varphi_2 - \varepsilon_0 \varphi_1) + g\varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \quad z = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0, \quad z = -H_2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

и начальными (7.4) условиями. Здесь

$$\mathcal{L} = D_1 \nabla^4 + Q_1 \Delta_l + \chi_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1, \quad \varepsilon = 1 - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad p_1 = \frac{p_0}{\rho_1 g},$$

величины $D_1 = D/\rho_1 g$, $Q_1 = Q/\rho_1 g$, $\chi_1 = \chi/\rho_1 g$ характеризуют цилиндрическую жидкость, ледовое сжатие и массу льда, а обозначения ∇^4 , Δ_l приведены в (4.3).

Напомним, что прогиб льда ζ_1 и возвышение поверхности раздела слоев ζ_2 связаны с φ_1 и φ_2 кинематическими соотношениями

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, \quad z = H_1; \quad \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad z = 0. \quad (9.3)$$

Переходя к системе координат, связанной с движущейся областью давлений, и применяя комплексное преобразование Фурье по горизонтальным координатам x_1, y и преобразование Лапласа по времени t , при осесимметричном распределении давлений из (9.1) – (9.3), (7.4) после замены $x_1 = R \cos \gamma$, $y = R \sin \gamma$; $R = (x_1^2 + y^2)^{1/2}$, получим [35]

$$\zeta_j = J_{j1} - J_{j2}, \quad j = 1, 2, \quad (9.4)$$

$$J_{jk} = \frac{p_1}{8\pi^2} \int_0^\infty f_{jk}(r) J_k(r, R, \gamma) dr, \quad J_k = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \psi_k(r, \theta) e^{i\lambda} d\theta,$$

$$\psi_k = \frac{2}{\Delta_{1k}\Delta_{2k}} - \frac{1}{\tau_k\Delta_{1k}} e^{-i\Delta_{1k}t} + \frac{1}{\tau_k\Delta_{2k}} e^{-i\Delta_{2k}t}, \quad k = 1, 2,$$

$$\Delta_{lk} = r\nu \cos \theta + (-1)^l \tau_k, \quad \tau_k = (rg\mu_k)^{1/2}, \quad f_{jk}(r) = rf^*(r)M_{jk}(r),$$

$$\mu_k = (2a)^{-1}[b - (-1)^k b_0], \quad b_0 = (b^2 - 4ac)^{1/2}, \quad M_{jk} = rgq_{jk}b_0^{-1},$$

$$a = 1 + \varepsilon_0 \operatorname{th} rH_1 \operatorname{th} rH_2 + \chi_1 a_1 rg, \quad a_1 = \operatorname{th} rH_1 + \varepsilon_0 \operatorname{th} rH_2,$$

$$b = a_1 D_0 + \varepsilon(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH_1) \operatorname{th} rH_2, \quad D_0 = 1 + D_1 r^4 - Q_1 r^2,$$

$$c = \varepsilon D_0 \operatorname{th} rH_1 \operatorname{th} rH_2, \quad q_{1k} = \mu_k a_1 - \varepsilon \operatorname{th} rH_1 \operatorname{th} rH_2, \quad q_{2k} = \mu_k \varepsilon_0 \operatorname{th} rH_2 \operatorname{ch}^{-1} rH_1,$$

$$r = (m^2 + n^2)^{1/2}, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta, \quad \lambda = rR \cos(\theta - \gamma).$$

Здесь $f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$.

В (9.4) интеграл J_{j1} представляет изгибные колебания льда ($j = 1$) и возмущения границы скачка плотности ($j = 2$) за счет поверхностных волн, деформированные под влиянием неоднородности жидкости. Внутренние волны, обусловленные плотностной стратификацией, представляет интеграл J_{j2} .

Запишем ψ_k в виде

$$\psi_k = -\frac{2}{\tau_k} \int_0^t \sin(\tau_k \alpha) e^{-i\nu \alpha \cos \theta} d\alpha.$$

Тогда из (9.4) получим

$$J_{jk} = \frac{ip_1}{8\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^t \frac{f_{jk}(r)}{\tau_k} e^{i(\lambda - \Delta_{1k} \alpha)} d\alpha d\theta dr. \quad (9.5)$$

Отсюда методом стационарной фазы для многомерных интегралов [151] при больших R и t найдем асимптотические выражения ζ_j . Стационарные точки (r, θ, α) для J_{jk} удовлетворяют условию $\nabla(\lambda - \Delta_{1k} \alpha) = 0$. Отсюда при $r\nu \geq \tau_k$ и $0 \leq \gamma \leq \pi$, находим

$$tg\gamma = \kappa_k(r), \quad \kappa_k(r) = \frac{\tau'_k \tau_k^*}{r\nu^2 - \tau_k \tau'_k}, \quad \tau_k^* = [(r\nu)^2 - \tau_k^2]^{1/2}, \quad (9.6)$$

$$\alpha = R/u_k, \quad u_k = [\nu^2 + (\tau'_k)^2 - r^{-1}(\tau_k^2)']^{1/2}, \quad (9.7)$$

штрих означает производную по r .

Из (9.6) определяются значения r , соответствующие стационарным точкам интегралов J_{jk} , характеризующие поверхностные ($k = 1$) и внутренние ($k = 2$) волны в установившемся и неустойчивом режимах.

Принадлежность стационарных точек области интегрирования определяется условием $0 \leq \alpha \leq t$. Скорость $u_k(r)$ фронта волновых возмущений находится по формулам (9.7).

Анализ функций $\kappa_k(r)$ показал, что $\kappa_1(r)$ зависит главным образом от характеристик льда и ведет себя примерно так же, как и в случае однородной жидкости (см. раздел 5.2). Графики функций $\kappa_2(r)$ в случае сплошного упругого ($E > 0$) и битого ($E = 0$) льда ($h > 0$) похожи на графики при его отсутствии.

Из анализа поведения $\kappa_k(r)$ следует, что при заданных h, E, ε число положительных корней $r = \alpha_{kn}$ уравнений (9.6) определяется величиной угла γ и скоростью перемещения области давлений v (числом Фруда F). Это иллюстрируют табл. 9.1, 9.2, в которых приведены значения n при α_{1n} (табл. 9.1) и α_{2n} (табл. 9.2).

Таблица 9.1

F	γ	n
$F < F_0$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	—
$F_0 < F < F_1$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	3
$F_1 < F < F_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_{11}$	1
	$\gamma_{11} < \gamma < \gamma_{12}$	1, 2, 3
	$\gamma_{12} < \gamma \leq \pi$	3
$F > F_{11}$	$0 < \gamma < \gamma_{11}$	—
	$\gamma_{11} < \gamma \leq \gamma_{13}$	2, 3
	$\gamma_{13} < \gamma < \pi$	3

Таблица 9.2

F	γ	n
$F < F_{21}$	$\gamma = 0$	1
	$0 < \gamma < \gamma_{21}$	1, 2
	$\gamma_{21} < \gamma \leq \pi$	—
$F > F_{21}$	$\gamma = 0$	—
	$0 < \gamma < \gamma_{23}$	2
	$\gamma_{23} < \gamma \leq \pi$	—

Здесь

$$\begin{aligned}
 F_0 &= (gH)^{-1/2} \tau'_1(r_{11}), \quad F_1 = (gH)^{-1/2} \tau_{11}(r_{12}), \\
 F_{k1} &= 2^{-1/2} \left[1 - (-1)^k (1 - 4\varepsilon H_1 H_2 H^{-2})^{1/2} \right]^{1/2}, \\
 \tau_{11}(r) &= \left[(\tau_1/r)^2 - \tau'_1(r\tau'_1 - \tau_1)^2 (r^3 \tau''_1)^{-1} \right]^{1/2}, \\
 \gamma_{21} &= \arctg \kappa_2(r_5), \quad \gamma_{1k} = \arctg \kappa_1(r_k), \quad \gamma_{k3} = \arctg[(F/F_{n1})^2 - 1]^{1/2}, \\
 k &= 1, 2, \quad r_0 \leq \alpha_{13} \leq r_3 \quad (F_0 < F < F_1), \quad 0 \leq \alpha_{12} < r_1 < \alpha_{13} \leq r_3 \quad (F > F_{11}),
 \end{aligned}$$

$$r_0 \leq \alpha_{11} < r_2 < \alpha_{12} < r_1 < \alpha_{13} \leq r_3 \quad (F_1 < F < F_{11}),$$

$$r_4 \leq \alpha_{21} < r_5 < \alpha_{22} < \infty \quad (F < F_{21}), \quad 0 \leq \alpha_{22} < \infty \quad (F > F_{21}).$$

Причем r_0, r_3 – положительные корни уравнения $\tau_1 - r\nu = 0$ при $F_0 < F < F_{11}$, а r_1, r_2 – уравнения $\kappa'_1(r) = 0$ при $F_1 < F < F_{11}$. Если $F > F_{11}$, то эти уравнения имеют только по одному положительному корню r_3 и r_1 соответственно. Величины r_{11} и r_{12} являются положительными корнями уравнений $\tau_1 - r\tau'_1 = 0$ и $\tau'_{11}(r) = 0$, а r_4 и r_5 – уравнений $\tau_2 - r\nu = 0$ и $\kappa'_2(r) = 0$ при $F < F_{21}$. Отметим, что $r_1 = r_2 = r_{12}$ при $F = F_1$, а для F_{k1} справедливы приближенные выражения

$$F_{11} = 1 - \varepsilon \frac{H_1 H_2}{2H^2} + O(\varepsilon^2), \quad F_{21} = \frac{\sqrt{\varepsilon H_1 H_2}}{H} + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Каждый корень $r = \alpha_{kn}$ уравнений (9.6), зависящий от γ и F , характеризует систему волн ζ_{kn}^j вида

$$\zeta_{kn}^j = p_1 R^{-1/2} \Psi_{jk}(\alpha_{kn}) \sin \left[R \Phi_k(\alpha_{kn}, \gamma) + \delta_{kn} \frac{\pi}{4} \right] + (R^{-1}), \quad (9.8)$$

$$\Psi_{jk}(r) = f_{jk}(r)(\tau_k \tau_k^*)^{-1} [2\pi \Phi_k''(r, \gamma_k^*)]^{-1/2},$$

$$\Phi_k(r, \gamma) = v^{-1}(\tau_k \cos \gamma - \tau_k^* \sin \gamma), \quad \gamma_k^* = \arctg \kappa_k(r),$$

$$k=1, \quad n=1,2,3; \quad k=2, \quad n=1,2; \quad \delta_{11} = \delta_{13} = \delta_{21} = 1; \quad \delta_{12} = \delta_{22} = -1,$$

образующихся на поверхности лед-вода ($j=1$) и границе раздела слоев ($j=2$) внутри областей $R \leq u_{kn}$, $u_{kn} = u_k(\alpha_{kn})$ угловых зон, соответствующих диапазонам изменения F (табл. 9.1, 9.2). Размеры угловых зон определяются величинами углов $\gamma_{21}, \gamma_{1k}, \gamma_{k3}$ ($k=1, 2$).

Если $F_1 < F < F_{11}$, то $\alpha_{11} = \alpha_{12} = r_2$ при $\gamma = \gamma_{12}$. В случае $F > F_1$ для $\gamma = \gamma_{11}$ имеем $\alpha_{12} = \alpha_{13} = r_1$. Кроме того, $\alpha_{21} = \alpha_{22} = r_5$ при $\gamma = \gamma_{21}$ при $F < F_{21}$. Следовательно, при $F_1 < F < F_{11}$ на границах угловой зоны $\gamma = |\gamma_{12}|$ две системы волн $\zeta_{11}^j, \zeta_{12}^j$ вырождаются в одну η_{12}^j . Для $F > F_1$ на границах зоны $\gamma = |\gamma_{11}|$ волны $\zeta_{12}^j, \zeta_{13}^j$ вырождаются в η_{11}^j , а для $F < F_{21}$ волны $\zeta_{21}^j, \zeta_{22}^j$ – в η_{25}^j на лучах $\gamma = |\gamma_{21}|$. Здесь

$$\eta_{kn}^j = p_1 R^{-1/3} \Psi_{jk}^*(r_n) \sin[R \Phi_k(r_n)] + O(R^{-2/3}), \quad (9.9)$$

$$\Psi_{jk}^* = -\frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/6} \pi} f_{jk}(\tau_k \tau_k^*)^{-1} [\Phi_k''']^{-1/3}, \quad k=1, n=1,2; \quad k=2, n=5.$$

Таким образом, при движении области давлений (4.1) колебания поверхности лед-вода ($j=1$) и границы раздела слоев ($j=2$) внутри соответствующих заданному F угловых зон могут формироваться одной (ζ_{12}^j), двумя ($\zeta_{12}^j, \zeta_{13}^j$) или тремя ($\zeta_{11}^j, \zeta_{12}^j, \zeta_{13}^j$) системами поверхностных волн, возникающих и в однородной жидкости, и одной (ζ_{22}^j) или

двумя ($\zeta_{21}^j, \zeta_{22}^j$) системами внутренних волн, обусловленных стратификацией жидкости ($\varepsilon > 0$). Их амплитуды затухают с расстоянием как $1/\sqrt{R}$. При этом имеется условие ($F < F_0$), когда движущаяся область давлений возбуждает только внутренние волны. Они могут быть либо только продольными (если $F_{21} < F < F_0$), либо продольными и поперечными (если $F < \min(F_{21}, F_0)$). Число волновых систем меняется в окрестностях критических значений числа Фруда F_0, F_1, F_{11}, F_{21} , из которых F_{21} является следствием неоднородности жидкости, а F_0 и F_1 — следствием упругости льда.

В формирование колебаний границ угловых зон $\gamma = |\gamma_{11}|, \gamma = |\gamma_{12}|, \gamma = |\gamma_{21}|$, кроме соответствующих волн $\eta_{11}^j, \eta_{12}^j, \eta_{25}^j$, затухающих как $R^{-1/3}$, при $F_1 < F < F_{11}$ вносят вклад и волны ζ_{11}^j на лучах $\gamma = |\gamma_{11}|$ и ζ_{13}^j на лучах $\gamma = |\gamma_{21}|$. Возможность вклада поверхностных волн в формирование колебаний на лучах $\gamma = |\gamma_{21}|$ и внутренних волн на лучах $\gamma = |\gamma_{11}|, \gamma = |\gamma_{12}|$ определяется соотношением между величинами F_0, F_1, F_{11}, F_{21} .

Волны ζ_{13}^j — изгибные. Они обусловлены исключительно упругими силами льда и при $E = 0$ не возбуждаются. Волны $\zeta_{11}^j, \zeta_{21}^j$ имеют характер поперечных, а $\zeta_{12}^j, \zeta_{22}^j$ — продольных корабельных волн, образующихся и в случае битого ($E = 0$) льда, и при его отсутствии [139, 160, 170]. Передние фронты возмущений ζ_{kn}^j перемещаются со скоростью u_{kn} .

Для количественной оценки влияния льда на внутренние волны и неоднородности жидкости на поверхностные волны проводились численные расчеты при значениях (4.13), $H_1 = 45$ м, $\rho_1 = 1020$ кг·м⁻³ и $10^{-3} \leq \varepsilon \leq 10^{-2}$. При этом скорость движения области давлений изменялась от $10^{-2}(gH)^{1/2}$ до $3 \cdot 10^{-2}(gH)^{1/2}$, а толщина льда — от 0 до 3.5 м.

Анализ результатов показал, что отклонения, вносимые неоднородностью жидкости в поведение функций $\kappa_1(r)$, не превышают 0.1%. Причем они уменьшаются с ростом h и F . Следовательно, условия возбуждения поверхностных волн ζ_{1n}^j ($n = 1, 2, 3$) и структура волнового возмущения (число и характер образующихся волн, их передние фронты, размеры угловых зон и фазовые портреты), ими обусловленного, будут практически такими же, как и в однородной жидкости. Кроме того, численный анализ показал слабое влияние неоднородности и на амплитуду поверхностных волн. Оно составляет менее 1%, а на изгибных волнах практически не проявляется.

Количественные изменения $\kappa_2(r)$ за счет упругих и массовых сил льда находятся в пределах 0.1%. Это говорит о слабом влиянии сплошного упругого и битого льда на γ_{21}, γ_{23} , а также на фазовые портреты ко-

лебаний, обусловленных внутренними волнами ζ_{2n}^j ($n = 1, 2$), и скорости перемещения их передних фронтов. Величины этих волновых характеристик практически те же, что и в двухслойной жидкости со свободной поверхностью. Слабо влияют на них и силы ледового сжатия (растяжения), если величина Q_1 не слишком близка к критическому значению $2Q_0$, $Q_0 = \sqrt{D_1}$. Таким образом, фазовые портреты и скорости передних фронтов возмущений, вызываемых внутренними волнами, существенно меняются лишь с изменением числа Фруда, толщин слоев жидкости и величины скачка плотности.

Угловые зоны γ_{21} , γ_{23} расширяются с увеличением F и уменьшением ε . В частности, при $h = 1$ м, $H_1 = 45$ м, $H = 1000$ м величина γ_{21} для $\varepsilon = 10^{-2}$ изменилась от 21° до 39° при изменении F от 10^{-2} до $1.8 \cdot 10^{-2}$. Если $F = 10^{-2}$, а ε растет от $5 \cdot 10^{-3}$ до 10^{-2} , то γ_{21} уменьшается в пределах $24.5^\circ - 19.7^\circ$. С приближением числа Фруда к критическому значению F_{21} , равному в данном случае $2.11 \cdot 10^{-2}$ при $\varepsilon = 10^{-2}$ (что соответствует $v_{21} = 2.09$ м·с $^{-1}$), угол γ_{21} может приближаться к 90° , а γ_{23} стремится к нулю.

На рис. 9.1, 9.2 приведены фазовые портреты внутренних волн при $h = 1$ м, $H_1 = 45$ м, $H = 1000$ м, $\varepsilon = 10^{-2}$. На рис. 9.1 $t = 245$ с и $F = 10^{-2}$ из диапазона $F < F_{21}$, на рис. 9.2 $t = 750$ с и $F = 3 \cdot 10^{-2}$ из диапазона $F > F_{21}$. Штриховая жирная линия представляет передние фронты волн ζ_{22}^j (справа от треугольников) и ζ_{21}^j (слева от треугольников). Штрихпунктирные прямые ограничивают углы γ_{21} (рис. 9.1) и γ_{23} (рис. 9.2). Сплошные и штриховые линии, касающиеся оси x , характеризуют линии равной фазы волн ζ_{22}^j , а пересекающие ось x по нормали – волн ζ_{21}^j . При этом на поверхности лед-вода ($j = 1$) сплошные и штриховые кривые соответствуют гребням и впадинам, а на границе раздела слоев ($j = 2$) – впадинам и гребням.

Сплошной упругий лед и силы ледового сжатия (растяжения) могут оказывать существенное влияние на амплитуды внутренних волн. При этом может изменяться также и характер распределения амплитуд вдоль дуг гребней. Причем влияние упругих характеристик льда и сжимающих (растягивающих) усилий проявляется по-разному на поверхности лед – вода и на разделе слоев. Для поперечных волн при $F = 10^{-2}$ это иллюстрируется графиками на рис. 9.3, 9.4, 9.5. Здесь представлены распределения амплитуд A_{21}^j волн ζ_{21}^j вдоль дуг их гребней на поверхности лед-вода (верхняя шкала) и границе раздела слоев (нижняя шкала) в случае сосредоточенной нагрузки вида (6.5) при $p_0 = 1.6$ Па. Через l обозначена длина дуги гребня (впадины) между осью x и границей угловой зоны. Значения H , H_1 , ε те же, что и для рис.9.1. Амплитуды A_{21}^1 , A_{21}^2 да-

ны в сантиметрах с точностью до множителей $10^{-1}\beta_{N1}$, $10^{-3}\beta_{N1}$ соответственно. Здесь $\beta_{N1} = (4N-3)^{-1/2}$, $N = 1, 2, 3$ – номер линии гребня или впадины, считая от места действия давлений. Цифры на оси l в порядке возрастания отвечают точкам пересечения фиксированного гребня с радиальными прямыми, выходящими из начала координат под углами, равными соответственно порядку цифр 5, 12, 14, 16, 19, 21°. Для наглядности точки пересечения этих прямых с линией фронта продольной волны отмечены кружками на рис. 9.1 по порядку снизу вверх.

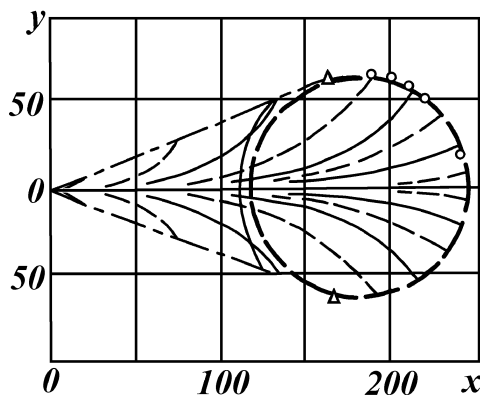


Рис. 9.1

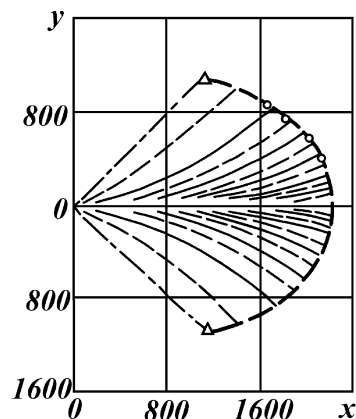


Рис. 9.2

На рис. 9.3 сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии соответствуют $h = 0, 1, 2$ м при $Q_1 = 0$. При толщинах льда 1 м на рис. 9.4 и 2 м на рис. 9.5 сплошные линии даны без учета сил ледового сжатия, штрихпунктирные с одной точкой и пунктирные соответствуют ледовому сжатию при $Q_1 = Q_0$ и $1.3 Q_0$, а штрихпунктирные с двумя точками – растяжению при $Q_1 = -Q_0$.

Из графиков на рис. 9.3 следует, что с ростом толщины сплошного льда A_{21}^j ($j = 1, 2$) всюду вдоль гребня уменьшается. Профиль гребня поперечной внутренней волны на поверхности лед-вода, имеющий минимум около границы угловой зоны, при этом качественно не меняется, но становится более пологим. На разделе слоев амплитуда поперечной внутренней волны при $h = 0$ монотонно возрастает с приближением вдоль гребня к границе угловой зоны. Качественно такой же профиль имеет $A_{21}^2(l)$ и при $h = 1$ м, в то время как для $h = 2$ м функция $A_{21}^2(l)$ сначала несколько убывает, затем у границы угловой зоны растет. Образовавшийся прогиб графика функции $A_{21}^2(l)$ увеличивается с дальнейшим ростом h . В количественном отношении увеличение h сказывается на A_{21}^1 сильнее, чем на A_{21}^2 . Кроме того, влияние сплошного льда на ве-

личины A_{21}^j усиливается с приближением к границе угловой зоны, так как при этом растет значение α_{21} .

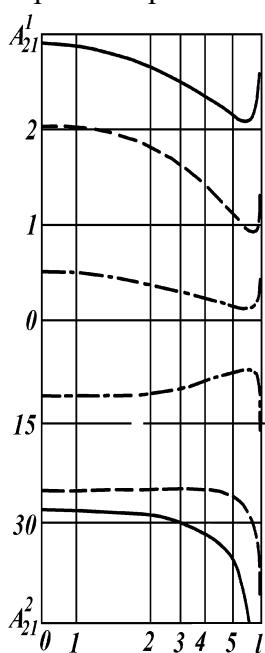


Рис. 9.3

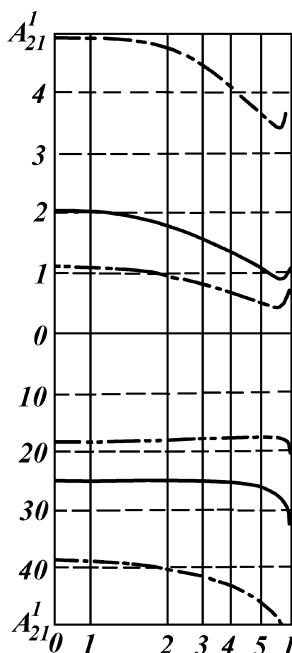


Рис. 9.4

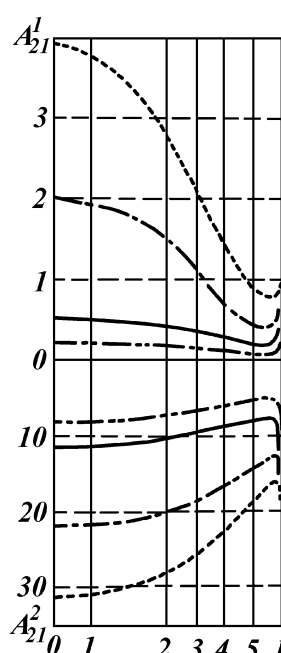


Рис. 9.5

Ледовое сжатие приводит к увеличению, а растяжение – к уменьшению амплитуд A_{21}^j поперечных волн. При этом большему сжимающему (растягивающему) усилию отвечает более резкое (плавное) изменение амплитуды вдоль гребня. Характер влияния Q_1 на распределение амплитуды по гребню волны на поверхности лед-вода при $h = 1$ м качественно такой же как и при $h = 2$ м. Распределения же A_{21}^2 (на разделе слоев) вдоль гребня для этих толщин льда могут отличаться. Например, в условиях сжатия при $Q_1 = Q_0$, $F = 10^{-2}$ амплитуда A_{21}^2 вдоль гребня монотонно возрастает для $h = 1$ м. Для $h = 2$ м она убывает вне окрестности границы соответствующей угловой зоны. Причем это качественное отличие более резкое, чем при $Q_1 = 0$. В то же время в условиях ледового растяжения (для $Q_1 = -Q_0$) подобное различие в поведении функции $A_{21}^2(l)$ при $h = 1$ м и $h = 2$ м не наблюдается.

Влияние сплошного упругого плавающего льда и сил ледового сжатия на амплитуды A_{22}^j продольных внутренних волн ζ_{22}^j при $F = 10^{-2}$ более значительное, чем на A_{21}^j . Уменьшение A_{22}^j за счет льда может составить до 10^3 раз при изменении h , H_1 , H , ϵ , Q_1 в рассматриваемых диапазонах. Однако для данного числа Фруда продольные волны имеют и

при отсутствии льда (и в условиях ледового сжатия) более чем в 10^2 раз меньшую амплитуду, чем волны поперечные, и их вклад в общую волновую картину мал.

С ростом числа Фруда в диапазоне $F < F_{21}$ влияние толщины льда и сил ледового сжатия на амплитуды поперечных волн убывает, и для $F \geq 1.8 \cdot 10^{-2}$ распределения A_{21}^j по l в ледовых условиях практически совпадают с распределениями при $h = 0$. Изменение F от 10^{-2} до $1.8 \cdot 10^{-2}$ при $h = 0$ (для рассматриваемых значений H, H_1, ε) не приводит к качественным изменениям в распределении A_{21}^2 вдоль дуги гребня, но уменьшает ее почти в четыре раза. При этом вид функции A_{21}^1 существенно меняется. Прогиб гребня поперечных волн на поверхности лед-вода убывает и, начиная с некоторого F , функция $A_{21}^1(l)$ становится монотонно возрастающей (похожей на $A_{21}^2(l)$). Количественные отличия в распределении A_{21}^1 по l для двух фиксированных значений F существенно растут с удалением по гребню к границе угловой зоны, хотя в окрестности оси x они находятся в пределах 5%. Напомним, что фазовый портрет внутренних волн при $F = 1.8 \cdot 10^{-2}$ отличается от портрета при $F = 10^{-2}$ только в количественном отношении (в частности, возрастает угол раствора зоны волновых возмущений. Однако при этом возрастает роль продольных внутренних волн в общей волновой картине. Хотя влияние изгибных характеристик льда и сжимающих (растягивающих) усилий на эти волны, как и на поперечные, падает, но по мере увеличения A_{22}^j за счет роста F роль льда в формировании волнового возмущения не ослабевает.

Распределение амплитуд A_{22}^j продольных волн вдоль дуг их гребней при $F = 1.8 \cdot 10^{-2}$ показано на рис. 9.6 и 9.7. Цифры на оси l отвечают здесь пересечению с прямыми, выходящими из начала координат под углами 10, 15, 20, 25, 30, 34, 37, 39°, а вертикальная шкала A_{22}^1, A_{22}^2 дана с точностью до множителей $10^{-1}\beta_{N2}, 10^{-3}\beta_{N2}$, где $\beta_{N2} = [3(4N-1)]^{-1/2}$. Сплошные, штрихпунктирные с одной и двумя точками линии соответствуют $h = 0, 2, 3.5$ м для $Q_1 = 0$ на рис. 9.6 и $Q_1 = 0, Q_1 = Q_0$ и $Q_1 = -Q_0$ (растяжение) для $h = 3.5$ м на рис. 9.7, где для той же толщины льда штриховая, пунктирная и штрихпунктирная с двумя штрихами соответствуют $Q = 0.5 Q_0, 1.3 Q_0, -3 Q_0$. Видно, что при $Q_1 = 0$ амплитуды продольных внутренних волн и на поверхности лед-вода и на разделе слоев растут с удалением вдоль гребня от эписцентра области давлений к границе волновой зоны. Скорость роста амплитуд на этих двух поверхностях разная. Она зависит от толщины льда и меняется вдоль фиксированного гребня.

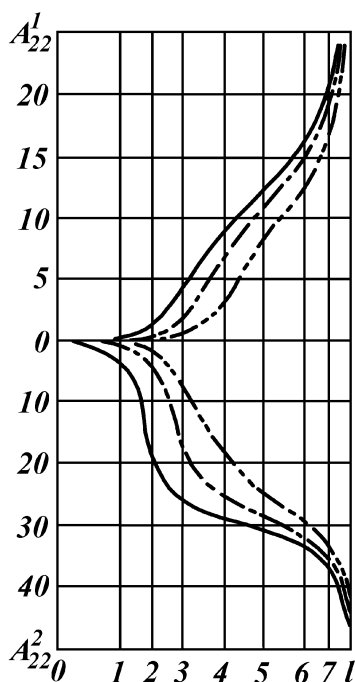


Рис. 9.6

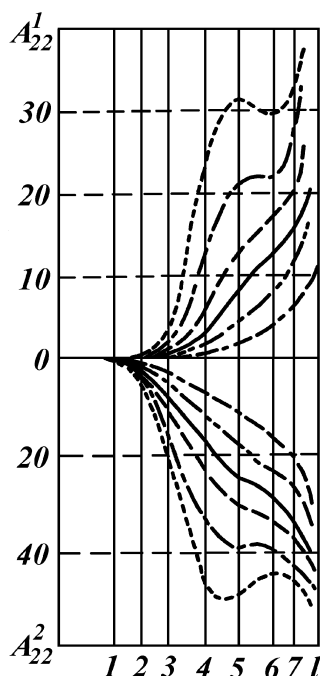


Рис. 9.7

В изменении характера распределения A_{22}^j по l может проявиться роль ледового сжатия. Например, при $h = 3.5$ м (рис. 9.7) амплитуда продольных внутренних волн в случае $Q_1 < 0.9 Q_0$ распределена вдоль гребня качественно так же, как и при $Q_1 = 0$. При сжатии $Q_1 \geq Q_0$ на графиках $A_{22}^j(l)$ появляются экстремумы. С ростом сжимающего усилия локальный максимум увеличивается, а величина угла γ^* между осью x и лучом, соединяющим начало координат с локальным максимумом, убывает. При $h = 3.5$ м изменение Q_1 от Q_0 до $1.3 Q_0$ увеличило локальный максимум примерно в 1.5 раза. Угол γ^* при этом уменьшается от 29° до 26° на поверхности скачка плотности и от 38° до 33° на границе лед-вода.

Отметим, что уменьшение глубины жидкости H при фиксированном $F < F_{21}$ приводит к усилению влияния льда на амплитуды внутренних волн. В частности, при $F = 1.8 \cdot 10^{-2}$ и $H = 200$ м его влияние примерно такое же, как и при $F = 10^{-2}$, $H = 1000$ м. К таким же эффектам приводит и рост величины ε .

При $F > F_{21}$, когда возбуждаются только продольные внутренние волны, их амплитуда A_{22}^j уменьшается с ростом толщины льда вдоль гребня во всей угловой зоне. Ледовое сжатие увеличивает её, а растяжение уменьшает. В некоторый момент времени t_N^* ($t_N^* > t_{N-1}^*$) функция

$A_{22}^j(l)$ достигает экстремального значения на гребне с номером N . Для всех гребней экстремумы располагаются на одном и том же луче, исходящем из начала координат и образующем с осью x угол $\gamma^* < \gamma_{23}$. За точкой экстремума амплитуда вдоль гребня убывает до нуля при $t \rightarrow \infty$, а влияние льда на нее быстро падает.

На рис. 9.8 показано распределение амплитуд $A_{22}^j(l)$ вдоль дуги гребня продольной волны для $F = 3 \cdot 10^{-2}$ при рассматриваемых значениях H , H_1 , ε . Обозначения на рис. 9.8 те же, что и на рис. 9.6, но под l подразумевается длина дуги от начала координат до линии переднего фронта. Цифры на оси l отвечают пересечению гребня с лучами, исходящими из начала координат под углом 10, 15, 23 и 28° (точки пересечения этих лучей с линией фронта обозначены кружками на рис. 9.2). Видно, что большей толщине льда отвечает меньшая высота экстремума на гребне и больший угол γ^* . Например, изменение h от нуля до 3.5 м при отсутствии ледового сжатия привело к уменьшению максимума высоты экстремума для $A_{22}^2(l)$ примерно на 30%, а для $A_{22}^1(l)$ на 14%. Величина γ^* при этом увеличивалась с 14 до 19° на разделе слоёв и с 17 до 24° на поверхности лед-вода. Отсюда также следует, что для продольных внутренних волн ζ_{22}^1 на поверхности лед-вода направление экстремумов амплитуд составляет с осью x больший угол γ^* , чем для соответствующих ζ_{22}^2 на границе скачка плотности.

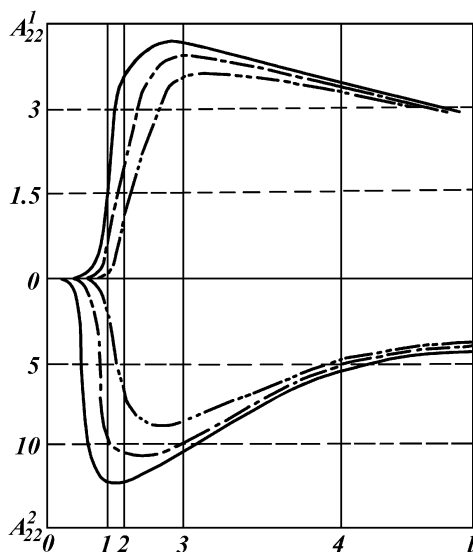


Рис. 9.8

С ростом сжимающего усилия максимумы $A_{22}^j(l)$ и γ^* меняются в направлении, противоположном изменению с ростом h . Для $h = 3.5$ м в случае $Q_1 = Q_0$ максимальная высота на гребне в 1.8 ($j = 1$) и 1.6 ($j = 2$) раза больше, чем при $Q_1 = 0$. Угол γ^* при этом уменьшился от 24° до $18^\circ.5$ при $j = 1$ и от 19° до 16° при $j = 2$. Ледовое растяжение приводит к убыванию амплитуды A_{22}^j и более пологому распределению ее вдоль гребня. Угол γ^* составляет $27^\circ.5$ ($j = 1$), $21^\circ.5$ ($j = 2$) при $Q_1 = -Q_0$ и 30° ($j = 1$), 24° ($j = 2$) для $Q_1 = -3Q_0$. С ростом F , как и при $F < F_{21}$, влияние толщины льда и ледового сжатия на амплитуды продольных внутренних волн ослабевает.

При фиксированном сжимающем усилии зависимость распределения $A_{22}^j(l)$ от изменения толщины льда в качественном отношении такая же, как и при $Q_1 = 0$. Однако с ростом h в условиях заданного сжатия четко прослеживается уменьшение максимума высоты гребня и смещения его от области давлений. Угол γ^* для $h = 1$ м и $h = 3.5$ м на разделе слоев составляет 10 и 19° , а на поверхности лед-вода – 20° и 23.5° соответственно. При фиксированном отношении Q/h максимум высоты гребня продольных волн на поверхности скачка плотности убывает с ростом h , в то время как на поверхности лед-вода он может как возрастать, так и убывать, хотя и незначительно. На гребне волны ζ_{22}^j есть участок, где амплитуда A_{22}^j растет, и участок, где она убывает с увеличением h . Угол γ^* для ζ_{22}^2 растет с увеличением толщины льда, а для ζ_{22}^1 он может как расти, так и убывать. Отметим, что во всех рассматриваемых случаях изменение максимума высоты гребня определяется в большей мере изменением сжимающего усилия, а его положение на гребне – цилиндрической жесткостью.

Битый лед, моделируемый абсолютно гибкой пластинкой ($E = 0$), заметного влияния на амплитуды внутренних волн не оказывает при изменении исходных параметров в рассматриваемых диапазонах.

Таким образом, ледяной покров и силы ледового сжатия практически не оказывают влияния на фазовую структуру внутренних волн в море со скачком плотности. Амплитуды этих волн с ростом толщины льда убывают, а с ростом сжимаемого усилия увеличиваются. Причем в докритическом диапазоне влияния льда сильнее сказывается на продольных волнах, чем на поперечных. Чем больше скорость движения области давлений, тем это влияние меньше. В сверхкритическом диапазоне изменение амплитуды заметно лишь в точках, где она близка к максимальной по гребню.

9.2 Внутренние волны в ближней зоне движущейся области

Проведенный в разделе 9.1 анализ показывает слабое (порядка ε) влияние неоднородности жидкости на характеристики возмущений, обусловленных поверхностными волнами. Поэтому рассмотрим теперь только интегралы J_{j2} в выражении (9.4), представляющие возмущения, вносимые внутренними волнами [38] на поверхность лед-вода ($j = 1$) и границу слоев жидкости ($j = 2$). В J_2 при $r \geq 0$ функция $\psi_2(r, \theta)$ не имеет особенностей на пути интегрирования по θ . Следовательно, исходный путь вдоль действительной оси от $\theta = -\frac{\pi}{2}$ до $\theta = \frac{3\pi}{2}$ можно деформировать в путь L_0 , обходящий в комплексной плоскости корни $\theta_{1,2} = \mp \arccos \tau_0$, $\tau_0 = \tau_2/(rv)$ уравнения $\Delta_{12} = 0$ по малым полуокружностям, на которых $\operatorname{Re}(i \Delta_{12}) > 0$, а корни $\theta_{3,4} = \mp \arccos \tau_0 + \pi$ уравнения $\Delta_{22} = 0$ – по полуокружностям, где $\operatorname{Re}(i \Delta_{22}) > 0$.

Перепишем J_2 в виде

$$J_2 = J_0 - J_{01} - J_{02}, \quad J_0 = \int_{L_0} \Phi_0(r, \theta) d\theta, \quad J_{0l} = \int_{L_{0l}} \Phi_{0l}(r, \theta) d\theta,$$

$$\Phi_0 = \frac{2}{\Delta_{12} \Delta_{22}} \exp(i\lambda), \quad \Phi_{0l} = \frac{1}{\tau_2 \Delta_{l2}} \exp[i(\lambda - \Delta_{l2} t)], \quad l = 1, 2,$$

где L_{01} обходит только точки $\theta_{1,2}$, а L_{02} – точки $\theta_{3,4}$. Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} J_{0l} = 0$ при любом R , то для исследования установившихся внутренних волн ограничимся рассмотрением интеграла

$$\zeta_{j2} = \frac{p_1}{8\pi^2} \int_0^\infty f_{j2} J_0 dr.$$

Пусть $v < C_0$,

$$C_0 = C \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon H_1 H_2 / H^2}) \right]^{1/2} = C \sqrt{\varepsilon H_1 H_2 / H^2} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad C = \sqrt{gH}.$$

Представим ζ_{j2} так

$$\zeta_{j2} = \frac{p_1}{8\pi^2} (\eta_{j1} + \eta_{j2}), \quad \eta_{j1} = \int_0^{r_1} f_{j2}(r) J_0(r) dr, \quad \eta_{j2} = \int_{r_1}^\infty f_{j2}(r) J_0(r) dr,$$

где r_1 – единственный положительный корень уравнения $rv - \tau_2(r) = 0$.

При $0 \leq r < r_1$ путь интегрирования по θ в J_0 совпадает с отрезком действительной оси от $-\pi/2$ до $3\pi/2$. Кроме того, подынтегральное выражение в η_{j1} не имеет особенностей и по r , за исключением интегрируемой в конечной точке $r = r_1$. Следовательно, η_{j1} можно определить численно.

Для $r_1 < r < \infty$ в J_0 путь L_0 обходит точки $\theta = \theta_{1,4}$ в нижней, а $\theta = \theta_{2,3}$ – в верхней полуплоскостях. При этом
 $-\pi/2 < \theta_1 \leq 0$, $0 \leq \theta_2 < \pi/2$, $\pi/2 < \theta_3 \leq \pi$, $\pi \leq \theta_4 < 3\pi/2$.

Дальнейший анализ интеграла η_{j2} можно провести методом, аналогичным предложенному в разделе 6.2 для ζ_2 .

Запишем η_{j2} так

$$\eta_{j2} = \eta_{j2}^* - \eta_{j2}^0, \eta_{j2}^* = \int_{r_1}^{\infty} f_{j2}(r) \int_{L^*} \Phi_0(r, \theta) d\theta dr, \quad (9.10)$$

$$\eta_{j2}^0 = \sum_{k=1}^7 \int_{r_1}^{\infty} f_{j2}(r) \int_{L_k} \Phi_0(r, \theta) d\theta dr,$$

где L^* – замкнутый контур, образованный L_0 и контурами L_k , на которых $\operatorname{Re}(i\lambda) \leq 0$. Выбор L^* зависит от величины угла γ . Его вид такой же, как и на рис.6.6. Для $0 \leq \gamma < \theta_2$ контур L^* приведен на рис. 9.9, где L_0 характеризуется сплошной линией, а L_k – штриховой. Если здесь L_3 поместить справа от θ_4 , а L_5 между θ_2 и $\pi/2$, то получим один из возможных видов L^* для углов $\theta_2 \leq \gamma \leq \theta_3$. В случае $\theta_3 < \gamma \leq \pi$ горизонтальный путь L_4 находится в верхней полуплоскости, а L_k при $k = 1, 2, 6, 7$ – в нижней.

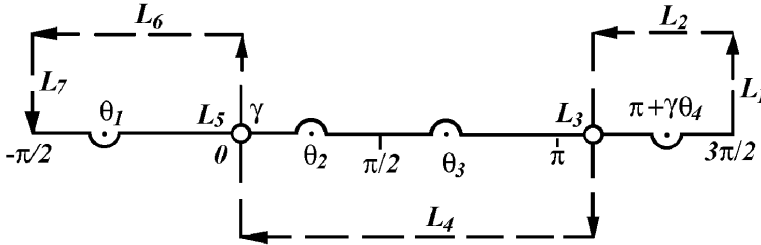


Рис. 9.9

Вертикальные пути L_3 и L_5 проходят при этом через точки на интервалах (θ_1, θ_2) и (θ_3, θ_4) соответственно. После применения теоремы Коши из (9.10) получим

$$\eta_{j2}^* = -2\pi(I_{j1} + I_{j2}), \quad (9.11)$$

где

$$I_{jk} = \int_{r_k}^{\infty} \Phi_k^j(r) dr, \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2} \quad (k=1,2),$$

$$I_{j1} = \int_{r_1}^{r_1^*} \Phi_1^j(r) dr, \quad I_{j2} = 0, \quad \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi,$$

$$\Phi_{1,2}^j = \frac{f_{j2}}{\tau_2 \tau_2^*} \sin \left[\frac{R}{v} (\tau_2 \cos \gamma \mp \tau_2^* \sin \gamma) \right], \quad \tau_2^* = [(vr)^2 - \tau_2^2]^{1/2},$$

где τ_1^* – корень уравнения $\gamma = \theta_3(r)$, а r_2 – уравнения $\gamma = \theta_2(r)$. Отрезки интегрирования определяются из заштрихованных (слева направо для I_{j1} и справа налево для I_{j2}) областей на рис. 9.10, 9.11. Функции $\Phi_{1,2}^j$ не имеют особенностей по r , кроме интегрируемой в точке $r = r_1$.

Из условия $\text{Re}(i\lambda) < 0$ следует, что $J_{j2} = J_{j4} = J_{j6} = 0$. Так как $\Phi_0(r, \theta) = \Phi_0(r, \theta + 2\pi)$, а L_{j1} и L_{j7} противоположно направлены, то $J_{j1} + J_{j7} = 0$.

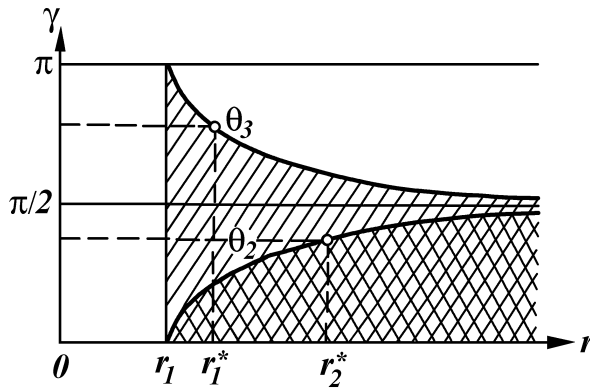


Рис. 9.10

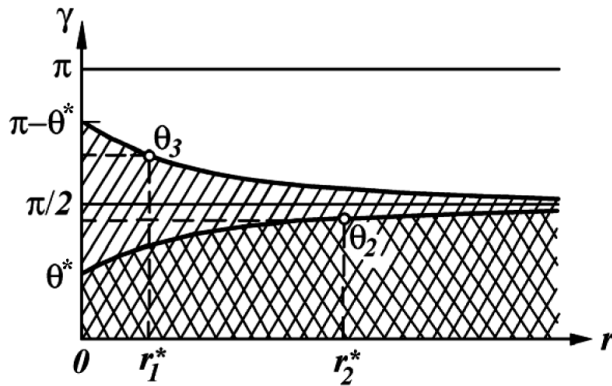


Рис. 9.11

После замены $\omega = i[(\pi + \gamma) - \theta]$ в J_{j3} и $\omega = i(\theta - \gamma)$ в J_{j5} найдем

$$J_{j3} + J_{j5} = - \int_{r_1}^{\infty} (\tau_2 v)^{-1} f_{j2}(r) (u_1 + u_2) dr,$$

$$u_n = 2(-1)^n \int_0^{\infty} \frac{\sin(rR \text{ch} \omega) [\text{ch} \omega \cos \gamma + (-1)^n \tau_0]}{[\text{ch} \omega \cos \gamma + (-1)^n \tau_0]^2 + (\text{sh} \omega \sin \gamma)^2} d\omega.$$

Подстановкой $u = \operatorname{ch} \omega$ выражение u_n сводится к виду

$$u_n = 2(-1)^n \int_1^\infty \frac{u_0 \sin(rRu)}{[u_0^2 + (u^2 - 1)\sin^2 \gamma](u^2 - 1)^{1/2}} du, \quad u_0 = u \cos \gamma + (-1)^n \tau_0.$$

Так как

$$u_0^2 + (u^2 - 1)\sin^2 \gamma = [u + (-1)^n \tau_0 \cos \gamma]^2 - (1 - \tau_0^2)\sin^2 \gamma,$$

то

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= (1 - \tau_0^2)^{-1/2} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (-1)^{m+n+1} \sin Q_{mn} \int_1^\infty \Phi^* du, \\ \Phi^* &= \sin(rRu)(u^2 - 1)^{-1/2} (u - \cos Q_{mn})^{-1}, \\ Q_{mn} &= \gamma + (-1)^{m+n} \arccos \tau_0 + [1 + (-1)^n] \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Заменяя здесь $(u^2 - 1)^{1/2}$ в малой ε – окрестности нижнего предела на $\sqrt{2} \cdot \sqrt{u - 1}$, методом интегрирования по частям найдем

$$\begin{aligned} \sin Q_{mn} \int_1^{u_0^*} \Phi^* du &= [2(1 + \cos Q_{mn})]^{1/2} A(r, \varepsilon) + O(\varepsilon), \\ A &= (A_1 - A_2) \operatorname{sign} A_3, \quad A_1 = \sin[rR(1 + \varepsilon)] \arctg[\varepsilon / (1 - \cos Q_{mn})]^{1/2}, \\ A_2 &= rR \int_1^{u_0^*} \cos(rRu) \arctg[(u - 1) / (1 - \cos Q_{mn})]^{1/2} du, \\ A_3 &= (-1)^n (1 - \tau_0^2)^{1/2} \cos \gamma + (-1)^m \tau_0 \sin \gamma, \quad u_0^* = 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Интегралы A_2 и A_0 , а следовательно, и I_{j3} , где

$$A_0 = \int_{u_0^*}^\infty \Phi^* du, \quad I_{j3} = J_{j3} + J_{j5}$$

можно считать численно.

Пусть $v > C_0$. Тогда $\tau_2 \neq rv$ и

$$\zeta_{j2} = \frac{p_1}{8\pi^2} \eta_{j2}, \quad \eta_{j2} = \int_0^\infty f_{j2}(r) J_0(r) dr.$$

Записав η_{j2} в виде (9.10) с нулевым нижним пределом интегрирования по r и применив теорему Коши для η_{j2}^* , найдем (9.11), где

$$I_{j1} = \begin{cases} \int_0^\infty \Phi_1^j(r) dr, & 0 \leq \gamma < \pi/2, \\ \int_0^{r_1^*} \Phi_1^j(r) dr, & \pi/2 < \gamma < \pi - \theta^*, \\ 0, & \pi - \theta^* \leq \gamma \leq \pi, \end{cases} \quad I_{j2} = \begin{cases} \int_0^\infty \Phi_2^j(r) dr, & 0 \leq \gamma \leq \theta^*, \\ \int_{r_2}^\infty \Phi_2^j(r) dr, & \theta^* < \gamma < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \leq \gamma \leq \pi \end{cases}$$

$$\theta^* = \arccos(C_0 / v).$$

Уравнения для определения r_1^* , r_2 и выражение η_{j2}^0 такие же, как и при $v < C_0$.

Таким образом, при заданной скорости перемещения области давлений задача определения трехмерных возмущений ζ_{12} , вносимых внутренними волнами в изгибные деформации плавающего ледяного покрова, и ζ_{22} , характеризующих вклад внутренних волн в формирование поверхности раздела слоёв, сведена к численному интегрированию. При $v < C_0$ она заключается в вычислении интегралов η_{j1} , I_{jk} , а для $v > C_0$ интегралов I_{jk} , где $j = 1, 2$; $k = 1, 2, 3$.

Численный анализ возмущений проводился для случая сосредоточенных давлений типа δ -функции $f(x_1, y) = \delta\left(\frac{x_1}{H}\right) \delta\left(\frac{y}{H}\right)$ при значениях параметров $\varepsilon = 10^{-2}$, $H_1 = 45$, $H = 10^3$ м, $\rho_1 = 10^3$ кг·м⁻³, $p_0 = 10^2/(2\pi)$ Па, $E = 3 \cdot 10^9$ Н·м², $\rho = 870$ кг·м⁻³, $Q = 0$, $\mu = 0.34$. Толщина льда h полагалась равной 0, 1, 2, 3.5 м. Давления перемещались со скоростью $10^{-2} C$, $1.8 \cdot 10^{-2} C$, $3 \cdot 10^{-2} C$. При этом $C_0 \approx 2.1 \cdot 10^{-2} C$. На рис 9.12 – 9.15 приведены иллюстрации топографий трехмерных возмущений, обусловленных внутренними волнами на поверхности скачка плотности (рис. 9.12 – 9.14) и их проявлениями на поверхности бассейна (рис. 9.15) при $h = 2$ м для $v = 10^{-2} C$ (рис. 9.12), $v = 1.8 \cdot 10^{-2} C$ (рис. 9.13), $v = 3 \cdot 10^{-2} C$ (рис. 9.14 – 9.15). В силу симметрии возмущений относительно трассы перемещения давлений топографии на фигурах приведены только для $y > 0$. Штриховыми кривыми изображены изолинии на впадинах, а сплошными – на поднятиях. Шкала давлений по координатным осям дана в метрах, а отклонения изолиний от невозмущенного уровня, представленного сплошными толстыми кривыми, в сантиметрах для ζ_{22} и сотых долях миллиметра для ζ_{12} . Отметим, что ζ_{12} , ζ_{22} пропорциональны величине p_0 . Соответствующую полученным отклонениям изолиний массу M нагрузки по заданному значению p_0 можно определить из формулы $M = p_0 H^2 / (2\pi g)$.

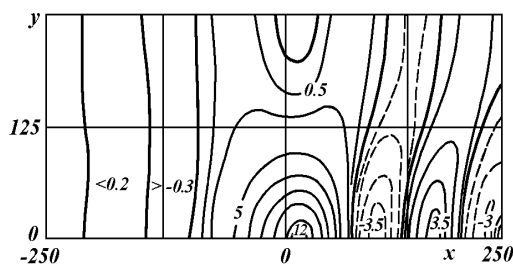


Рис. 9.12

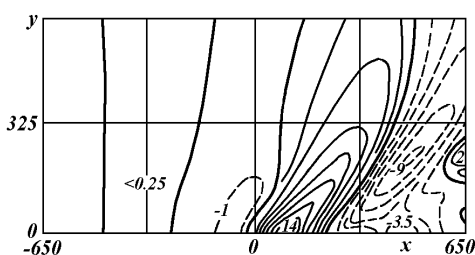


Рис. 9.13

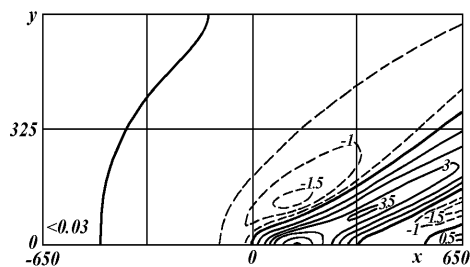


Рис. 9.14

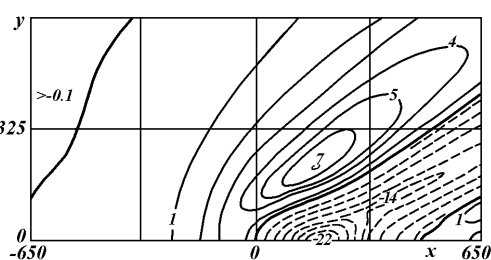


Рис. 9.15

Из анализа результатов численного счета следует, что при $\nu = 10^{-2} \text{ С}$ в бассейне без ледяного покрова ($h = 0$) на поверхности скачка плотности под давлением образуется локализованное поднятие, вытянутое поперек трассы движения. Задний склон поднятия заметно круче переднего, а его вершина отстает от эпицентра давлений. За поднятием возмущения формируются в основном внутренними волнами типа поперечных корабельных. Продольные внутренние волны имеют в этом случае малую амплитуд. Поэтому их вклад в топографию возмущений незаметен. Амплитуды поперечных волн убывают как с удалением от трассы, так и увеличением номера гребня (впадины). Перед поднятием возмущения незначительны. Ледяной покров, не внося качественных изменений в структуру возмущений поверхности скачка плотности (рис. 9.12), уменьшает высоту локализованного поднятия и амплитуды поперечных волн. Кроме того, с ростом толщины льда вершина поднятия смещается вдоль трассы к эпицентру давлений, а площадь его основания увеличивается главным образом за счет растяжения в нормальном к трассе направлении. Увеличение h приводит в ближней зоне и к незначительному росту угла между направлением гребней (впадин) поперечных волн и осью x . Расстояние между нулевыми изолиниями для этих волн практически не зависит от толщины льда.

Возмущения жидкости, обусловленные стратификацией ее плотности, проявляются и в формировании колебаний на поверхности бассейна. При удалении от границы раздела слоев к поверхности в случае $\nu = 10^{-2} \text{ С}$ возмущения над локализованным поднятием затухают медленнее, чем амплитуды внутренних поперечных корабельных волн. Ле-

ледяной покров увеличивает затухание возмущений от поперечных волн сильнее, чем от локализованного поднятия. Это приводит к тому, что в условиях ледяного покрова с ростом его толщины проявления теряют волновую структуру, приобретая во всей рассматриваемой области вид слабого прогиба. Точка максимального прогиба располагается ближе по трассе к эпицентру давлений, чем вершина поднятия.

При увеличении скорости перемещения давлений в диапазоне $0 < v < C_0$ усиливается влияние внутренних продольных корабельных волн на формирование возмущений в ближней зоне. В частности, при $v = 1.8 \cdot 10^{-2} C$ под их воздействием на поверхности скачка плотности локализованное поднятие трансформируется в гребень гиперболической формы, задний склон которого круче переднего, а максимальная высота отстает от эпицентра давлений. С удалением от вершины вдоль гребня его высота уменьшается, а ширина основания в пределах рассматриваемой области растет. Впадина за передним гребнем приобретает здесь сложную структуру с холмистым дном. Вклад поперечных волн в формирование возмущений ослабевает с увеличением скорости, и при $v = 1.8 \cdot 10^{-2} C$ их влияние в волновом следе ощущается в основном вдоль трассы движения. Перед первым хребтом в направлении движения заметно незначительное локализованное понижение уровня поверхности скачка плотности. Такая структура возмущений на разделе слоев характерна и при отсутствии льда, и в ледовых условиях (рис. 9.13). Ледяной покров, воздействуя лишь на амплитудные характеристики возмущений, уменьшает высоту гребня и сглаживает рельеф дна впадины за ним.

Возмущения, формируемые на поверхности бассейна и на разделе слоев за счет неоднородности жидкости при $v = 1.8 \cdot 10^{-2} C$, в качественном отношении отличаются только тем, что фазы колебаний у них противоположные, а локализованные впадины вдоль трассы движения на разделе слоев не проявляются на поверхности. Амплитуды внутренних волн и их проявлений на границе лед-вода убывают с ростом толщины льда.

При $v > C_0$ поперечные внутренние волны не возбуждаются и возмущения, обусловленные неоднородностью жидкости в дальней зоне, формируются только продольными волнами. В ближней зоне за нагрузкой локализованное поднятие на поверхности скачка плотности (рис. 9.14) и понижение на границе лед-вода (рис. 9.15), как и при $v < C_0$ переходят соответственно в гребень и впадину гиперболической формы. Однако угол между гребнем (впадиной) и трассой перемещения давлений меньше, чем для $v < C_0$. С ростом v этот угол и высота гребня (глубина впадины) убывают. Незначительное понижение (поднятие), наблюдающееся для $v < C_0$ перед нагрузкой при скорости $v > C_0$ приоб-

ретает вид впадины (гребня) гиперболической формы с локализованными ложбинами (холмами), вершины которых расположены по бокам от локализованного возмущения за нагрузкой. Перед нагрузкой как по трассе движения, так и вне ее возмущений практически нет. Такая структура топографий возмущений для $v > C_0$ характерна при отсутствии льда и в ледяных условиях. Влияние льда проявляется в слабом уменьшении амплитуд в волновом следе и незначительной деформации структуры возмущений в малой окрестности трассы.

Таким образом, в каждом из рассматриваемых диапазонов скорости перемещения области давлений ледяной покров уменьшает амплитуды возмущений. Причем его влияние сильнее сказывается на генерируемых корабельных внутренних волнах, чем на возмущениях непосредственно под движущейся областью давлений. При этом качественные изменения в топографии возмущений под влиянием льда незначительны.

Вклад, вносимый внутренними волнами в топографию возмущений на границе лед-вода, мал по сравнению с вкладом поверхностных волн. В то же время в топографии возмущений на границе раздела слоев существенны вклады как поверхностных, так и внутренних волн. Влияние поверхностных возмущений заметно проявляется перед движущейся областью давлений, а внутренних – за ней.

ГЛАВА 10. ВОЛНЫ В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МОРЕ

10.1. Волны от периодических возмущений в море со слоем скачка плотности

Пусть ледяной покров плавает на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, плотность которой в невозмущенном состоянии изменяется с глубиной по закону

$$\rho_0(z) = \begin{cases} \rho^0 = \text{const}, & z_1 \leq z \leq 0, \\ \rho^0 \exp[-\Gamma(z - z_1)], & z_2 \leq z \leq z_1, \\ \rho^0 \exp[-\Gamma(z_2 - z_1)], & -H \leq z \leq z_2, \end{cases}$$

соответствующему трехслойной плотностной модели [99]. Толщина верхнего слоя H_1 , слоя скачка плотности H_2 , а нижнего слоя H_3 . При этом $z_1 = -H_1$, $z_2 = -(H_1 + H_2)$, $z_3 = -H$, $H = H_1 + H_2 + H_3$. Проведем анализ влияния льда на волновое движение, генерируемое периодическими поверхностными давлениями $P = p_0 f(x, y) \cos \sigma t$. Исследование выполним в предположениях линейной теории волн, исходя из уравнений движения [105, 115]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Omega v &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \Omega u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + g \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

и граничных условий

$$\begin{aligned} D_1 \nabla^4 \zeta + \chi_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta - \frac{1}{\rho^0 g} p(x, y, 0, t) &= -\frac{1}{\rho^0 g} P, \\ w(x, y, 0, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad w(x, y, -H, t) &= 0, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где $p(x, y, z, t)$ и $\rho(x, y, z, t)$ – динамические добавки давления и плотности, H – глубина моря, $\Omega = 2\omega \sin \varphi$ – параметр Кориолиса, ω – угловая скорость вращения Земли, φ – географическая широта (положительная к северу от экватора), ζ – прогиб льда или возвышение поверхности лед-вода, ось z направлена вертикально вверх, начало координат выбрано на

невозмущенной поверхности лед-вода, $\chi_1 = \rho_1 h / (\rho^0 g)$, $D_1 = D / (\rho^0 g)$, ρ_1 , h – плотность и толщина льда, а обозначения D и ∇^4 приведены в (4.3).

Кроме того, на границах раздела слоев ($z = z_1$, $z = z_2$) будем удовлетворять условия непрерывности давления и вертикальной составляющей скорости.

Считая искомые функции периодическими по времени t и применяя к системе (10.1) и граничным условиям (10.2) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x , y , получим для определения трансформанты Фурье $W(z)$ функции w обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{r^2 \rho_0}{\sigma^2 - \Omega^2} (N^2 - \sigma^2) W = 0, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \quad (10.3)$$

с граничными условиями

$$\frac{dW}{dz} - \frac{g}{\sigma^2} \eta^2 D_0 W = -\frac{i p_0}{\sigma \rho_0} \eta^2 f^*(m, n), \quad z = 0,$$

$$W = 0, \quad z = -H,$$

где $\eta = r\delta$, $\delta = \sigma / \sqrt{\sigma^2 - \Omega^2}$, $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $D_0 = D_1 r^4 - \chi_1 \sigma^2 + 1$, N – частота Вайселя-Брента, $f^*(m, n)$ – преобразование Фурье функции $f(x, y)$. При этом условия непрерывности давления и вертикальной составляющей скорости на внутренних границах $z = z_1$ и $z = z_2$ перейдут в условия непрерывности W и dW/dz .

Из уравнения (10.3) после удовлетворения граничных условий и применения формулы обращения получим такое выражение

$$w = \frac{i \sigma p_0}{2 \pi \rho^0 g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Delta} \eta \psi f^*(m, n) \exp[i(mx + ny - \sigma t)] dm dn, \quad (10.4)$$

$$\Delta = \left(\eta D_0 \operatorname{th} \eta H_1 - \frac{\sigma^2}{g} \right) \Delta_1 + \left(\eta D_0 - \frac{\sigma^2}{g} \operatorname{th} \eta H_1 \right) \Delta_2,$$

$$\Delta_1 = \left[\frac{1}{2} \Gamma + \left(1 - \frac{g}{\sigma^2} \Gamma \right) \eta \operatorname{th} \eta H_3 \right] \operatorname{th} \eta H_2 + \gamma, \quad \Delta_2 = \Delta_3 \operatorname{th} \eta H_2 + \gamma \operatorname{th} \eta H_3,$$

$$\Delta_3 = \eta - \frac{1}{2} \Gamma \operatorname{th} \eta H_3, \quad \gamma = \left[\frac{1}{4} \Gamma^2 + \left(1 - \frac{g}{\sigma^2} \Gamma \right) \eta^2 \right]^{1/2},$$

$$\psi = \psi_j \quad \text{при} \quad z_j \leq z \leq z_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\psi_1 = [\Delta_2 \operatorname{ch} \eta(z - z_1) + \Delta_1 \operatorname{sh} \eta(z - z_1)] \operatorname{ch}^{-1} \eta H_1,$$

$$\psi_2 = [\Delta_3 \operatorname{sh} \gamma(z - z_2) + \gamma \operatorname{th} \eta H_3 \operatorname{ch}(z - z_2)] (\operatorname{ch} \eta H_1 \operatorname{ch} \gamma H_2)^{-1} \exp \left[\frac{1}{2} \Gamma(z - z_1) \right],$$

$$\psi_3 = \gamma [\operatorname{ch} \eta H_1 \operatorname{ch} \gamma H_2 \operatorname{ch} \eta H_3 \exp(\varepsilon/2)]^{-1} \operatorname{sh} \eta(z + H),$$

$$\varepsilon = \Gamma H_2, \quad z_0 = 0, \quad z_3 = -H,$$

$$f^*(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(mx + ny)] dx dy.$$

Если к поверхности ледяного покрова прикладываются давления вида $p = p_0 f(x) \cos \sigma t$, то

$$w = \frac{ip_0 \sigma}{\rho^0 g \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{\Delta} \psi f^*(r) \exp[irx - \sigma t] dr, \quad (10.5)$$

$$f^*(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-irx) dx,$$

а все другие обозначения те же, что и в (10.4).

При осесимметричном распределении возмущений интеграл (10.4) для больших R с ошибкой порядка $R^{-3/2}$ перепишем так

$$w = \frac{ip_0 \sigma}{\rho^0 g} \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{r} \eta}{\Delta(r)} \psi f^*(r) \cos\left(rR - \frac{\pi}{4}\right) dr \exp(-i\sigma t), \quad (10.6)$$

$$f^*(r) = \int_0^{\infty} R f(R) J_0(rR) dR, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Вычисление интегралов (10.5), (10.6) проведем методом контурного интегрирования.

Пусть

$$\sigma > \Omega, \quad \sigma > \sqrt{\Gamma g}. \quad (10.7)$$

Уравнение

$$\Delta(r) = 0 \quad (10.8)$$

при этом условии имеет только два вещественных корня $r = \pm r_0$. Из (10.6) в данном случае находим

$$w = -A(r_0, z) \cos \theta_0, \quad \zeta = \sigma^{-1} A(r_0, z) \sin \theta_0, \quad (10.9)$$

где

$$A = \frac{p_0 \sigma}{\rho^0 g} \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \frac{\psi(r, z)}{\Delta'(r)} \sqrt{r} \eta f^*(r), \quad \theta_0 = r_0 R - \sigma t - \frac{\pi}{4}, \quad (10.10)$$

штрих означает дифференцирование по r . Для плоских волн

$$u = -r_0^{-1} A_z(r_0, z) \sin \theta_0, \quad (10.11)$$

а w и ζ определяются по формулам (10.9) с той лишь разницей, что

$$A = \frac{p_0 \sigma}{\rho^0 g} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta'(r)} \eta f^*(r) \psi(r, z), \quad \theta_0 = r_0 x - \sigma t. \quad (10.12)$$

Из формул (10.9), (10.11) следует, что периодические давления при условии (10.7) генерируют в непрерывно стратифицированном море, покрытом льдом, только одну прогрессивную волну, незатухающую с удалением от области давлений в плоском случае и затухающую как $1/\sqrt{R}$ при осесимметричном распределении давлений. Фазовая скорость v_0 и длина λ_0 этой волны определяются по формулам $v_0 = \sigma/r_0$, $\lambda_0 = 2\pi/r_0$. В случае коротких волн ($r_0 H_0 \gg 1$, $H_0 = \min H_k$, $k = 1, 2, 3$) при малых ε , χ_0 , $D_2 = D_1 \sigma^8 g^{-4}$ и в случае длинных волн при малых ε , χ_0 , $D_3 = D_1 \sigma^4 (gH)^{-2}$ величину r_0 найдем соответственно из формул

$$r_0 = \frac{\sigma^2}{g} (1 + \chi_0 - D_2), \quad r_0 = \frac{\sigma}{\delta \sqrt{gH}} \left[1 + \frac{1}{2} (\chi_0 - D_3) + \frac{\varepsilon}{4} \right], \quad \chi_0 = \chi_1 \sigma^2.$$

Для выяснения влияния ледяного покрова и неоднородности морской воды на элементы волны проводились численные расчеты при $\varphi = 70^\circ$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{2l} & \text{при } |x| \leq l, \\ 0 & \text{при } |x| > l, \end{cases} \quad (10.13)$$

значений E , ρ_1 , μ из (7.10) и

$$H_1 = 20 \text{ м}, \quad H_2 = 60 \text{ м}, \quad H_3 = 2 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad l = 10^5 \text{ м}. \quad (10.14)$$

При этом $h(m)$, $\sigma(c^{-1})$, ε изменялись в пределах

$$0 \leq h \leq 5, \quad 4.5 \cdot 10^{-2} \leq \sigma \leq 7 \cdot 10^{-1}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 10^{-2}.$$

Расчеты показали, что волна (10.9) представляет собою обычную поверхностную гравитационную волну [124], амплитуда которой затухает с глубиной. При этом плотностная стратификация жидкости мало влияет на волновое движение как самой жидкости, так и ледяного покрова. Деформация элементов волн за счет неоднородности не превышает 1%. Аналогичный результат имеет место и при экспоненциальном распределении плотности по всей глубине [56, 119] или только в верхнем слое

двухслойной непрерывно стратифицированной жидкости [57]. Что касается влияния льда на поверхностную волну, то оно зависит от частоты колебаний σ и ледовых характеристик. Сплошной лед ($E \neq 0$) при $\sigma > \sigma^0$ увеличивает, а при $\sigma < \sigma^0$ уменьшает фазовую скорость и длину волны по сравнению с соответствующими значениями для моря со свободной поверхностью. Здесь $\sigma^0 = \sqrt{g} \sqrt[6]{h/D_1}$. Увеличение толщины битого льда приводит к уменьшению v_0 и λ_0 при любых значениях σ . Однако при $\lambda_0 > 2H$ изменения v_0 и λ_0 , обусловленные наличием как сплошного, так и битого льда, оказываются меньше 1%. Количественную иллюстрацию зависимости v_0 и λ_0 от толщины сплошного льда при $\varepsilon = 10^{-3}$ дает табл. 10.1. Видно, что при $\sigma = 0.6 \text{ с}^{-1}$ скорость и длина волны в море, покрытом сплошным льдом толщиной 5 м, больше, чем в море со свободной поверхностью почти на 67%. Но уже на частоте $\sigma = 0.2 \text{ с}^{-1}$, при которой $\lambda \approx 1.4H$, наличие льда толщиной 5 м приводит к уменьшению v_0 и λ_0 примерно на 1.6%.

Пусть теперь

$$\Omega < \sigma < \sqrt{Gg}. \quad (10.15)$$

При этом условии уравнение (10.8) имеет бесконечное число действительных корней $r = \pm r_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Вычисляя интегралы (10.5), (10.6), получим

$$w = - \sum_{n=0}^{\infty} A(r_n, z) \cos \theta_n, \quad \zeta = \sigma^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A(r_n, 0) \sin \theta_n, \quad (10.16)$$

Таблица 10.1

v_0 , м/с	λ_0 , м	h , м	$\sigma \cdot 10$, с^{-1}
48.23	1514	5	2
48.53	1524	3	
49.04	1539	0	
32.25	675.2	5	3
31.03	672.0	3	
32.69	684.5	0	
27.27	285.4	5	6
21.86	228.8	3	
16.35	171.1	0	

где в плоском случае $\theta_n = r_n x - \sigma t$, в осесимметричном $\theta_n = r_n R - \sigma t - \pi/4$, а величина A определяется соответственно по формулам (10.12), (10.10). Горизонтальную составляющую скорости плоских волн найдем из

$$u_n = -r_n^{-1} A_z(r_n, z) \sin \theta_n. \quad (10.17)$$

Из формул (10.16), (10.17) следует, что при выполнении условия (10.15) волновое движение, генерируемое в море периодическими давлениями, представляет собой суперпозицию бесконечного спектра незатухающих с расстоянием в плоском и затухающих как $1/\sqrt{R}$ в осесимметричном случае волн (мод), соответствующих значениям r_n $n = 0, 1, 2, \dots$. Нулевая мода, отвечающая r_0 , есть обычная поверхностная волна, затухающая с глубиной. Моды с номером $n \geq 1$ представляют собою чисто внутренние волны, обусловленные только плотностной стратификацией. В однородных слоях вертикальная составляющая скорости w_n моды внутренних волн с номером n монотонно изменяется с глубиной. В верхнем слое вблизи поверхности лед-вода w_n ($n \geq 1$) переходит через нулевое значение. Ниже этой глубины w_n растет (по модулю) в верхнем и убывает в нижнем слоях. В слое скачка она имеет n примерно равных между собой экстремумов [154] и принимает $(n-1)$ раз нулевое значение. При этом верно соотношение

$$w_n(0)/w_n(-H_1) = \left[(1 - g\eta_n D_0 \sigma^{-2} \operatorname{th} \eta_n H_1) \operatorname{ch}^{-1} \eta_n H_1 \right]^{-1}, \quad \eta_n = \eta(r_n).$$

Отсюда видно, что при $n \rightarrow \infty$ отношение амплитуды w_n на поверхности лед-вода к амплитуде w_n на нижней границе верхнего слоя уменьшается до нуля.

Под воздействием мод внутренних волн формируется и вид поверхности лед-вода (или прогиб льда ζ) [58], что подтверждается и данными экспериментальных наблюдений [9, 85, 122, 127, 131, 134]. Для количественной оценки влияния ледяного покрова и плотностной стратификации жидкости на волновые характеристики проводились численные расчеты для ряда значений $\sigma(\text{с}^{-1})$, функции $f(x)$ вида (10.19), значений параметров из (7.10), (10.14), ε , равных 0 , $2 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-3}$ и $h = 0$, 3.5 м. Анализ результатов показал, что влияние неоднородности жидкости на элементы поверхностной волны ($n = 0$) незначительно. Элементы мод внутренних волн ($n \geq 1$) практически не зависят от характеристик льда. Величины r_n можно с хорошим приближением определить из тех же формул, что и при периодических колебаниях в бассейне со свободной от льда поверхностью [63]. Фазовые скорости $v_n = \sigma/r_n$ и длины $\lambda_n = 2\pi/r_n$ мод внутренних волн, монотонно убывающие до нуля при $n \rightarrow \infty$, увеличиваются с ростом ε . Например, при $\sigma = 3.625 \cdot 10^{-4} \text{с}^{-1}$ и $h = 0$ изменение ε от $2 \cdot 10^{-3}$ до $5 \cdot 10^{-3}$ приводит к увеличению v_n и λ_n первых трех мод ($n = 1, 2, 3$) примерно на 58%. Определяющий вклад вносит плотностная стратификация и в вертикальное распределение поля скорости волнового движения. Если для $\varepsilon = 0$ амплитуда вертикальной составляющей скорости волнового возмущения монотонно убывает с

глубиной, то при $\varepsilon > 0$ она, как и в море со свободной поверхностью, достигает максимального значения внутри жидкости. В частности, при $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ максимальное значение функции $\bar{A}(z)$, представляющей собою сумму модулей амплитуд мод внутренних волн, достигается для $\sigma \leq 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ либо на нижней границе слоя скачка плотности, либо внутри этого слоя. Причем величина $\max \bar{A}(z)$ может во много раз превышать значение $\bar{A}(0)$, что характерно при периодических возмущениях и для других законов изменения плотности жидкости с глубиной.

Оценка горизонтальной составляющей скорости $\bar{B}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |r_n^{-1} A_z(r_n, z)|$ в

верхнем и нижнем однородном слоях фактически не меняется с глубиной, сохраняя постоянное значение. Причем $\bar{B}(0)$ для $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ может в десятки раз превышать величину амплитуды горизонтальной составляющей скорости в однородной жидкости. В среднем стратифицированном слое поведение $\bar{B}(z)$ существенно зависит от перепада плотности и частоты колебаний. Это иллюстрируется рис. 10.1, где приведена с точностью до множителя $\frac{P_0}{\rho_0 g} \cdot 10^{-2}$ за-

висимость $\bar{B}$ от z для $x = 3 \cdot 10^5 \text{ м}$, $\sigma = 2.9 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ (кривая 1), $\sigma = 1.45 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ (кривая 2), $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ (сплошные линии), $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ (штриховые линии). Видно, что при $\sigma = 2.9 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ и обоих значениях ε функция $\bar{B}(z)$ монотонно убывает с глубиной среднего слоя.

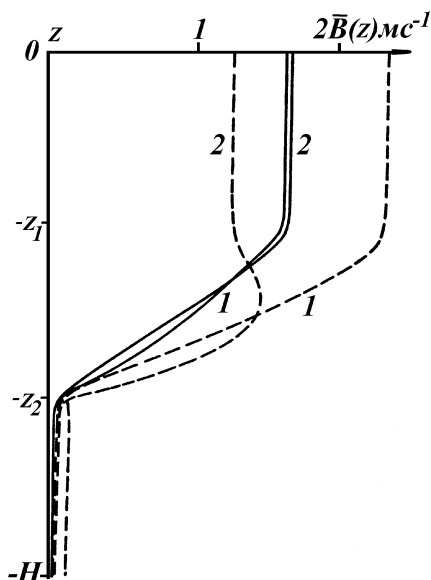


Рис. 10.1

Аналогичная картина наблюдается и при $\sigma = 1.45 \cdot 10^{-4} \text{с}^{-1}$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$, а при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ функция $\bar{B}(z)$ имеет внутри слоя скачка один экстремум, находящийся на глубине 45 м и превышающий $\bar{B}(0)$ примерно на 18%. Минимальное значение $\bar{B}(z)$ отмечается на нижней границе слоя скачка. В табл. 10.2 для иллюстрации даны значения $\bar{B}(z)$ на поверхности лед-вода ($z = 0$) и на нижней границе стратифицированного слоя ($z = z_2$). Из этих данных следует, что изменение ε от нуля до $5 \cdot 10^{-3}$ приводит к увеличению $\bar{B}(0)$ почти в 36 раз. Влияние неоднородности на значение $\bar{B}(z_2)$ менее значительно.

Таблица 10.2

$\varepsilon \cdot 10^3$	$\bar{B}(0)$	$\bar{B}(z_2)$
0	6.97	6.97
2	166.00	11.70
5	251.00	13.70

10.2. Асимптотический анализ трехмерных волновых возмущений при движении области постоянных давлений в условиях экспоненциальной плотностной стратификации

Рассмотрим волновые возмущения, генерируемые движущейся по ледяному покрову областью давлений (4.1) при экспоненциальном

$$\rho_0(z) = \rho^0 \exp(-\Gamma z), \quad \rho^0 = \rho_0(0) \quad (10.18)$$

распределении плотности жидкости [6, 77, 114, 129, 141] в бассейне конечной глубины H . В начальный момент времени жидкость находится в состоянии покоя, а поверхность лед-вода горизонтальна. Давления начинают движение с момента $t = 0$. Выполним анализ влияния ледяного покрова на возбуждаемые волновые возмущения и оценим изгибные деформации льда, вносимые проявлениями внутренних волн.

В системе координат x_1, y , связанной с движущейся областью давлений, задача сводится к решению уравнений движения жидкости

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = -\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mathcal{L}v = -\frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mathcal{L}w = -\frac{1}{\rho_0(z)} \left(g\rho + \frac{\partial p}{\partial z} \right), \\ \mathcal{L}\rho + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0, \quad \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} (D_1 \nabla^4 + 1 + \chi_1 \mathcal{L}^2) \zeta - p_1 = -af(x, y), \quad w = \mathcal{L}\zeta, \quad z = 0, \\ w = 0, \quad z = -H; \quad u = v = w = \zeta = 0, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Здесь

$$\{p_1, a, D_1, \chi_1\} = \frac{1}{\rho^0 g} \{p, p_0, D, \chi\},$$

u, v, w – компоненты вектора скорости волновых возмущений по координатным осям x, y, z ; p, ρ – возмущения давления и плотности воды. Обозначения D, h, ρ_1 те же, что и в 10.1. Индекс 1 у χ_1 опущен.

Применяя для решения задачи (10.19) – (10.20) комплексное преобразование Фурье по горизонтальным координатам и преобразование Лапласа по времени, для трансформанты W вертикальной скорости волновых возмущений жидкости получаем задачу [40]

$$\begin{cases} F^2 [\rho_0(z) W_z]_z - [(rF)^2 \rho_0(z) - gr^2 (\rho_0)_z] W = 0, & -H < z < 0, \\ r^2 g (D_0 + \chi_1 F^2) W + F^2 W_z = r^2 g F a f^*(m, n), & z = 0; W = 0, z = -H, \end{cases} \quad (10.21)$$

где $D_0 = D_1 r^4 + 1$, $F = \alpha + i \omega m$, $r^2 = m^2 + n^2$, m, n – переменные Фурье, $f^*(m, n)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$, α – параметр преобразования Лапласа, индекс z означает производную по z .

Решая (10.21) и применяя обратные интегральные преобразования при осесимметричном распределении давлений, с учетом кинематического условия, связывающего амплитуду ζ^* вертикального смещения изопикнической поверхности $z = z^*$ с вертикальной скоростью лежащих на ней частиц жидкости, получим в полярных координатах

$$\zeta^* = \frac{a}{4\pi^2 i} \int_0^\infty dr \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{r f^*(r) \text{sh}[qr(z^* + H)] \exp[iRr \cos(\theta - \gamma) + \alpha t] d\alpha}{\alpha S(r, \theta, \alpha)} \quad (10.22)$$

$$S(r, \theta, \alpha) = D_0 \text{sh}(qrH) + F^2 [g(rg)^{-1} + \chi_1 \text{th}(qrH)] \text{ch}(qrH),$$

$$q = [1 + (N/F)^2]^{1/2}, \quad N(z) = \left[-\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0}{dz} \right]^{1/2}, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

$$x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta, \quad \omega > 0.$$

Отметим, что $\zeta^* = \zeta$ для $z^* = 0$.

Внутренний интеграл по α вычисляется с помощью теории вычетов. Полюсами являются точки $\alpha = 0$ и $\alpha = \alpha_l = F_l - i\alpha^*$. Здесь $F_l = i\sigma_l$ – корни уравнения $S = 0$, $\alpha^* = \omega r \cos \theta$, $l = 0, 1, 2, \dots$. При этом $\sigma_0 > \sigma_1 > \dots > \sigma_l > 0$. Величина σ_0 соответствует собственной частоте поверхностных волн, а σ_l при $l \geq 1$ – собственной частоте внутренней моды с номером l .

Применив теорему Коши, из (10.22) получим

$$\zeta^* = \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty r f^*(r) dr \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left(K_0 - \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=1}^2 K_{lk} \right) e^{iRr \cos(\zeta - \gamma)} d\theta, \quad (10.23)$$

где

$$K_0 = \text{sh}[q_0 r (z^* + H)] S_0^{-1}, \quad q_0 = [1 - (N/\alpha^*)^2]^{1/2},$$

$$S_0 = D_0 \operatorname{sh}(q_0 r H) - (\alpha^*)^2 [q_0 (r g)^{-1} + \chi_1 \operatorname{th}(q_0 r H)] \operatorname{ch}(q_0 r H),$$

$$K_{lk} = \alpha_{lk}^{-1} \operatorname{sh} \{ r(z^* + H) [1 - (N/\sigma_l)^2]^{1/2} \} \left[\frac{\partial S}{\partial F} \right]_{F=i\sigma_l}^{-1} e^{i\alpha_{lk} t},$$

$$\alpha_{lk} = \alpha^* + (-1)^k \sigma_l.$$

Для поверхностной моды ($l = 0$) имеем $\sigma_0 \gg N$, где $\sigma_0 \approx [rgD_0 \operatorname{th} rH (1 + \chi_1 r^2 gH)^{-1}]^{1/2}$. Анализ трехмерных поверхностных волн в море с ледяным покровом проведен в главе 4. Влияние неоднородности жидкости на изгибные деформации льда и возмущения под ним, обусловленные поверхностными волнами, мало (см. раздел 10.1)

Для внутренних мод ($l \geq 0$) из уравнения $S = 0$ найдем

$$\operatorname{tg} q_1 = \varepsilon q_1 \{ D_0 [q_1^2 + (rH)^2] - \varepsilon \chi_1 r^2 gH \}^{-1}. \quad (10.24)$$

Здесь $\varepsilon = \Gamma H$, $q_1 = iqrH$. Считая ε малым параметром, представим q_1 в виде

$$q_1 = \mu_0 + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \dots$$

Тогда из (10.24) получаем

$$\begin{aligned} \mu_0 = \pi l, \quad \mu_1 = \frac{\pi l}{D_0 \xi_l}, \\ \mu_2 = \pi l \frac{(rH)^2 - (\pi l)^2 + \chi_1 r^2 gH \xi_l}{D_0^2 \xi_l^3}, \quad \xi_l = (\pi l)^2 + (rH)^2. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Так как

$$\frac{q_1}{rH} = \left[\left(\frac{N}{\sigma_l} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad \text{то } \sigma_l = N \left[\left(\frac{q_1}{rH} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \approx NrH \xi_l^{-1/2}.$$

Выражение для K_{lk} имеет вид

$$K_{lk} = \sin \left[r(z^* + H) \sqrt{(N/\alpha_{lk})^2 - 1} \right] \left[(\varphi_{lk} + \psi_{lk}) \cos(rH \sqrt{(N/\alpha_{lk})^2 - 1}) \right]^{-1} e^{i\alpha_{lk} t},$$

$$\varphi_{lk} = (D_0 - \chi_1 \alpha_{lk}^2) rH \left[N^2 / (\alpha_{lk} \sqrt{N^2 - \alpha_{lk}^2}) \right] \left[1 + \alpha_{lk}^2 (N^2 - \alpha_{lk}^2) (D_0 - \chi_1 \alpha_{lk}^2)^{-2} \right],$$

$$\psi_{lk} = 2(rg)^{-1} \alpha_{lk} \sqrt{N^2 - \alpha_{lk}^2} D_0 (D_0 - \chi_1 \alpha_{lk}^2)^{-1}.$$

В подынтегральном выражении (10.23) на пути интегрирования по θ может быть счетное число полюсов θ_i^l — корней уравнения $S_0(\theta) = 0$, где l характеризует номер моды внутренних волн, а i — номер полюса для заданной моды. Из (10.24), (10.25) после замены q_1 на μ_0 получим $\cos \theta_i^l = \pm \sigma_l (rv)^{-1}$. Отсюда для фиксированного l

$$\theta_{1,2}^l = \pm \arccos \frac{NH}{v\sqrt{\mu_0^2 + (rH)^2}}, \quad \theta_{3,4}^l = \pm \arccos \frac{NH}{v\sqrt{\mu_0^2 + (rH)^2}} + \pi$$

при условии $NH \leq v\sqrt{\xi_l}$. Для $v \geq v_l$ это условие выполняется при любом r , а для $v < v_l$ — при $r > r_l$, где $r_l = [(N/v)^2 - (\pi l/H)^2]^{1/2}$, $v_l = NH(\pi l)^{-1}$. Следовательно, в зависимости от r и v на пути интегрирования по θ будут лишь полюса, соответствующие $l \geq l_0$, где $l_0 = [H\pi^{-1}\sqrt{(N/v)^2 - r^2}] + 1$.

Так как особенности слагаемых в интеграле по θ погашаются, то исходный путь интегрирования можно деформировать в контур L_0 , обходящий в комплексной плоскости корни $\theta_{1,2}^l$ по малым полуокружностям, на которых $\text{Re}(i\alpha_{l1}) > 0$, а корни $\theta_{3,4}^l$ — по полуокружностям, где $\text{Re}(i\alpha_{l2}) > 0$.

Перепишем ζ^* в виде

$$\zeta^* = \frac{a}{2\pi} \left(J_0 - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^2 J_{lk} \right), \quad (10.26)$$

$$J_0 = \int_0^{\infty} \int_{L_0} r f^*(r) K_0 e^{iRr \cos(\theta-\gamma)} d\theta dr, \quad J_{lk} = \int_0^{\infty} \int_{L_{lk}} r f^*(r) K_{lk} e^{i[Rr \cos(\theta-\gamma) - \alpha_{lk}t]} d\theta dr,$$

где L_0 обходит полюса $\theta_{1,4}^l$ снизу, а $\theta_{2,3}^l$ — сверху. Направления обходов для L_{l1} и L_{l2} совпадают с направлением для L_0 . Однако контур L_{l1} обходит только $\theta_{1,2}^l$, а L_{l2} — только $\theta_{3,4}^l$ при соответствующем l . Так как J_{lk} стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ для любого R , то интеграл J_0 описывает установившееся движение, а J_{lk} — процесс развития волновых возмущений.

Дополним исходные пути интегрирования в J_0 и J_{lk} до замкнутого с учетом условий $\text{Re}[iRr \cos(\theta-\gamma)] < 0$ и $[iRr \cos(\theta-\gamma) - i\alpha_{lk}t] < 0$ соответственно, обеспечивающих затухание амплитуды волновых возмущений на бесконечности.

Внутри замкнутых контуров, построенных на L_{lk} и L_0 , содержатся одни и те же полюса, если $\text{sign}[Rr \sin(\theta-\gamma)] = \text{sign}[Rr \sin(\theta-\gamma) + \frac{d\alpha_{lk}}{d\theta}t]$.

Это равенство выполняется при $R/t > u_{lk}$, $u_{lk} = (d\alpha_{lk}/d\theta)[r \sin(\gamma-\theta)]^{-1}$.

Следовательно, для $R > u_{lk}t$ интегралы J_0 и J_{lk} компенсируют друг друга с точностью до возмущений, затухающих с расстоянием как $O(R^{-1})$. В области $R < u_{lk}t$, согласно теореме Коши, вычеты в полюсах

θ_k^l дают установившееся волновое движение, описываемое интегралом J_0 . Таким образом, величина u_{lk} характеризует скорость переднего фронта волнового возмущения, обусловленного вычетом в полюсе θ_k^l .

Определяя вычеты, из (10.26) при $0 \leq \gamma \leq \pi$ найдем

$$\zeta^* = i\pi a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 I_{jl} + O(R^{-1}), \quad (10.27)$$

$$I_{1l} = \begin{cases} \int_{r_l}^{\infty} \Phi_{1l} dr, & F_1 < (\pi l)^{-1}, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/2, \\ \int_{r_l}^{r_l^*} \Phi_{1l} dr, & F_1 < (\pi l)^{-1}, \quad \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi, \\ \int_0^{\infty} \Phi_{1l} dr, & F_1 > (\pi l)^{-1}, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/2, \\ \int_0^{r_l^*} \Phi_{1l} dr, & F_1 > (\pi l)^{-1}, \quad \pi/2 < \gamma < \pi - \gamma_l^*, \\ 0, & F_1 > (\pi l)^{-1}, \quad \pi - \gamma_l^* \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$I_{2l} = \begin{cases} \int_{r_l^*}^{\infty} \Phi_{2l} dr, & F_1 < (\pi l)^{-1}, \quad 0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{\infty} \Phi_{2l} dr, & F_1 > (\pi l)^{-1}, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_l^*, \\ \int_{r_l^*}^{\infty} \Phi_{2l} dr, & F_1 > (\pi l)^{-1}, \quad \gamma_l^* < \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$\Phi_{jl} = \begin{cases} \frac{l r f^*(r) \exp\{i R r [\cos \gamma + (-1)^i \xi_l^* \sin \gamma] / (F_1 \sqrt{\xi_l})\}}{D_0 \xi_l \xi_l^*} G_l(r, z^*), & R < u_{lj} t, \\ 0, & R \geq u_{lj} t, \end{cases}$$

$$G_l(r, z) = \begin{cases} (-1)^{l+1} \sin[\pi l(z/H + 1)] + O(\varepsilon), & z < z_l, \\ \pi l(z_l - z)/H + O(\varepsilon^2), & z \geq z_l, \end{cases}$$

$$F_1 = \nu(NH)^{-1}, \quad \xi_l^* = (F_1^2 \xi_l - 1)^{1/2}, \quad z_l = -\varepsilon H (D_0 \xi_l)^{-1},$$

$$r_l^* = [(F_1 \cos \gamma)^{-2} - (\pi l)^2]^{1/2} H^{-1}, \quad \gamma_l^* = \arccos[(\pi l F_1)^{-1}].$$

Дальнейший анализ интегралов (10.27) проведем методом стационарной фазы. В результате для амплитуды возмущения вдоль линии равной фазы заданной моды l получим выражение

$$A(r, z^*) = a |G_l(r, z^*)| \frac{2\sqrt{2} r^2 f^*(r)}{D_0 \sqrt{|3\xi_l \xi_l^* - (rH)^2| K}}, \quad (10.28)$$

где $0 \leq r < \infty$, если $F_1 \geq (\pi l)^{-1}$, и $r_l \leq r < \infty$, если $F_1 < (\pi l)^{-1}$.

Уравнение линии равной фазы можно записать в параметрическом виде

$$R_0(r) = 3K \{F_1^2 \xi_1^3 - (\pi l)^2 [(rH)^2 + \xi_l]\} (4r^3 H^2)^{-1}, \quad (10.29)$$

$$\gamma_0(r) = \arctg \{(\pi l)^2 \xi_l^* [(F_1 \xi_l)^2 - (\pi l)^2]^{-1}\}.$$

Если $G_l(r, z^*) < 0$, то для гребней и впадин K принимает соответственно значения $(5+8\kappa)$ и $(1+8\kappa)$ при $dR_0/dr > 0$.

В случае $dR_0/dr < 0$ значения K равны $(7+8\kappa)$ для гребней и $(3+8\kappa)$ для впадин. Здесь $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ Указанные K для гребней и впадин будут характеризовать впадины и гребни, если $G_l(r, z^*) > 0$.

Границу зоны возмущений определяют $\gamma_0(r)$ из (10.29) и

$$R^*(r) = \{1 - (\pi l / F_1)^2 [\xi_l + (rH)^2] \xi_l^{-3}\}^{1/2} \nu t. \quad (10.30)$$

Видно, что характеристики льда практически не влияют на r_l , $R_0(r)$, $R^*(r)$, $\gamma_0(r)$, а следовательно и на фазовую структуру внутренних волн. Величина z_l в ледовых условиях может уменьшиться.

При $F_1 < (\pi l)^{-1}$ волновое возмущение рассматриваемой моды формируется в угловой зоне $0 \leq \gamma \leq \gamma_0^l$ системами поперечных ($dR_0/dr > 0$) и продольных ($dR_0/dr < 0$) волн типа корабельных, фронтальные зоны которых удаляются от эпицентра давлений со скоростью u_{11} .

Здесь

$$\gamma_0^l = \arctg \frac{3(\pi l F_1)^2 + \sqrt{4 - 3(\pi l F_1)^2} - 2}{4\sqrt{[4 - 3(\pi l F_1)^2 + 1][1 - (\pi l F_1)^2]}}. \quad (10.31)$$

При $\gamma_0 = \gamma_0^l$ волновые возмущения затухают с расстоянием как $O(R^{-1/3})$.

В случае $F_1 > (\pi l)^{-1}$ в зоне волнового следа $0 \leq \gamma < \gamma_0^l$, где

$$\gamma_0^l = \arcsin[(\pi l F_1)^{-1}], \quad R < R^*(\gamma), \quad (10.32)$$

обусловленные модой l возмущения формируются только продольными корабельными волнами. Отметим, что рассмотренная волновая картина симметрична относительно трассы перемещения давлений.

Формулы (10.28), (10.29) показывают, что $R_0 \rightarrow \frac{\pi R_1 K H}{4}$ и $\gamma \rightarrow 0$

при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, линии равной фазы продольных волн в следе касаются трассы. Кроме того, при сосредоточенных давлениях амплитуда возмущений, обусловленных продольными волнами в следе вдоль трассы, равна нулю на свободной или покрытой битым льдом поверхности бассейна и отлична от нуля в жидкости под трассой, так как

$$A(r, z^*) \rightarrow (-1)^{l+1} \left(\frac{2}{3K} \right)^{1/2} \frac{a_0}{\pi F_1} \sin \left[\pi l \left(\frac{z^*}{H} + 1 \right) \right] \text{ при } r \rightarrow \infty, D = 0. \text{ В бас-}$$

сейне с упругим сплошным льдом ($D \neq 0$) амплитуда таких возмущений нулевая как на трассе, так и под ней ($A(r, z^*) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$).

Для количественной оценки влияние изгибной жесткости льда на амплитуды внутренних волн и их проявлений в изгибных колебаниях льда проводились численные расчеты при значениях параметров льда (4.13) для $H = 100$ м, $\varepsilon = 0.001$, $\rho_0(0) = 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $\rho_0(2\pi)^{-1} \cdot 100 \text{ Па}$, $t = 10^3 \text{ с}$ и нагрузки вида (6.5). Толщина льда изменялась в пределах $0 \div 3.5$ м. Диапазон $0.5 \div 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ изменения скорости движения области давлений выбран таким образом, чтобы проследить структурные изменения фазовой картины внутренних волн.

Анализ результатов показал, что фазовые портреты внутренних волн в ледовых условиях сохраняют такой же вид, как при отсутствии ледового покрова [87]. Для наглядности фазовая структура и зоны возмущений, обусловленных как первой ($l = 1$), так и второй ($l = 2$) модами, даны соответственно на рис. 10.2 и 10.3 при $v = 0.7 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $h = 2$ м. Здесь границы угловых зон характеризуются сплошными ($l = 1$) и штриховыми ($l = 2$) жирными линиями. Постоянные фазы (рис. 10.2) и линии передних фронтов (рис. 10.3) представлены тонкими сплошными линиями для поперечных волн, а штриховыми и штрихпунктирными – для продольных первой и второй мод соответственно. Четные линии равной фазы, считая от нагрузки, расположенной в начале координат, соответствуют гребням, а нечетные – впадинам на поверхности, где $G_l(r, z^*) < 0$. Шкала по осям x и y дана в метрах.

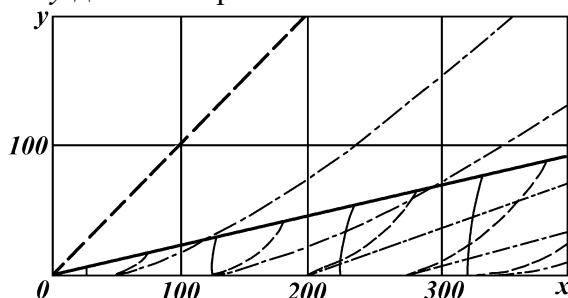


Рис. 10.2

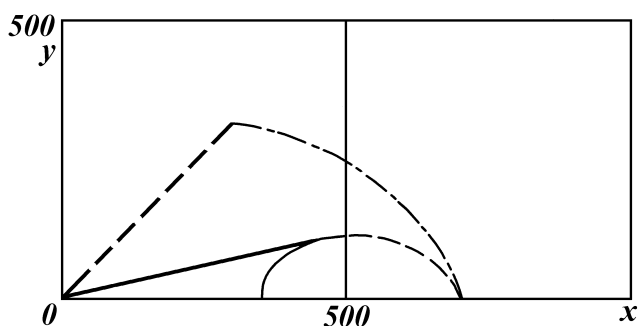


Рис. 10.3

Как и в бассейне с открытой поверхностью, соответствующие линии постоянной фазы для продольных волновых возмущений первой и второй мод на рис. 10.2 касаются оси абсцисс в одних и тех же точках. Рассматриваемое значение скорости v для первой моды попадает в докритический, а для второй (и последующих) – в сверхкритический диапазон. Отметим, что с ростом скорости в диапазоне $0 < v < v_l$, где $v_l = 0.994(\pi l)^{-1} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, угол (10.31) раствора зоны возмущений для моды с номером l увеличивается от 0 до 180° . При $v > v_l$ величина угла (10.32) монотонно убывает.

Распределение амплитуды внутренних волн вдоль линии равной фазы при $v = 0.7 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ дано на рис. 10.4, 10.5. Амплитуды поперечных (рис. 10.4, а), продольных первой (рис. 10.4, б) и второй (рис. 10.5) мод изображены сплошными, штриховыми, штрихпунктирными и пунктирными линиями соответственно для толщин льда 0, 1, 2 3.5 м. Выше оси абсцисс приведены графики максимальных значений амплитуд, достигаемых на глубинах $z^* = 50 \text{ м}$ (первая мода) и $z^* = 33.3 \text{ м}$ (вторая мода), а ниже – амплитуд деформаций поверхности бассейна, обусловленных внутренними волнами. Шкала делений дана с точностью до $\sqrt{K}$. Амплитуды внутри жидкости приведены в сантиметрах, а на поверхности – в сотых долях миллиметра. Цифры на оси абсцисс в порядке возрастания соответствуют пересечению рассматриваемой линии равной фазы с лучами, выходящими из начала координат и образующими с трассой углы $4.8^\circ, 7.5^\circ, 10.5^\circ, 12.4^\circ, 13^\circ$ (рис. 10.4, а); $0^\circ, 0.6^\circ, 2^\circ, 4.8^\circ, 9.5^\circ, 12.1^\circ, 13^\circ$ (рис. 10.4, б) и $0^\circ, 1.2^\circ, 3.9^\circ, 7.3^\circ, 11.7^\circ, 14.8^\circ, 19.2^\circ, 24.7^\circ, 34.3^\circ$ (рис. 10.5).

Максимальные по глубине значения амплитуд продольных возмущений на трассе для первой и второй мод совпадают, принимая нулевые значения при $h \neq 0$. С удалением от трассы к границам волновой зоны при отсутствии льда возмущения первой моды (в докритическом диапазоне) растут, в то время как для второй (в сверхкритическом диапазоне) убывают. Аналогичное явление имеет место и при других значениях v .

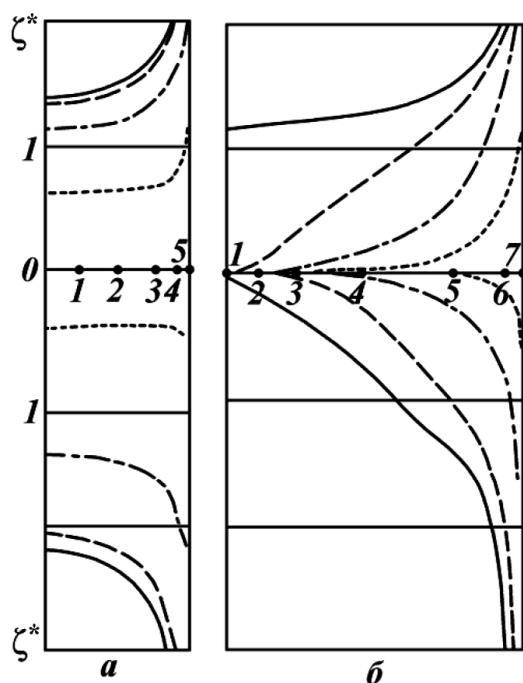


Рис. 10.4

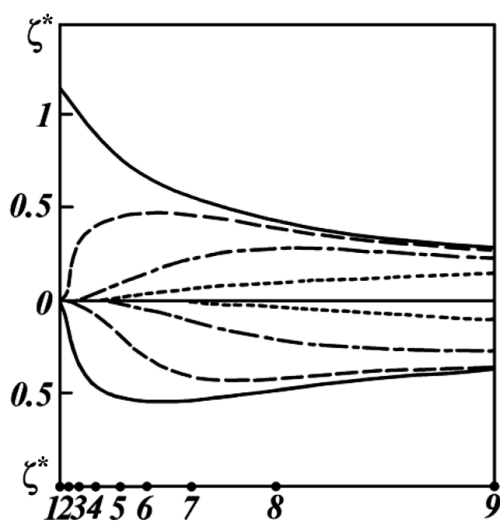


Рис. 10.5

Ледяной покров нарушает монотонность изменения амплитуды продольной волны моды с номером l вдоль линии равной фазы при $\nu > \nu_l$ таким образом, что на профиле дуги гребня (впадины) появляется экстремум (рис. 10.5). С увеличением толщины льда этот экстремум удаляется от эпицентра давлений, а его величина убывает.

При $\nu < \nu_l$ в ледовых условиях амплитуды волн с удалением от трассы монотонно возрастают (рис. 10.4, б), как и при $h = 0$. С ростом h от 0 до 3.5 м они убывают примерно в 5 раз. Амплитуды поперечных волн принимают на трассе ненулевые значения и возрастают с приближением к границе волновой зоны (рис. 10.4, а). Ледяной покров уменьшает эти амплитуды, не меняя вид распределения их вдоль линии равной фазы.

Лед практически не вносит качественных изменений и в характеристики распределения амплитуд проявлений как продольных, так и поперечных внутренних волн вдоль гребней (впадин) на поверхности бассейна, уменьшая при этом их величины. Увеличение веса нагрузки и вертикального градиента плотности жидкости приводит к росту амплитуд проявлений внутренних волн.

Отметим, что величина z_l убывает с ростом толщины льда примерно в той же пропорции, что и амплитуда соответствующей внутренней волны.

Таким образом, влияние льда проявляется в уменьшении амплитуд внутренних волн. Оно в большей мере сказывается на продольных волнах, чем на поперечных, и особенно заметно вблизи трассы перемещения области давлений, где распределение амплитуды волны вдоль линии равной фазы может претерпевать качественные изменения.

10.3. Асимптотический анализ генерируемых трехмерных возмущений при движении области постоянных давлений в условиях распределения плотности, аппроксимирующего реальную стратификацию

В случае заданного распределения невозмущенной плотности $\rho_0(z)$ при движении давлений (4.1) из (10.19), (10.20) методом интегральных преобразований получим в полярных координатах для амплитуды ζ^* вертикального смещения изопикнической поверхности $z = z^*$ выражение

$$\zeta^* = \frac{ag}{4\pi^2 i} \int_0^\infty r^3 f^*(r) dr \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} (\alpha S)^{-1} W(r, z^*, F) \exp[iRr \cos(\theta - \gamma) + \alpha t] d\alpha, \quad (10.33)$$

где

$$\begin{aligned} S(r, \theta, \alpha) &= r^2 g(D_0 + F^2 \chi_1) W(r, \theta, F) + F^2 W_z(r, 0, F), \\ W(r, z, F) &\text{ — решение краевой задачи} \\ F^2 [\rho_0(z) W_z]_z - [(rF)^2 \rho_0(z) - gr^2 (\rho_0)_z] W &= 0, \\ W(r, -H, F) &= 0, \quad W_z(r, -H, F) \neq 0. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Отметим, что $\zeta^* = \zeta$ для $z^* = 0$. Другие обозначения такие же, как и в 10.2.

После вычисления интеграла Меллина из (10.33) найдем [41]

$$\zeta^* = \frac{ag}{2\pi} \int_0^\infty r^3 f^*(r) dr \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (K_0 - \sum_{l=0}^\infty \sum_{k=1}^2 K_{lk}) \exp[iRr \cos(\theta - \gamma)] d\theta, \quad (10.35)$$

$$K_0 = W(r, z^*, i\alpha^*) S_0^{-1},$$

$$S_0 = r^2 g [D_0 - (\alpha^*)^2 \chi_1] W(r, 0, i\alpha^*) - (\alpha^*)^2 W_z(r, \theta, i\alpha^*),$$

$$K_{lk} = [\alpha_{lk} S_F(i\sigma_l)]^{-1} W(r, z^*, i\sigma_l) \exp(i\alpha_{lk} t), \quad \alpha_{lk} = \alpha^* + (-1)^k \sigma_l.$$

Здесь $\alpha^* = \nu r \cos \theta$, $F_l = i\sigma_l$ по-прежнему являются корнями уравнения $S(F) = 0$. Величина $\sigma_0 \approx (rgD_0 \operatorname{th} rH)^{1/2} (1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1/2}$ соответствует собственной частоте поверхностных волн в бассейне с ледяным покровом. Значения σ_l при $l \geq 1$ отвечают собственным частотам внутренних мод с номером l и совпадают с решениями уравнения $S_0 = 0$ относительно α^* . При этом $\sigma_0 > \sigma_1 > \dots > \sigma_l > 0$.

Представим вертикальное распределение невозмущенной плотности в виде [113]

$$\rho_0(z) = \rho_0(0)[1 + \varepsilon \varphi(z)],$$

где

$$\varepsilon = \rho_0(-H)/\rho_0(0) - 1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(-H) = 1.$$

Тогда $N^2(z) = -g\varepsilon\varphi_z + O(\varepsilon^2)$. Перейдем к безразмерным переменным

$$\{x', y', z', R', (z^*)', a', (\zeta^*)'\} = \{x, y, z, R, z^*, \alpha, \zeta^*\} H^{-1},$$

$$r' = rH, \quad D'_1 = D_1 H^{-4}, \quad \{(\alpha^*)', N', \sigma'_l\} = \{\alpha^*, N, \sigma_l\} (H/g\varepsilon)^{1/2}, \quad (10.36)$$

$$\nu' = \nu(g\varepsilon H)^{-1/2}, \quad \rho'_0(z) = \rho_0(z)\rho'_0(0), \quad \chi'_1 = \chi_1 g H^{-1}, \quad t' = t(g\varepsilon/H)^{1/2}.$$

Штрихи далее будем опускать.

Вычисление (10.35) проведем с учетом приближения Буссинеска [154], как и в разделе 10.1, методами контурного интегрирования и стационарной фазы, введя при этом обозначения

$$\theta_{1,2}^l = \mp \arccos \tau_1^l, \quad \theta_{3,4} = \pm \arccos \tau_1^l + \pi, \quad \tau_1^l = \sigma_l(r\nu)^{-1},$$

$$\nu_l = \sup_{0 \leq z \leq \infty} \beta_l(r)/r, \quad l_0 = \min \{l : \tau_1^l(r) \leq 1\}.$$

Тогда выражение для ζ^* с точностью до множителя π примет вид однократного интеграла (10.27), где

$$I_{1l} = \begin{cases} \int_{r_l}^{\infty} \Phi_{1l} dr, \quad v < v_l, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/2, \\ \int_{r_l}^{r_l^*} \Phi_{1l} dr, \quad v < v_l, \quad \pi/2 \leq \gamma \leq \pi, \\ \int_0^{\infty} \Phi_{1l} dr, \quad v > v_l, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/2, \\ \int_0^{r_l^*} \Phi_{1l} dr, \quad v > v_l, \quad \pi/2 < \gamma < \pi - \gamma_l^*, \\ 0, \quad v > v_l, \quad \pi - \gamma_l^* \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$I_{2l} = \begin{cases} \int_{r_l^*}^{\infty} \Phi_{2l} dr, \quad v < v_l, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi/2, \\ \int_0^{\infty} \Phi_{2l} dr, \quad v > v_l, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_l^*, \\ \int_{r_l^*}^{\infty} \Phi_{2l} dr, \quad v > v_l, \quad \gamma_l^* < \gamma < \pi/2, \\ 0, \quad \pi/2 \leq \gamma \leq \pi, \end{cases}$$

$$\Phi_{jl} = \begin{cases} \frac{\tau_1^l G_l(r, z^*) \exp \left\{ i R r [\tau_1^l \cos \gamma + (-1)^i \sqrt{1 - (r_1^l)^2} \sin \gamma] \right\}}{r \sigma_l v_0 I \sqrt{1 - (r_1^l)^2}} + \delta, \quad R < u_{lj} t, \\ 0, \quad R \geq u_{lj} t, \end{cases}$$

$$I(r) = \int_{-1}^0 G_l^2(r, \eta) \frac{d\psi(\sigma_l, \eta)}{d\sigma_l} d\eta, \quad \delta = \begin{cases} O(\varepsilon), \quad z^* < z_l, \\ O(\varepsilon^2), \quad z^* \geq z_l, \end{cases}$$

$$z_l(r) = -\varepsilon \sigma_l^2 (D_0 r^2)^{-1} + O(\varepsilon^2), \quad \psi(\sigma_l, z) = (N/\sigma_l)^2 - 1,$$

$$G_l(r, z) = W(r, z, i\sigma_l) [W_z(r, O, i\sigma_l)]^{-1},$$

$$\gamma_l^* = \lim_{r \rightarrow 0} \arccos \tau_1^l(r), \quad r_l^*(\gamma) - \text{корень уравнения}$$

$$|\tau_1^l(r)| = |\cos \gamma|.$$

Параметрические выражения $R_0(r)$, $\gamma_0(r)$ линии равной фазы, формулы амплитуды волны вдоль нее и выражение $R^*(r)$ для линии переднего фронта примут вид:

$$\begin{aligned} R_0(r) &= \pi K [1 - 2\tau_1^l \tau_2^l + (\tau_2^l)^2]^{1/2} [4(\tau_1^l - \tau_2^l)r]^{-1}, \\ \gamma_0(r) &= \arctg \{ \tau_2^l [1 - (\tau_1^l)^2]^{1/2} (1 - \tau_1^l \tau_2^l)^{-1} \}, \\ A(r, z^*) &= \frac{2af^*(r) |G_l(r, z^*)|}{\sigma_l D_0 I} \sqrt{\frac{2(\tau_1^l - \tau_2^l)}{K |\tau_0^l|}} + \delta, \\ R^*(r) &= \nu t [1 - 2\tau_1^l \tau_2^l + (\tau_2^l)^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (10.37)$$

где

$$\tau_2^l = \nu^{-1} \frac{d\sigma_l}{dr}, \quad \tau_3^l = r\nu^{-1} \frac{d^2\sigma_l}{dr^2}, \quad \tau_0^l = \tau_2^l (\tau_1^l - \tau_2^l)^2 + [1 - (\tau_1^l)^2] \tau_3^l.$$

Зависимость K от dR_0/dr и $G_l(r, z^*)$ такая же, как и для бассейна с равномерной стратификацией (раздел 10.2).

Величина K принимает значения $5 + 8\kappa$ и $1 + 8\kappa$ соответственно для гребней и впадин при $G_l(r, z^*) < 0$, $dR_0/dr > 0$. Если $dR_0/dr < 0$, то значения K равны $7 + 8\kappa$ для гребней и $3 + 8\kappa$ для впадин ($\kappa = 0, 1, 2, \dots$). Указанные K для гребней будут характеризовать впадины и гребни, если $G_l(r, z^*) > 0$.

Проведенный анализ показал, что лед практически не влияет на r_l , $R_0(r)$, $R^*(r)$, $\gamma_0(r)$, а следовательно, и на фазовые характеристики внутренних волн. Амплитуды возмущений (10.37) и величина z_l могут уменьшаться с ростом изгибной жесткости льда.

При $\nu < \nu_l$ волновое возмущение моды l формируется в угловой зоне $0 \leq \gamma < \gamma_0^l$ системами поперечных ($dR_0/dr > 0$) и продольных ($dR_0/dr < 0$) волн типа корабельных, передние фронты которых удаляются от эпицентра давлений со скоростями u_{l1} . Здесь $\gamma_0^l = \gamma_0(r_l^*)$, r_l^* — корень уравнения $\tau_0^l(r) = 0$. При $\gamma_0 = \gamma_0^l$ волновые возмущения затухают с расстоянием как $O(R^{-1/3})$. Для $\nu > \nu_l$ в зоне волнового следа $0 \leq \gamma < \gamma_0^l$, $R < R^*$ возмущения, обусловленные модой l , формируются только продольными корабельными волнами. В этом случае $\gamma_0^l = \pi/2 - \gamma_l^*$.

Количественный анализ влияния изгибной жесткости льда на амплитуды внутренних волн и их проявлений в возмущениях границы лед-вода (изгибе ледяного покрова) проводился для сосредоточенной нагрузке (6.5), $p_0 = (2\pi)^{-1} \cdot 100$ Па на плотностной модели $\varphi(z) = \varphi_0(z) \cdot \varphi_0^{-1}(-1)$, $\varphi_0(z) = \arctg[k(z_0 - z)] - \arctg(kz_0)$, $-1 \leq z \leq 0$,

аппроксимирующей (штриховая линия на рис. 10.6) при значениях $k = 10.4343$, $z_0 = -0.09$, $\rho_0(0) = 1026.276 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$, $\varepsilon = 1.7315 \cdot 10^{-3}$, $H = 600 \text{ м}$ известное распределение плотности (сплошная кривая на рис. 10.6) в районе арктической станции СП-29. Профиль частоты Брента-Вяйсяля, соответствующий выбранному $\varphi(z)$, выражается формулой $N^2 = k_0[1 + k^2(z - z_0)^2]^{-1}$, где $k_0 = 4.70042$. При этом величины k и z_0 характеризуют соответственно толщину и глубину залегания слоя скачка плотности, а максимум частоты Брента-Вяйсяля определяется величиной $k_0^{1/2}$. Распределение собственных частот σ_l первых четырех мод по волновому числу для такой стратификации дано на рис. 10.7.

Параметры, описывающие физические свойства льда, принимались из (4.13) при $h = 0, 1, 2, 3.5$. Значения скорости перемещения давлений $0.4; 0.85; 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ выбраны таким образом, чтобы проследить структурные изменения картины внутренних волн. При этом $v = 0.4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ докритическая для первой и второй мод, $v = 0.85 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ – докритическая для первой и сверхкритическая для второй, а $v = 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ – сверхкритическая для обеих мод внутренних волн.

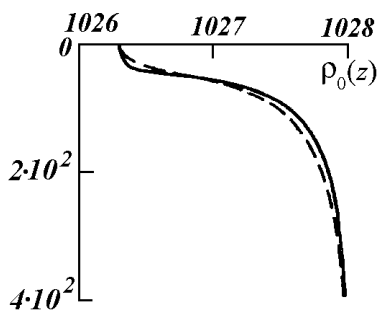


Рис. 10.6

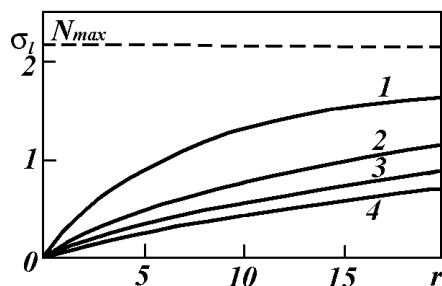


Рис. 10.7

Фазовые картины приведены на рис. 10.8 при $v = 0.4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $t = 10^4 \text{ с}$ (рис. 10.8, а) и $v = 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $t = 400 \text{ с}$ (рис. 10.8, б) для первой и на рис. 10.9 при $v = 0.4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $t = 10^4 \text{ с}$ для второй мод. Постоянные фазы продольных и поперечных внутренних волн изображены соответственно тонкими сплошными и штриховыми линиями. Их четные, считая от начала координат, при $G_l(r, z^*) < 0$ характеризуют подъемы, а нечетные – впадины. Жирные сплошные и штриховые линии обозначают соответственно передние фронты продольных и поперечных волн, а штрихпунктирные – границы угловых зон волновых возмущений. Отметим, что в следе за областью давлений линии равной фазы продольных волн касаются трассы. Возбуждаемые в волновом следе возмущения при скорости давлений, приближающейся к величине собственного зна-

чения скорости для моды номера l^* , формируются продольными и поперечными волнами (рис. 10.8, *а*, 10.9) меньших и равного l^* номеров. Моды с номерами, превышающими l^* , проявляются в следе только продольными волнами (рис. 10.8, *б*). При этом, как и в бассейне со свободной поверхностью [6, 87, 160], чем больше номер моды отличается от l^* , тем меньший угол раствора имеют обусловленные ею возмущения.

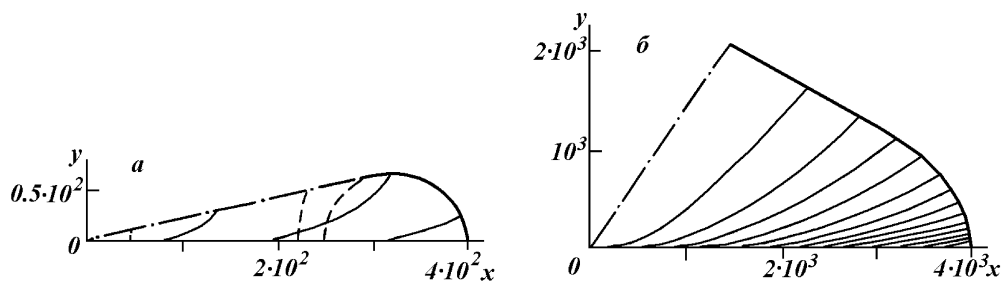


Рис. 10.8

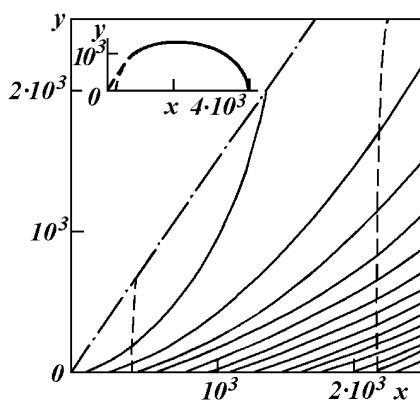


Рис. 10.9

Распределения амплитуд волновых возмущений вдоль линий постоянных фаз представлены на рис. 10.10, 10.11 для первой моды при $u = 0.4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ и $1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ соответственно и на рис. 10.12 – второй моды для $u = 0.4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Слева на рис. 10.10 даны графики амплитуд поперечных, а справа и на рис. 10.11, 10.12 – продольных волн. По порядку сверху вниз графики характеризуют амплитуды возмущений на глубинах 0, 60, 120 (рис. 10.10, 10.11); 0, 30, 90 м (рис. 10.12, слева) и 120, 150, 210 м (рис. 10.12, справа). Фаза колебаний здесь определяется знаком $G_l(r, z^*)$.

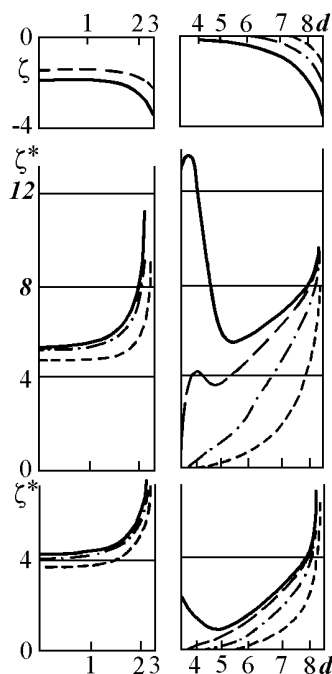


Рис. 10.10

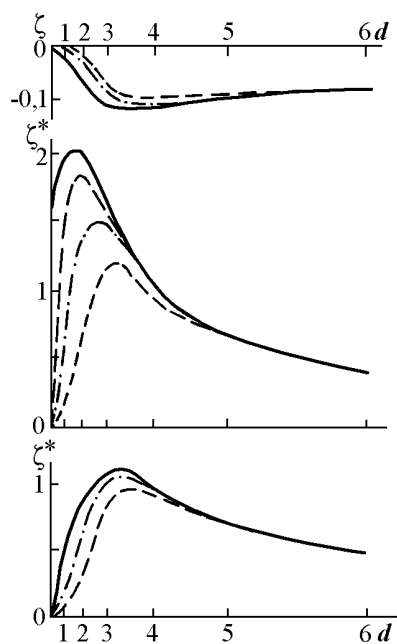


Рис. 10.11

Амплитуды для возмущений внутри жидкости ($z^* \neq 0$) с точностью до множителя $K^{1/2}$ приведены в сантиметрах, а для поверхности бассейна – в сотых долях миллиметра. Через d на рисунках обозначена условная длина линии постоянной фазы. Цифры на оси абсцисс в порядке возрастания отвечают точкам пересечения этой линии с лучами, выходящими из начала координат на соответствующих фазовых портретах (рис. 10.8, 10.9) под углами 5.5° , 9.8° , 11.4° (рис. 10.10, поперечные волны), 0.8° , 2.2° , 4.5° , 7.2° , 10° (рис. 10.10, продольные волны); 1.4° , 3.0° , 6.4° , 11.8° , 16.8° , 26.4° (рис. 10.11); 1.4° , 7.6° , 12.9° , 17.1° , 21.6° , 26.5° , 31.9° (рис. 10.12). Они характеризуют изменение амплитуды возмущений рассматриваемых волн с удалением от трассы к границе угловой зоны. Сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные линии отвечают распределениям амплитуд при толщинах льда 0, 1, 2, 3.5 м. Отметим, что рост величин p_0 и ε приводит к увеличению амплитуд проявлений внутренних волн на поверхности бассейна.

Анализ результатов численных расчетов показал, что при скоростях перемещения области давлений, меньших величин собственного значения для соответствующей моды, влияние льда сказывается и на продольных и на поверхностных волнах. Для $v = 0.46v_1$, $u_1 \approx 0.87 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ это видно из рис. 10.10. Однако лед меняет распределение амплитуды попе-

речных волн лишь количественно (в пределах 20%), в то время как структура поднятия (понижения) уровня изопикнической поверхности за счет продольной волны может с увеличением толщины льда претерпевать и качественные изменения. Это особенно заметно в зоне скачка плотности. Ледяной покров, значительно уменьшая здесь амплитуду продольных волн, способствует формированию монотонного характера ее изменения вдоль линии постоянной фазы.

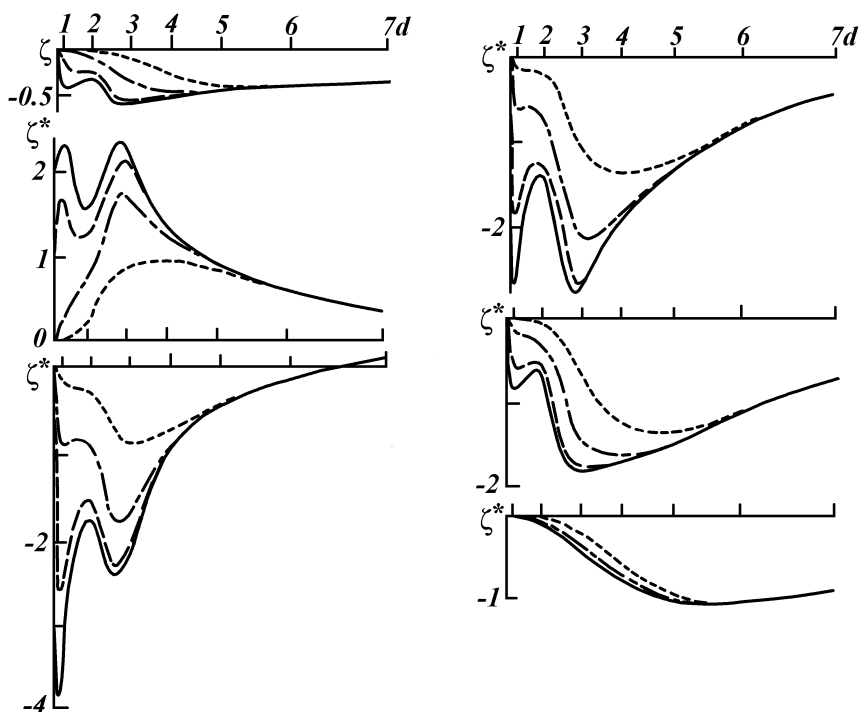


Рис. 10.12

С увеличением скорости перемещения давлений вклад продольных волн в формирование возмущений растет, а поперечных – убывает [1]. Влияние льда на амплитуды в следе за областью при этом падает. Для близкого к критическому значению скорости оно может заметно проявляться лишь на продольных волнах и в ограниченной угловой зоне. В сверхкритическом диапазоне u , где возбуждаются только продольные волны этой моды, угол раствора зоны влияния льда на амплитуды возмущений убывает с ростом скорости. Для $u = 15u_1$ (рис. 10.11) он составляет примерно 25° при величине полного угла раствора корабельного следа 108° (рис. 10.8,б). Величина экстремума на графике распределения амплитуды продольной волны первой моды вдоль линии ее равной фазы уменьшается с ростом толщины льда. Для рассмотренных

значений исходных параметров уменьшение в зоне скачка плотности составляет примерно 45% (рис. 10.11). Точка расположения экстремума удаляется при этом от трассы.

Структура профиля продольной волны второй моды вблизи слоя скачка плотности усложняется из-за возможного появления на нем нового экстремума амплитуды и узловой точки (рис. 10.12). Это может быть вызвано смещением нулевого и максимального значений соответствующей собственной функции краевой задачи (10.34) к поверхности бассейна при увеличении волнового числа. Ледяной покров уменьшает величины указанных экстремумов, причем один из них (ближайший к трассе) убывает сильно. С ростом толщины льда он может погаситься полностью.

При $\nu = 0.96 \nu_2$ угол раствора зоны заметного влияния льда на возмущения в волновом следе составляет для второй моды около 45° . Общий раствор угла корабельного следа этой моды равен 111° . Амплитуда поперечной волны практически не зависит от h и почти не меняется вдоль линии постоянной фазы вне окрестности границ волновой зоны.

Отметим, что увеличение z_l убывает с ростом толщины льда примерно в той же пропорции, что и амплитуда соответствующей внутренней волны.

Таким образом, ледяной покров, уменьшая амплитуды проявлений внутренних волн на поверхности бассейна, ослабляет и интенсивность волновых возмущений в окрестности скачка плотности. Амплитуды продольных корабельных волн гасятся в значительно большей мере, чем поперечных. При увеличении глубины погружения ниже пикноклина вместе с убыванием амплитуды внутренних волн [142] уменьшается и влияние на них жесткости льда. Наиболее заметное ослабление интенсивности внутренних волн под воздействием ледяного покрова происходит в зоне окрестности трассы. Угол раствора этой зоны зависит от скорости перемещения области давлений и номера моды. Он может быть существенно меньшим угла всего корабельного следа.

10.4. Трехмерное возмущение в ближней зоне движущейся области давлений при экспоненциальном распределении плотности по глубине бассейна

Рассмотрим возмущения, формируемые в жидкости с распределением плотности (10.18) движущейся областью постоянных давлений (4.1) непосредственно под эпицентром давлений, в ближней его окрестности и в волновом следе. Оценим вклад проявлений внутренних волн в колебаниях плавающего ледяного покрова (поверхности лед-вода).

В системе координат, связанной с эпицентром давлений, при сохранении предположений и обозначений, принятых в разделе 10.2, из (10.19), (10.20) для установившихся возмущений при осесимметричном распределении давлений методом интегральных преобразований получим [42]

$$\zeta^* = \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty r f^*(r) dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_0 \exp(i\lambda) d\theta,$$

$$K_0 = S_0^{-1} \text{sh}[q_0 r(z^* + H)], \quad q_0 = [1 - (N/\xi)^2]^{1/2},$$

$$\lambda = rR \cos(\theta - \gamma), \quad S_0 = [D_0 - \kappa_1 \xi^2] \text{sh}(q_0 rH) - q_0 \xi^2 (rg)^{-1} \text{ch}(q_0 rH),$$

$$D_0 = D_1 r^4 + 1, \quad r^2 = m^2 + n^2, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta, \quad R^2 = x^2 + y^2,$$

$$x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad \xi = r \nu \cos \theta, \quad N = \varepsilon^{1/2}, \quad \varepsilon = \Gamma H,$$

m, n – переменные Фурье, $f^*(r)$ – трансформанта Фурье функции $f(R)$.

Дальнейший анализ ζ^* проведен в безразмерных переменных (10.36), имея в виду, что $\xi = r \nu \sqrt{H/(\varepsilon g)} \cos \theta$.

Рассмотрим обусловленные стратификацией морской воды возмущения как при $z^* = 0$, оценивая тем самым вклад проявлений внутренних волн на поверхности бассейна (в изгибных колебаниях льда), так и на глубине $z^* = -0.5$, где достигается максимум амплитуды внутренних волн первой моды. При этом будем считать $\xi < 1$, $(1 - \xi^2)^{1/2} = O(\xi)$ и разлагать подынтегральное выражение в ряд по ε . Отметим, что такое разложение справедливо в тех случаях, когда скорость перемещения давлений имеет величину порядка $(\varepsilon g H)^{1/2}$, оставаясь заметно меньшей минимума фазовой скорости для поверхностных волн. Это ограничение, исключая из рассмотрения поверхностные волны, не выводит величину ν за пределы характерных значений скорости ветра в Арктическом бассейне [179]. Вместе с тем для любой моды номера $l \geq 1$, которой соответствует критическое значение $\nu_l = (\pi l)^{-1} (\varepsilon g H)^{1/2}$, скорость перемещения области может находиться как в докритическом ($\nu < \nu_l$), так и в сверхкритическом ($\nu > \nu_l$) диапазонах.

При $z^* = 0$ выражение для возмущений поверхности лед-вода можно записать так:

$$\zeta = \frac{a}{\pi} (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2) + O(\varepsilon^2), \quad (10.38)$$

$$\eta_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty F(r, \theta) dr,$$

$$\eta_1 = \varepsilon f_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \int_0^\infty F(r, \theta) D_0^{-1} (1 + \chi_1 r^2) dr,$$

$$\eta_2 = \sum_{l=1}^{\infty} I_l, \quad I_l = 2\varepsilon f_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \int_0^\infty F(r, \theta) D_0^{-1} [r^2 - (f_1 \cos \theta)^{-2}] (r^2 + r_l^2)^{-1} dr,$$

$$r_l^2 = (\pi l)^{-1} - (f_1 \cos \theta)^{-2}, \quad F(r, \theta) = r D_0^{-1} f^*(r) e^{i\lambda}, \quad f_1 = v / \sqrt{\varepsilon g H}.$$

Здесь η_0 характеризует статический поверхностный прогиб льда, рассмотренный в [177], а η_1 — его динамическое возмущение [37, 177, 195, 196]. Деформацию ζ за счет проявлений внутренних волн определяет η_2 , где I_l представляет моду номер l . Проведем исследование возмущений, обусловленных совместным вкладом η_1 и η_2 , в случае сосредоточенной нагрузки $f(x, y) = \delta(x)\delta(y)$, где $\delta(\beta)$ — дельта функция Дирака. При этом $f^*(r) = (2\pi)^{-1}$. Выражения для η_1 , I_l методом неопределенных коэффициентов и необходимых замен переменных можно привести к виду

$$\eta_1 = \frac{f_1^2}{2\pi\sqrt{D_1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\psi_1(\lambda_0) + \frac{\chi_1}{\sqrt{D_1}} \psi_2(\lambda_0) \right] \cos^2 \theta d\theta, \quad (10.39)$$

$$I_l = \varepsilon \pi^{-1} f_1^3 \sum_{k=1}^5 I_{kl}. \quad (10.40)$$

Здесь

$$I_{kl} = (-1)^{k+1} (\pi l)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\theta) T_k d\theta, \quad k = 1, 2,$$

$$I_{3l} = D_1^{-1/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - D_1 r_l^2 (f_1 \cos \theta)^{-2} (D_1 r_l^4 + 2)] \Phi(\theta) \psi_1(\lambda_0) d\theta,$$

$$I_{4l} = (\pi l)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (D_1 r_l^4 + 1) \Phi(\theta) \psi_2(\lambda_0) d\theta,$$

$$I_{5l} = -D_1^{1/2}(\pi l)^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Phi(\theta) \psi_3(\lambda_0) d\theta,$$

$$\Phi(\theta) = (D_1 r_l^4 + 1)^{-2} \cos^2 \theta, \quad \lambda_0 = R D_1^{-1/4} \cos(\theta - \gamma),$$

$$\psi_j(\beta) = \int_0^\infty \frac{s^{2j-1} \cos(s\beta)}{(s^4 + 1)^2} ds, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$T_1 = \int_0^\infty D_1 D_0^{-1} r^3 e^{i\lambda} dr, \quad T_2 = \int_0^\infty r(r^2 + r_l^2)^{-1} e^{i\lambda} dr.$$

Интеграл T_1 , а при $r_l^2 > 0$ и T_2 , не имеет особенностей на пути интегрирования. Это позволяет записать

$$\begin{aligned} T_1 &= \Omega_1(\lambda_0), \quad T_2 = \Omega_2(\lambda_l), \\ \Omega_j(\beta) &= \psi_{j1}(\beta) - \psi_{j2}(\beta) - Ci(\beta), \end{aligned} \quad (10.41)$$

$$\psi_{j1} = \int_0^1 \frac{s^{5-2j} \cos(s\beta)}{s^{6-2j} + 1} ds, \quad \psi_{j2} = \int_1^\infty \frac{\cos(s\beta)}{s(s^{6-2j} + 1)} ds,$$

где $\lambda_l = R|r_l \cos(\theta - \gamma)|$, $Ci(\beta)$ – интегральный косинус [136].

В случае $r_l^2 < 0$ путь интегрирования в T_2 деформируем в контур L_0 , обходящий имеющиеся полюса $r_l^* = |r_l|$ по малым полуокружностям снизу в комплексной плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$. Такое направление обхода обеспечивает выполнение условия излучения, а наличие разреза устраняет неоднозначность выбора ветви функции интегрального косинуса. Методом контурного интегрирования с учетом условия $\text{Re}(i\lambda) \leq 0$, обеспечивающего затухание возмущений при $R \rightarrow \infty$ получим

$$T_2 = \Omega_3(\lambda_l), \quad \Omega_3(\beta) = \psi_{31}(\beta) - \psi_{32}(\beta) + E_1(\beta) - \psi^*(\beta) \quad (10.42)$$

$$\psi_{31} = \int_0^1 \frac{s \exp(-s\beta)}{s^2 + 1} ds, \quad \psi_{32} = \int_1^\infty \frac{\exp(-s\beta)}{s(s^2 + 1)} ds,$$

$$\psi^* = \begin{cases} \pi \sin \beta, & \theta > (\gamma - \pi/2), \\ 0, & \theta \leq (\gamma - \pi/2), \end{cases}$$

$E_1(\beta)$ – интегральная показательная функция [136]. Здесь $\beta \geq 0$.

Таким образом, исследование трехмерных возмущений (10.38) поверхности ($z^* = 0$) экспоненциально стратифицированного бассейна с ледяным покровом сведено к вычислению интегралов (10.39)–(10.40) по θ от выражений, содержащих функции $\psi_j(\beta)$, $\psi_{jk}(\beta)$, $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2$. Эти функции можно считать численно при всех неотрицательных значениях аргумента. Отметим, что $\psi_1 = \psi_3 = \pi/8$, $\psi_2 = 1/4$, $\psi_{11} = \psi_{12} = 0.25 \ln 2$, $\psi_{21} = \psi_{22} = \psi_{31} = \psi_{32} = 0.5 \ln 2$ при $\beta = 0$. Для больших значений β методом интегрирования по частям можно получить их асимптотические разложения.

Интегрирование по θ в (10.40) осложняется наличием логарифмических особенностей функций $Ci(\lambda_0)$, $Ci(\lambda_l)$, $E_1(\lambda_l)$. Эти особенности можно устранить, воспользовавшись представлением

$$Ci(\beta) = \ln \beta + z_1(\beta), \quad E_1(\beta) = -\ln \beta + z_2(\beta), \quad (10.43)$$

где $z_1(\beta)$ и $z_2(\beta)$ – известные [136] целые функции. Суммирование I_{1l} и I_{2l} в (10.40) приводит к выражению, содержащему разность $(T_1 - T_2)$. Обозначим сумму слагаемых с особенностями в этой разности через τ . Тогда из (10.41), (10.42) найдем $\tau = \ln(\lambda_l / \lambda_0) = \ln(D_l r_l^4) / 4$. Если $R = 0$, то $T_1 - T_2 = \tau$. Полученное выражение τ , хотя и содержит особенности при $\theta = \pm \arccos[(\pi l f_l)^{-1}]$ в случае $v \geq v_l$, но интегрируемые. При этом $(T_1 - T_2 - \tau)$, а следовательно и ζ , являются гладкими функциями R , γ , несмотря на разрывность производных $\psi^*(\lambda_l)$, $\psi_{31}(\lambda_l)$, $\psi_{32}(\lambda_l)$ по R при $R = 0$. Возможность подобного поведения функций, описывающих решение в ближней зоне, показана и для бассейна со свободной поверхностью [12].

Так как I_l с ростом номера моды l убывает как l^{-2} , то ряд для η_2 в (10.38) сходящийся. Это позволяет вычислить ζ с заданной точностью путем учета необходимого числа мод внутренних волн.

Отметим, что для бассейна со свободной поверхностью ($h = 0$) или покрытого битым льдом ($E = 0$) внутренние волны характеризуются интегралами I_{2l} , I_{3l} . При этом $T_1 = 0$ и в I_l^* остаются особенности только от T_2 , а $\tau = \ln \lambda_l$. Следовательно, подынтегральное выражение в (10.40) имеет логарифмические особенности не только по θ (в том числе и при $\cos(\theta - \gamma) = 0$, но и по R [128]. На этом основании можно заключить, что изгибная жесткость льда улучшает сходимость рассматриваемых интегралов и позволяет проводить исследование возмущений, обусловленных проявлением внутренних волн, под сосредоточенной нагрузкой и в ее окрестности.

Выражение для возмущений на глубине максимума амплитуды вертикальной составляющей скорости внутренних волн первой моды ($z^* = -0.5$) запишем в виде

$$\xi^* = \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r \exp(i\lambda) f^*(r) d\theta}{D_1 \cos(q^*/2)} + O(\varepsilon), \quad q^* = r(1 - \xi^2)^{1/2} \xi^{-1}. \quad (10.44)$$

Оно учитывает вклад внутренних волн нечетных мод и возмущения за счет статического поверхностного прогиба. Величина $O(\varepsilon)$ содержит отклонения рассматриваемой поверхности за счет динамического возмущения прогиба и возможного вклада внутренних волн четных мод.

Из (10.44), разлагая $[\cos(q^*/2)]^{-1}$ в ряд, используя введенные функции $\psi_j(\beta)$, $\psi_{jk}(\beta)$, в случае сосредоточенных давлений найдем

$$\xi^* = Z(R, \gamma) + Z^*(R, \gamma). \quad (10.45)$$

Здесь

$$Z = \frac{a}{\pi^3 \sqrt{D_1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi(\lambda_0) d\theta \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{k},$$

$$Z^* = \frac{a}{\pi \sqrt{D_1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} V(R, \lambda, \theta)}{D_1 r_k^4 + 1} d\theta,$$

$$V = (\pi^2 k)^{-1} [D_1 (f_1 \cos \theta)^{-2} r_k^2 - 1] \psi(\lambda_0) + k \sqrt{D_1} (T_1 - T_2^*),$$

$$\psi(\beta) = \psi_1(\beta) + \psi_3(\beta), \quad k = 2l - 1,$$

$$T_2^* = \begin{cases} \Omega_2(\lambda_k), & r_k^2 > 0, \\ \Omega_3(\lambda_k), & r_k^2 \leq 0, \end{cases}$$

а T_1 определяется по формуле (10.41).

Логарифмические особенности функций $Ci(\lambda_0)$, $Ci(\lambda_k)$, $E_1(\lambda_k)$ в (10.45) устраняются так же, как и при интегрировании в (10.40) путем выделения члена $\tau_1 = \ln(\lambda_k / \lambda_0) = \ln(D_1 r_k^4) / 4$ в разности $(T_1 - T_2^*)$ с учетом (10.43). При $R=0$ получим $T_1 - T_2^* = \tau_1$.

Так как $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{k} = \frac{\pi}{4}$, а ряд в выражении Z^* абсолютно сходится,

то по формуле (10.45) с любой заданной точностью можно вычислить ξ^* .

Таким образом, формулы (10.38) – (10.43), (10.45) позволяют проводить исследование возмущений в покрытом льдом равномерно стратифицированном бассейне непосредственно под эпицентром движущихся давлений, в ближней его окрестности и в волновом следе.

Количественный анализ зависимости пространственного распределения возмущений на поверхности бассейна и на глубине $z^* = -0.5$ от ледовых условий и скорости перемещения давлений проводился для

$p_0 = 10^3$ Па, $\varepsilon = 10^{-2}$, $H = 100$ м, $\rho_0(0) = 1.02 \cdot 10^3$ кг/м³. Рассматривался лед толщиной 1, 2, 4 м, а значения параметров, описывающих его физические свойства, принимались из (4.13). Значения 0.7 и 1.2 м/с скорости перемещения давлений выбирались таким образом, чтобы были заметны структурные изменения картины возмущений. При этом скорость 0.7 м/с является докритической для первой моды и сверхкритической для последующих, а значение 1.2 м/с – сверхкритическое для всех мод внутренних волн.

При суммировании рядов для η_2 в (10.38) и Z^* в (10.45) учтен вклад шести мод внутренних волн. Вносимая таким образом погрешность результатов в рассмотренных условиях не превышает 6% по сравнению с полученными в контрольных точках суммированием 20 мод.

Пространственное распределение возмущений ζ поверхности бассейна ($z^* = 0$) показано на рис. 10.13 в случае $v = 0.7$ м/с при толщине льда 1 м. Картины возмущений ζ^* поверхности $z^* = -0.5$ под ледяным покровом толщиной 1 м приведены на рис. 10.14 при $v = 0.7$ м/с и на рис. 10.15 в случае $v = 1.2$ м/с. Шкала удалений от эпицентра давлений вдоль осей x и y дана в метрах, а вертикальные смещения ζ – в миллиметрах (рис. 10.13) и ζ^* – в сантиметрах (рис. 10.14, 10.15).

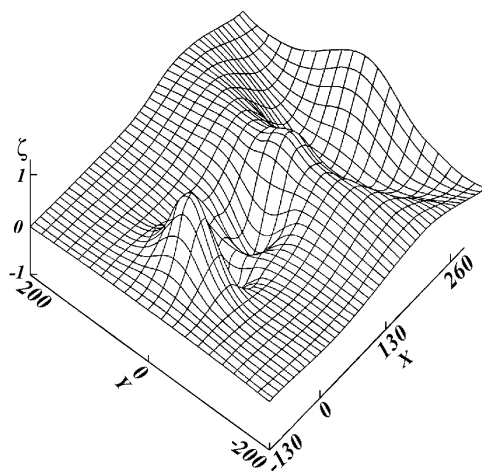


Рис. 10.13

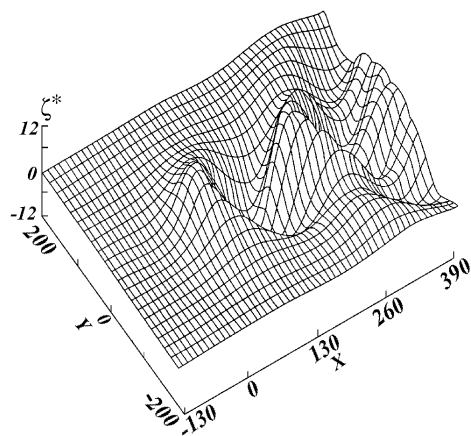


Рис. 10.14

Анализ показал, что картина возмущений ζ , возбуждаемых в окрестности движущихся с заданной скоростью давлений, существенно зависит от толщины ледяного покрова. При $h = 1$ м, $v = 0.7$ м/с ($f_1 \approx 0.7 \pi^{-1}$) изгиб льда в окрестности давлений вдоль трассы их перемещения имеет седлообразный вид с максимальным возвышением впереди (рис. 10.13). Величина этого максимума составляет примерно

1.6 мм, а глубина первой и второй впадин за ним – 1.7 и 0.8 мм. Максимальное углубление первой впадины отстает от эпицентра давлений примерно на 4 м. Возвышение, отделяющее прогиб от волнового следа, имеет высоту 0.8 мм. С увеличением толщины льда до 2 м сглаживается картина возмущений и теряется седловидность структуры около давлений, где образуется лишь слабый прогиб, глубина которого 0.55 мм. Теперь его впадина отстает от давлений на 32 м. Возвышения перед и за ним составляют 0.6 и 0.4 мм.

Рост числа Фруда приводит к увеличению прогиба льда под давлениями и высоты возвышений перед и за ним. Изменение f_1 от $0.7\pi^{-1}$ до $1.2\pi^{-1}$ обусловило рост высоты возвышения перед давлениями до 3.9 и 1.15 мм для толщины льда 1 и 2 м соответственно. При этом впадина прогиба приблизилась к давлениям на расстояние 0.5 и 4.5 м, а ее глубина возросла до 6 и 0.7 мм. Высота первого возвышения за впадиной при $h = 1$ м увеличилась до 2.8 мм, а при $h = 2$ м осталась практически неизменной. Седловидность прогиба с ростом скорости, как и с увеличением толщины льда, исчезает. В то же время возможно появление максимумов высоты на гребне первого возвышения за впадиной, расположенных вне трассы.

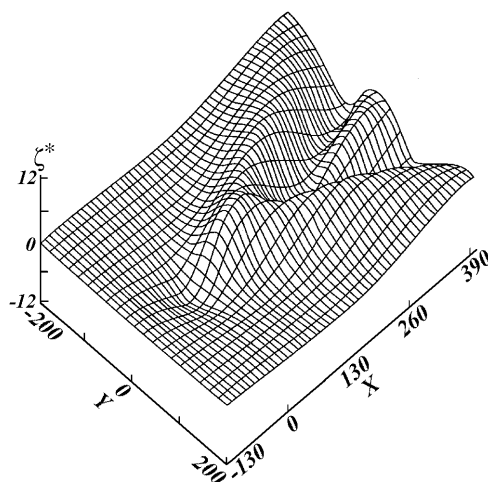


Рис. 10.15

Что касается волнового следа на поверхности бассейна, то наличие ледяного покрова и изменение его толщины приводят лишь к ослаблению интенсивности проявлений внутренних волн.

Максимальное углубление в рассматриваемой зоне следа при толщинах льда 1, 2 м составляет примерно 0.8, 0.45 мм в случае $f_1 = 0.7\pi^{-1}$ и 1.2, 0.8 мм при $f_1 = 1.2\pi^{-1}$. По порядку величин такие амплитуды возмущений согласуются с известными результатами теоретических и экспериментальных исследований проявлений внутренних волн. Структура

следа при этом в качественном отношении зависит главным образом от скорости перемещения давлений. Она формируется продольными и поперечными или только продольными внутренними волнами типа корабельных. Напомним, что для выбранных значений f_1 волновой след на поверхности бассейна формируется только под воздействием проявлений внутренних волн, так как поверхностные волны при таких скоростях перемещения давлений в данных ледовых условиях не возбуждаются. Кроме того, возвышения и углубления на ζ в окрестности давлений представляют динамическую добавку к статическому прогибу. Влияние скорости перемещения давлений на структуру возмущений ζ^* под ледяным покровом иллюстрируют рис. 10.14, 10.15. Видно, что при скорости $v = 0.7$ м/с возмущения формируются продольными и поперечными внутренними волнами, а для $v = 1.2$ м/с – только продольными. При этом на поверхности ζ^* заметно углубление, незначительно опережающее эпицентр давлений.

Рост толщины льда уменьшает амплитуды возмущений ζ^* , деформируя таким образом их структуру в рассматриваемой области. В частности, для $v = 0.7$ м/с изменение h от одного до двух метров обусловило уменьшение глубины впадин перед эпицентром давлений и за ним от 1.5, 17.7, 10.8 см до 1.1, 12.1, 7.8 см соответственно. Высоты максимальных возвышений за давлениями изменились при этом от 12.8, 14.2, 8.1 см до 8.8, 9.4, 5.9 см. В случае $h = 4$ м такому значению v соответствуют глубины впадин 0.5, 4.9, 2.9 см и высоты поднятия 4.2, 2.9, 2.6 см.

При $v = 1.2$ м/с глубины впадин на ζ^* перед и за давлениями равны 5.4, 4.4 см, если $h = 1$ м и 4.2, 2.9 см в случае $h = 2$ м. Поднятия вдоль трассы перемещения давлений имеют при этом высоты 7.2, 2.9 см для $h = 1$ и 5.6; 1.5 см, если $h = 2$ м.

Кроме того, увеличение толщины льда сглаживает обусловленную продольными волнами желобовидность внутренней структуры волнового следа, заметно проявившуюся на рис. 10.14, смещая ее за пределы рассматриваемой области.

Отметим, что полученные величины возмущений ζ , ζ^* пропорциональны значению p_0 .

10.5. Возмущения поверхности бассейна с экспоненциальной плотностной стратификацией при движении подводного источника постоянной интенсивности

Рассмотрим возмущения поверхности бассейна при движении гидродинамического источника постоянной обильности $\tilde{M}$ на заданной

глубине z_0 непрерывно стратифицированной жидкости. Задача заключается в решении уравнений (10.19) При этом начальные условия при $t = 0$ и условие непротекания на дне $z = -H$ остаются в виде (10.20), а уравнение неразрывности и условие безотрывности колебаний ледяного покрова переписуются так

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \tilde{M}\delta(x)\delta(y)\delta(z+z_0),$$

$$(D_1\nabla^4 + \chi_1\mathcal{L}^2 + 1)\zeta - p_1 = 0, \quad w = \mathcal{L}\zeta, \quad z = 0.$$

В приближении Буссинеска исходная система уравнений сводится [12, 77, 141] к одному уравнению для амплитуды вертикального смещения ζ^* изопикнической поверхности $z = z^*$

$$[\mathcal{L}^2(\Delta_l + \partial^2/\partial z^2) + N^2(z)\Delta_l]\zeta^* = -\tilde{M}\mathcal{L}\delta(x)\delta(y)\delta_z(z+z_0). \quad (10.46)$$

$$N^2(z) = -g\rho_0(z)d\rho_0/dz.$$

Учитывая, что $\zeta^* = \zeta$ при $z^* = 0$, в качестве граничного условия на поверхности бассейна получим

$$\mathcal{L}^2 \partial\zeta/\partial z - g(D_1\nabla^4 + \chi_1\mathcal{L}^2 + 1)\Delta_l\zeta = 0, \quad z = 0; \quad \zeta^* = 0, \quad z = -H. \quad (10.47)$$

Здесь обозначения ∇^4 , χ_1 , $\mathcal{L}$ те же, что и в (10.20), а обозначение Δ_l приведено в (4.3).

Решая задачу (10.46), (10.47) методом интегральных преобразований для установившегося движения найдем в полярных координатах

$$\zeta^* = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_l^*[1 + O(\varepsilon_0)], \quad \varepsilon_0 = \rho_0(-H)/\rho_0(0), \quad (10.48)$$

$$\zeta_l^* = iM \frac{\nu}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sigma_l^2(r) \cos\theta}{\sigma_l^2(r) - \xi^2} \varphi_l(z^*, r) \cos\theta \exp(i\lambda) \frac{\partial\varphi_l}{\partial z} \Big|_{z=-z_0} d\theta dr,$$

$$\lambda = rR \cos(\theta - \gamma), \quad \xi = r\nu \cos\theta.$$

Здесь φ_l – собственные функции, а σ_l – собственные числа задачи

$$\frac{\partial^2\varphi_l}{\partial z^2} + r^2(N^2/\sigma_l^2 - 1)\varphi_l = 0, \quad -H \leq z \leq 0,$$

$$\sigma_l^2 \frac{\partial\varphi_l}{\partial z} - r^2 g(D_1 r^4 - \chi_1 \sigma_l^2 + 1)\varphi_l = 0, \quad z = 0; \quad \varphi_l = 0, \quad z = -H. \quad (10.49)$$

Ограничимся рассмотрением экспоненциального распределения плотности (10.18) по глубине. Тогда $N^2 = \text{const} = \varepsilon g/H$, $\varepsilon = \Gamma H$. После подстановки φ_l , удовлетворяющего (10.49) при $z = 0$, в (10.48) и перейдя к безразмерным переменным

$$\left\{x', y', z', \zeta', (\zeta^*)', \zeta_l', (\zeta_l^*)'\right\} = \{x, y, z, \zeta, \zeta^*, \zeta_l, \zeta_l^*\} H^{-1},$$

$$r' = rH, v_0' = v_0 / \sqrt{\varepsilon g H}, D_1' = D_1 / H^4, \chi_1' = \chi_1 g / H,$$

$$\varphi_l' = \varphi_l / \sqrt{\varepsilon g H}, N' = N \sqrt{H / (\varepsilon g)}, \sigma_l' = \sigma_l \sqrt{H / (\varepsilon g)}, v_l' = v_l \sqrt{\varepsilon g H},$$

$$\tilde{M}' = \tilde{M} / (H^2 \sqrt{g H}),$$

получим для возвышения поверхности лед-вода ζ такое представление

$$\zeta = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_l [1 + O(\varepsilon_0)], \quad (10.50)$$

$$\zeta_l = \frac{i}{2} \pi \varepsilon^{1/2} l^2 \tilde{M} v_0 \cos(\pi l z_0) \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\exp(i\lambda) \cos \theta}{D_0 r_0 [(\nu_0 \cos \theta)^2 r_0 - 1]} d\theta dr,$$

$$D_0 = D_l r^4 + 1, \quad r_0 = r^2 + (\pi l)^2.$$

Отсюда методом неопределенных коэффициентов найдем

$$\zeta_l = \frac{1}{2} \pi \varepsilon^{1/2} l^2 M v_0 \cos(\pi l z_0) \sum_{j=1}^4 I_{jl},$$

$$I_{1l} = -i D_1 \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\Phi_{1l}(\theta)}{D_0 \Phi_{0l}(\theta)} \cos \theta \exp(i\lambda) d\theta,$$

$$I_{2l} = i D_1^2 \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{r^2 \Phi_{2l}(\theta)}{D_0 \Phi_{0l}(\theta)} \cos \theta \exp(i\lambda) d\theta,$$

$$I_{3l} = i \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\Phi_{3l}(\theta)}{r_0 \Phi_{0l}(\theta)} \cos \theta \exp(i\lambda) d\theta,$$

$$I_{4l} = -i \int_0^{\infty} dr \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\Phi_{4l}(\theta)}{(r^2 + r_l^2) \Phi_{0l}(\theta)} \cos \theta \exp(i\lambda) d\theta,$$

$$\Phi_{0l} = D_1 \Phi_{2l}^2 + \Phi_{1l}^2, \quad \Phi_{1l} = D_1 (\pi l)^2 t_l - (\nu_0 \cos \theta)^2, \quad \Phi_{2l} = 2t_l + 1,$$

$$\Phi_{3l} = D_1 t_l^2 + (\nu_0 \cos \theta)^4, \quad \Phi_{4l} = (\nu_0 \cos \theta)^4 [D_1 (\pi l)^4 + 1],$$

$$t_l = (\pi \nu_0 \cos \theta)^2 - 1, \quad r_l^2 = (\nu_0 \cos \theta)^{-2} t_l.$$

Интегралы I_{1l} , I_{2l} обусловлены изгибной жесткостью ледяного покрова. Для бассейна с открытой поверхностью они отсутствуют и ζ_l определяют I_{3l} , I_{4l} при $D_1 = 0$.

Подынтегральные выражения в I_{jl} , $j=1, 2, 3$, не имеют особенностей на пути интегрирования по r и реальные части I_{jl} приводятся к виду

$$I_{1l} = D_1^{3/4} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\Phi_{1l}(\theta)}{\Phi_{0l}(\theta)} X_1(\lambda_0) \cos \theta d\theta, \quad I_{2l} = -D_1^{5/4} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\Phi_{2l}(\theta)}{\Phi_{0l}(\theta)} X_2(\lambda_0) \cos \theta d\theta,$$

$$I_{3l} = -\frac{1}{\pi l} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\Phi_{3l}(\theta)}{\Phi_{0l}(\theta)} X_3(\lambda_{1l}) \cos \theta d\theta, \quad X_1(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin(s\beta)}{s^4 + 1} ds, \quad (10.51)$$

$$X_2(\beta) = \int_0^\infty \frac{s^2 \sin(s\beta)}{s^4 + 1} ds, \quad X_3(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin(s\beta)}{s^2 + 1} ds,$$

$$\lambda_0 = RD_1^{-1/4} \cos(\theta - \gamma), \quad \lambda_{1l} = \pi Rl \cos(\theta - \gamma).$$

Не имеет особенностей по r и I_{4l} , если $r_l^2 > 0$.

В этом случае

$$I_{4l} = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\Phi_{4l}(\theta)}{\Phi_{0l}(\theta)|r_l|} X_3(\lambda_{2l}) \cos \theta d\theta, \quad \lambda_{2l} = R|r_l| \cos(\theta - \gamma). \quad (10.52)$$

При $r_l^2 \leq 0$ в I_{4l} возникают особенности в точках $r = |r_l|$. Деформируем путь интегрирования в контур L обходящий точки $|r_l|$ по малым полукругностям снизу в комплексной плоскости с разрезом $(-\infty; 0]$. Такое направление обхода обеспечивает выполнение условия излучения. Применяя метод контурного интегрирования с учетом условия $\text{Re}(i\lambda) \leq 0$, обеспечивающего затухание возмущений при $R \rightarrow \infty$, получим

$$I_{4l} = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\Phi_{4l}(\theta) B(\lambda_{2l}, \theta)}{\Phi_{0l}(\theta)|r_l|} \cos \theta d\theta, \quad (10.53)$$

$$B(\lambda_{2l}, \theta) = X_4(\lambda_{2l}), \quad \theta \leq (\gamma - \pi/2),$$

$$B(\lambda_{2l}, \theta) = \pi \cos(\lambda_{2l}) - X_4(\lambda_{2l}), \quad \theta > (\gamma - \pi/2),$$

$$X_4(\beta) = \int_0^\infty \frac{\exp(-s\beta)}{s^2 + 1} ds = [Ci(\beta) + C] \sin \beta + \left[\frac{\pi}{2} - Si(\beta) \right] \cos \beta.$$

Здесь $Ci(\beta)$, $Si(\beta)$ – интегральные косинус и синус [136], C – постоянная Эйлера, а неоднозначность выбора ветви интегрального косинуса устраняется наличием разреза.

Таким образом, исследование трехмерных возмущений поверхности бассейна при движении источника постоянной интенсивности на заданной глубине экспоненциально стратифицированной жидкости сводится [43, 165] к вычислению интегралов (10.51) – (10.52) по θ . Содержит

жащиеся в подынтегральных выражениях функции X_j можно вычислить при любых значениях их аргумента β . Отметим, что $X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0$. Для больших значений β методом интегрирования по частям можно получить асимптотические разложения

$$\begin{aligned} X_1(\beta) &= \beta^{-1} \left[1 - 24\beta^{-4} (1 - 1680\beta^{-4} + O(\beta^{-8})) \right], \\ X_2(\beta) &= -2\beta^{-3} \left[1 - 360\beta^{-4} (1 - 5040\beta^{-4} + O(\beta^{-8})) \right], \\ X_3(\beta) &= \beta^{-1} \left\{ 1 + 2\beta^{-2} \left[1 + 12\beta^{-2} \left[1 + 30\beta^{-2} (1 + 56\beta^{-2} + O(\beta^{-4})) \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

погрешность которых при $\beta \geq 8$ не превышает 2%. Свойства функции $X_4(\beta)$ рассмотрены в [128]. Если $v \neq v_l$, то подынтегральные выражения в (10.50) – (10.52) могут иметь только интегрируемые особенности в точках $\theta_l = \pm \arccos[(\pi/v_0)^{-1}]$. Здесь $v_l = (\pi l)^{-1}(\varepsilon g H)^{1/2}$ – критические значения скорости для моды с номером l .

Так как ζ_l с ростом l убывают как l^{-2} , то ряд (10.50) сходящийся. Это позволяет вычислить ζ с заданной точностью путем учета необходимого числа мод внутренних волн.

Количественный анализ зависимости возмущений поверхности бассейна от скорости перемещения источника, глубины его погружения и характеристик ледяного покрова проводился при $\tilde{M} = 100 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $H = 100 \text{ м}$, $\rho_0(0) = 1.02 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$. Рассматривалась ледяная пластина с физическими параметрами (7.10). Ее толщина полагалась равной 0 и 2 м. Источник перемещался со скоростью 0.7 и 1.2 м·с⁻¹ на глубинах 1, 12.5, 25, 37.5, 50, 62.5, 75, 87.5, и 99 м. Эти значения выбирались таким образом, чтобы прослеживались структурные изменения картины возмущений. Отметим, что скорость 0,7 м·с⁻¹ является докритической для первой моды и сверхкритической для всех последующих, а значение 1.2 м·с⁻¹ сверхкритической для всех мод внутренних волн.

При вычислении ζ учтен вклад 18 мод, если поверхность бассейна открыта, и 10 мод при наличии льда. Такой выбор числа суммируемых мод в силу сходимости ряда за счет изгибной жесткости пластины обеспечивает примерно одинаковую погрешность счета при $h = 0$ и 2 м.

Иллюстрации топографии трехмерных возмущений поверхности бассейна за счет проявлений внутренних волн, возбуждаемых движущимся со скоростью 0.7 м·с⁻¹ источником, приведены на рис.10.16 – 10.18 при глубинах погружения источника 12.5, 50, 87.5 м соответственно. Верхние картины даны при $h = 0$, а нижние – для $h = 2 \text{ м}$. Топографии возмущений, соответствующие случаю $v = 1.2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, приведены при $h = 2 \text{ м}$. на рис. 10.19, 10.20. Верхние и нижние картины на рис. 10.19 отвечают глубинам погружения источника 12.5 и 37.5 м, на рис. 10.20 – 62.5 и 87.5 м. В силу симметрии возмущений относительно

трассы перемещения источника топографии на фигурах приведены только для $y \geq 0$. Штриховыми кривыми изображены изолинии на впадинах, а сплошными – на поднятиях.

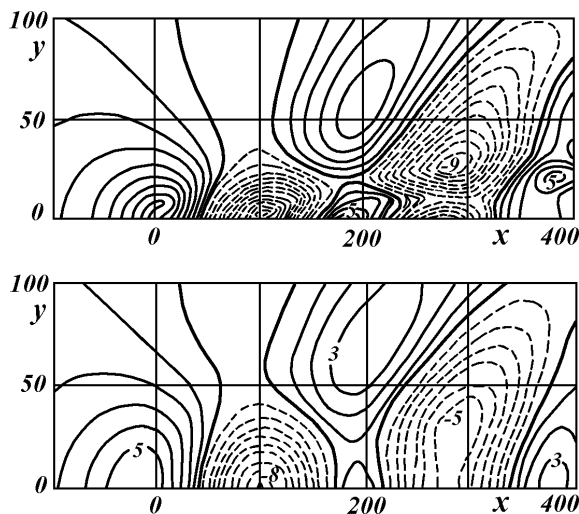


Рис. 10.16

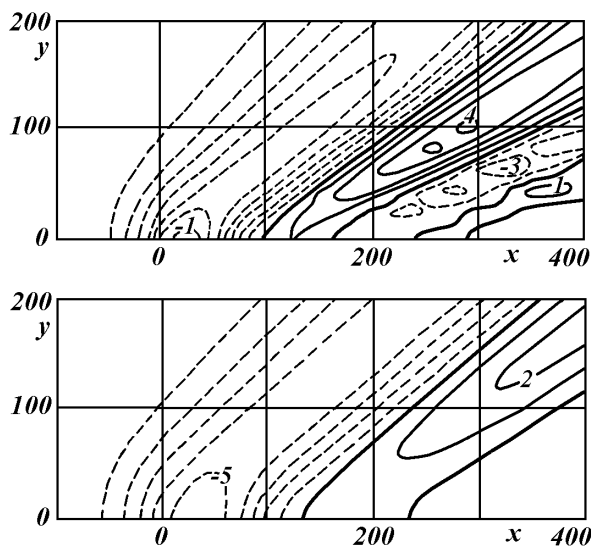


Рис. 10.17

Шкала делений по координатным осям дана в метрах, а отклонения изолиний от невозмущенного уровня, представленного сплошными толстыми кривыми, – в миллиметрах.

Анализ результатов численных расчетов показал, что над источником, движущимся на малой глубине с докритической для первой моды скоростью, образуется локализованное поднятие поверхности бассейна.

За поднятием, вершина которого отстает от источника, образуется впадина. Локальное углубление заметно и на первом гребне поперечных корабельных волн. Оно разделяет симметрично расположенные относительно трассы возвышения. На большем удалении от источника заметны возмущения, формируемые и поперечными, и продольными волнами с преобладающим для рассматриваемого значения ν вкладом поперечных. Увеличение скорости перемещения источника ослабляет этот вклад.

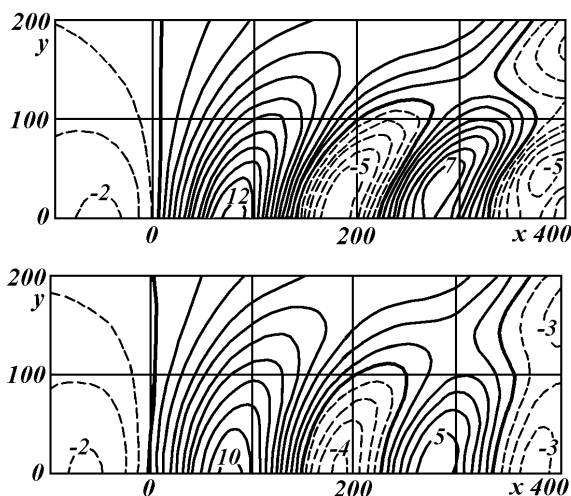


Рис. 10.18

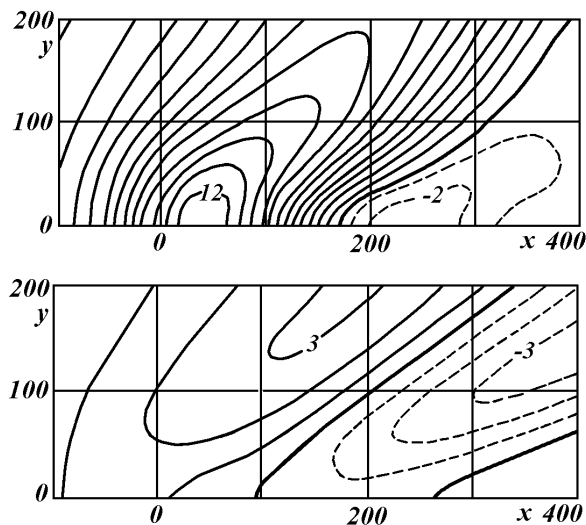


Рис. 10.19

При погружении источника на большую глубину высота ближайшего к нему поднятия поверхности бассейна уменьшается, а в формировании волнового следа усиливает роль продольных волн. Убывает при этом и глубина разделяющей впадины на первом гребне поперечных волн. Точки максимальной высоты локального поднятия и глубины впадины над трассой смещаются к источнику. В окрестности глубины $H/4$ первое поднятие над трассой практически исчезает, а точка максимальной глубины впадины располагается почти над источником. На месте разделяющего первый гребень углубления образуется холм. Для источника, движущегося в окрестности глубины $H/2$, этот холм трансформируется в вершину угловой зоны продольных корабельных волн. Вклад поперечных волн на этих глубинах практически отсутствует. При дальнейшем увеличении глубины погружения источника первая над трассой впадина опережает источник, а в след за ним усиливается вклад поперечных волн, высота гребней которых монотонно убывает с удалением от трассы. Амплитуды возмущений в следе слабо зависят от глубины погружения источника, несмотря на существенные структурные изменения их пространственного распределения.

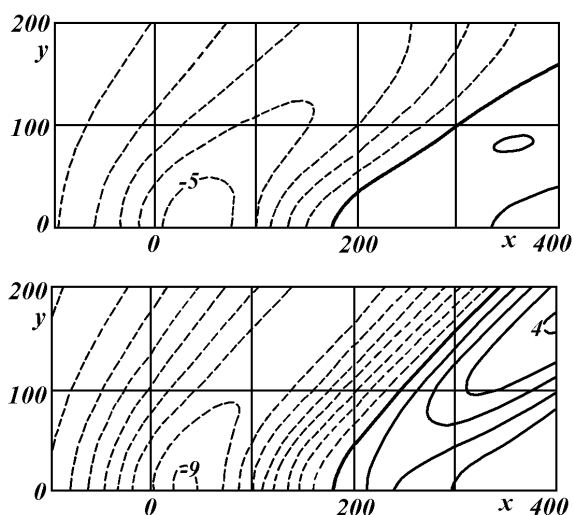


Рис. 10.20

При сверхкритическом значении скорости перемещения источника увеличение глубины его погружения приводит качественно к тем же деформациям первого по трассе возвышения и следующей за ним впадины, что и в докритическом для первой моды диапазоне. Экстремальные точки этих отклонений поверхности с ростом скорости отстают от источника. Возмущения в следе формируются только продольными корабельными волнами, вершина угловой зоны которых приближается к источнику с ростом глубины его погружения.

Плавающая упругая ледяная пластина не вносит качественных изменений в структуру поверхностных проявлений генерируемых источником возмущений. Вместе с тем за счет изгибной жесткости пластины происходит уменьшение амплитудных значений деформаций поверхности бассейна как непосредственно над источником, так и в следе за ним. При этом проявления поперечных волн подвергаются меньшему воздействию жесткости ледяной пластины, чем продольных и возмущений вблизи источника. В целом увеличение жесткости ледяной пластины сглаживает ее изгибные колебания, обусловленные проявлением внутренних волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов А.В., Можаяев В.В., Скороваров В.Е., Шеронов А.А. Структура внутренних корабельных волн в трехслойной жидкости со стратифицированным средним слоем // ПМТФ. – 1989. – №1. – С.104 – 109.
2. Алешков Ю.З. Течения и волны в океане. – СПб.: С-Петербургский унив-тет, 1996. – 228 с.
3. Алексеенко С.В., Череп А.А. Образование спиральных волн при круговом движении источника в диспергирующей среде // Докл. РАН. – 1992. – Т. 327, №3. – С. 306 – 310.
4. Арфкен Г. Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1970. – 712 с.
5. Бабешко В.А. Об условиях излучения для упругого слоя // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 213, №3. – С. 547-549.
6. Бежанов К.А., Заец П.Г., Онуфриев А.Т., Тер-Крикоров А.М. Пространственная задача обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины // Изв. АН СССР. – 1990. – № 3. – С. 101 – 111.
7. Бернар Ле Меоте Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 218 с.
8. Богородский В.В. Упругие характеристики льда // Акуст. журн. – 1964, 10, вып. 2, – С. 152 – 155.
9. Богородский В.В., Гаврило В.П., Гусев А.В., Зубков Л.И., Савченко В.Г. Высокочастотные внутренние волны в Арктическом бассейне // Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ. – 1977. – Т.347. – С.75 – 88.
10. Богородский В.В., Галкин Е.Н. Исследование внутреннего трения пластин льда со слоем снега при изгибных колебаниях // Акустический журнал. – 1966. – Т. 12, вып. 4. – С.411 – 415.
11. Богородский В.В., Гаврило В.П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 384 с.
12. Боровиков В.А., Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Левченко Е.С. О расчете поля внутренних гравитационных волн, генерируемых неподвижным источником в потоке стратифицированной жидкости // ПМТФ. – 1989. – № 4. – С. 58–61.
13. Брегман Г.Р., Проскуряков Б.В. Ледяные переправы. – Свердловск: Гидрометеиздат, 1943. – 141 с.
14. Бреховских Л.М. Распространение волн изгиба по пластинкам. // Журнал техн. физики. – 1944. – Т.14. – Вып. 9. – С. 568 – 576.
15. Буйвол В.Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. – Киев: Наукова думка, 1975. – 190 с.

16. Букатов А.Е. О влиянии на внутренние волны упругой пластины, плавающей на свободной поверхности жидкости // Морск. гидрофиз. исследования. – 1969. – № 1. – С. 186 – 192.
17. Букатов А.Е. О влиянии ледяного покрова на неустановившиеся волны // Морск. гидрофиз. исслед. – 1970. – № 3. – С. 64 – 77.
18. Букатов А.Е. О влиянии ледяного покрова на внутренние волны // Морск. гидрофиз. исслед. – 1972. – № 1. – С. 53 – 64.
19. Букатов А.Е. Влияние ледяного покрова на неустановившиеся волны в потоке конечной глубины // Морск. гидрофиз. исслед. – 1975. – № 3. – С. 66 – 75.
20. Букатов А.Е. Внутренние волны от начальных возмущений в море, покрытом льдом // Цунами и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. – С. 15 – 26.
21. Букатов А.Е. Гравитационно-упругие волны от начальных возмущений в потоке неоднородной жидкости // Цунами и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. – С. 133 – 143.
22. Букатов А.Е. Влияние скорости потока на неустановившиеся волны от периодических возмущений в неоднородном море, покрытом льдом // Морск. гидрофиз. исслед. – 1977. – № 2. – С. 15 – 26.
23. Букатов А.Е. Влияние снежного покрова на изгибно-гравитационные волны в ледяных полях // Поверхностные и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1978. – С. 78 – 83.
24. Букатов А.Е. Влияние продольного растяжения на неустановившиеся колебания дрейфующего льда // Поверхностные и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1979. – С. 51 – 62.
25. Букатов А.Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся движение однородной жидкости // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. – 1980. – № 5. – С. 68 – 75.
26. Букатов А.Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания дрейфующего льда // Морск. гидрофиз. исслед. – 1980. – № 1. – С. 30 – 43.
27. Букатов А.Е. Влияние ледового сжатия на неустановившиеся изгибно-гравитационные волны // Океанология. – 1980. – Т. 20, вып.4. – С. 600 – 606.
28. Букатов А.Е. Влияние продольного сжатия на неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикл. механика. – 1981. – Т.17. – № 1. – С. 93 – 98.
29. Букатов А.Е. Влияние сжимающих усилий на развитие изгибно-гравитационных волн от периодических возмущений // Теоретические исследования волновых процессов в океане. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1983. – С.5-12.

30. Букатов А.Е. Волны сжатия в ледяном покрове // Волновые движения жидкости: Теория и эксперимент. – Краснодар: Куб. гос. Университет. – 1984. – С. 24-32.
31. Букатов А.Е., Букатова О.М. Влияние ледового сжатия на стоячие колебания в замерзающем бассейне // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2004. – С.187-190.
32. Букатов А.Е., Букатова О.М. Влияние вязких свойств плавающего ледяного покрова на стоячие поверхностные волны в ограниченном бассейне // Системы контроля окружающей среды. – Севастополь: МГИ НАН Украины, 2005. – С.268-270.
33. Букатов А.Е., Гончаров А.М. Развитие изгибно-гравитационных вынужденных колебаний плавающей неравномерно сжатой упругой пластинки // Динамические системы. – 1988. – №7. – С. 58 - 62.
34. Букатов А.Е., Гончаров А.М. Изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // Морской гидрофизический журнал. – 1989. – №4. – С. 35 – 39.
35. Букатов А.Е., Жарков В.В. Развитие трехмерных внутренних волн в море с ледяным покровом // Морской гидрофизический журнал. – 1986. – № 6. – С. 3 – 9.
36. Букатов А.Е., Жарков В.В. Прогиб плавающего льда вблизи движущейся с малой скоростью области давлений // Морской гидрофизический журнал. – 1988. – № 2. – С. 3 – 8.
37. Букатов А.Е., Жарков В.В. Трехмерные изгибно-гравитационные колебания вблизи движущейся области давлений // ПМТФ. – 1989. – № 3. – С.158 – 166.
38. Букатов А.Е., Жарков В.В. Трехмерные внутренние волны в ближней зоне при движении нагрузки по поверхности плавающей упругой пластинки // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1990. – № 1. – С. 85 – 91.
39. Букатов А.Е., Жарков В.В. Моделирование трехмерных изгибных колебаний ледяного покрова при движении области давлений // Морской гидрофизический журнал. – 1990. – № 4. – С.10 – 14.
40. Букатов А.Е., Жарков В.В. Корабельные волны в непрерывно стратифицированном бассейне с ледяным покровом // Морской гидрофизический журнал. – 1992. – № 1. – С. 10 – 18.
41. Букатов А.Е., Жарков В.В. Генерация трехмерных внутренних волн движущейся по плавающему льду областью давлений // Изв. РАН ФАО. – 1992. – Т. 28. – № 4. – С. 416 – 423.
42. Букатов А.Е., Жарков В.В. Трехмерные возмущения в экспоненциально стратифицированном бассейне с ледяным покровом при движении области постоянного давления // Изв. РАН. ФАО. – 1993. – Т. 29. – № 5. – С.681 – 687.

43. Букатов А.Е., Жарков В.В. Влияние плавающей упругой пластинки на поверхностные проявления внутренних волн при движении источника в неоднородной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. – 1995. – № 2. – С. 118 – 125.
44. Букатов А.Е., Жарков В.В. Генерация трехмерных изгибных колебаний плавающей упругой пластинки при движении сосредоточенной нагрузки по сложной траектории // ПМТФ. – 1997. – Т.38, № 3. – С. 164 – 173.
45. Букатов А.Е., Жарков В.В. Гидродинамическое давление в жидкости при движении области постоянных возмущений по плавающему ледяному покрову // Морской гидрофизический журнал. – 2005. – № 1. – С. 3 – 14.
46. Букатов А.Е., Жарков В.В. Распределение изгибного напряжения в морском ледяном покрове при равномерном перемещении области постоянных давлений // Морской гидрофизический журнал. – 2005. – № 6. – С. 3 – 16.
47. Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. – 1991. – №6. – С. 51 – 57.
48. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Влияние сдвига и инерции вращения поперечных сечений на колебания плавающего ледяного покрова // Морской гидрофизический журнал. – 2000. – № 6. – С. 28-35.
49. Букатов А.Е., Завьялов Д.Д. Волновые течения, генерируемые в покрытой льдом жидкости при движении нагрузки // Морской гидрофизический журнал. – 2002. – № 6. – С. 3 – 11.
50. Букатов А.Е., Мордашев В.И. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на развитие волнового возмущения потока однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // ПМТФ. – 1981. – №1. – С. 122 – 129.
51. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Затухание изгибно-гравитационных волн // Морской гидрофизический журнал. – 1990. – № 5. – С. 18 – 24.
52. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Влияние вязкости снега на вынужденные изгибно-гравитационные волны в бассейне со скачком плотности // Морской гидрофизический журнал. – 1991. – № 4. – С. 16 – 21.
53. Букатов А.Е., Соломаха Т.А. Влияние вязко-упругих свойств льда на трехмерные поверхностные волны // Известия РАН. ФАО. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 852 – 857.
54. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости // Прикл. механика, – 1970. – Т.6, вып. 8. – С. 89 – 96.
55. Букатов А.Е. Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновые движения // Морск. гидрофиз. исслед. – 1971. – № 2. – С. 114 – 144.

56. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. О влиянии упругой пластинки на движение неоднородной жидкости // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. – 1972. – №1. – С. 60 – 67.
57. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние неоднородной жидкости на колебания тонкой упругой пластинки // Прикл.мех. – 1972. – Т.8, вып.1. – С. 111 – 117.
58. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на внутренние волны, генерируемые атмосферными возмущениями в непрерывно стратифицированном море // Проблемы Арктики и Антарктики. – 1974. – Вып. 43–44. – С. 106 – 111.
59. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. О влиянии скорости потока на развитие волн в море, покрытом льдом // Морск. гидрофиз. исслед. – 1975. – № 4. – С. 49 – 60.
60. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на развитие внутренних волн от периодических возмущений // Морск. гидрофиз. исслед. – 1976. – № 4. – С. 5 – 16.
61. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости // Прикл. механика. – 1977. – Т.13, № 9. – С. 102 – 107.
62. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания дрейфующего в неоднородном море ледяного покрова, генерируемые периодическими возмущениями // Тр.Аркт. и Антаркт. НИИ. – 1979. – Вып.357. – С. 77 – 84.
63. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Волны в неоднородном море. – Киев. Наукова думка, 1983. – 224 с.
64. Букатов А.Е., Черкесов Л.В., Ярошенко А.А. Изгибно-гравитационные волны от движущихся возмущений // ПМТФ. – 1984. – № 2. – С. 151 – 157.
65. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны от импульсных возмущений в условиях ледового сжатия // Теоретические и экспериментальные исследования поверхностных и внутренних волн. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1980. – С. 65 – 73.
66. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1984. – № 6. – С. 78 – 83.
67. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Влияние битого льда на развитие трехмерных волн от движущихся возмущений // Моделирование поверхностных и внутренних волн. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1984. – С. 5 – 11.

68. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Развитие трехмерных колебаний упругой равномерно растянутой плавающей пластинки // Динамические системы. – 1985. – Вып. 4. – С. 72 – 77.
69. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности // ПМТФ. – 1986. – № 5. – С. 54 – 60.
70. Войт С.С. Волны на поверхности жидкости, возникающие от перемещающейся периодической системы давлений // Прикл. механика и математика. – 1957. – Т. 21, – вып. 1. – С. 21 – 26.
71. Войт С.С. Волны на поверхности раздела двух жидкостей, возникающие от периодической перемещающейся системы давлений // Тр. МГИ АН СССР. – 1959. – Т. 17. – С. 27 – 35.
72. Войт С.С. Волны на свободной поверхности и поверхности раздела, возникающие от периодически действующего источника внутри жидкости // Тр. МГИ АН СССР. – 1959. – Т. 18. – С. 46 – 54.
73. Гаврило В.П., Трипольников В.П. Результаты исследования изгибно-гравитационного резонанса в морских льдах // Теория и прочность ледокольного корабля. – Горький: Политехн. институт, 1982. – С. 28 – 34.
74. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. – М.: Госстройиздат, 1933. – 273 с.
75. Голушкевич С.С. О некоторых задачах теории изгиба ледяного покрова // Л.: Воениздат, 1947. – 231 с.
76. Гольдштейн Р.В., Марченко А.В. О длинных волнах в системе ледяной покров–жидкость при наличии ледового сжатия // Электrofизические и физико-механические свойства льда. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – С. 188 – 205.
77. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Об излучении внутренних волн при равномерном прямолинейном движении локальных и нелокальных источников // Изв. АН СССР. ФАО. – 1980. – Т. 16, № 9. – С. 954 – 961.
78. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. – Л.: Судостроение, 1976, – 200 с.
79. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – ВИНТИ, 1973. – 272 с.
80. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.
81. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наукова думка, 1978. – 309 с.
82. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. – М.: Энергия, 1971. – 480 с.

83. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
84. Джефрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Вып.2. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
85. Долина Н.С., Ермаков С.А., Папко В.В., Пелиновский Е.Н. Экспериментальное исследование колебаний свободной поверхности, вызванных внутренними волнами // Изв. АН СССР. ФАО. – 1978. – Т. 14, № 11. – С. 1216 – 1218.
86. Доронин Ю.П., Хейсин Д.Е. Морской лед. – Л.: Гидрометеиздат, 1975, – 318 с.
87. Доценко С.Ф. О неустановившихся корабельных волнах в непрерывно стратифицированной жидкости конечной глубины // Морск. гидрофиз. исслед. – 1977. – №1. – С. 14 – 23.
88. Доценко С.Ф. О влиянии битого льда на развитие корабельных волн // Морск. Гидрофиз. исслед. – 1977. – № 2. – С. 35 – 40.
89. Доценко С.Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1978. – № 5. – С. 26 – 32.
90. Доценко С.Ф., Савоськин В.М. Неустановившиеся поверхностные волны в потоке конечной глубины, генерируемые областью переменных давлений // Теоретическое моделирование волновых процессов в океане. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1982. – С. 5 – 14.
91. Епифанов В.П. Некоторые результаты экспериментальных исследований механических свойств ледяного покрова // Изв. АН СССР. МТТ. – 1985. – № 2. – С. 182 – 191.
92. Жарков В.В. О применимости метода стационарной фазы для исследования внутренних волн в двухслойном море с ледяным покровом // Теорет. и эксперимент. исслед. волновых процессов в океане. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1991. – С. 129 – 139.
93. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом. – Владивосток: Дальнаука, 2003. – 161 с.
94. Иванов И.К., Кобеко П.П., Шульман А.Р. Деформация ледяного покрова при движении грузов // Журнал техн. физики. – 1946. – Т. 16. – С. 257 – 262.
95. Иванов К.Е., Песчанский Н.С. Грузоподвижность ледяного покрова и устройство дорог на льду. – М.; Л.: Главсевморпути, 1949. – 182 с.
96. Козин В.М., Онищук А.В., Марьин Б.Н., Иванов Ю.А., Повзык Н.Г., Шпорт В.И. Ледоразрушающая способность изгибно-гравитационных волн от движения объектов. – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 191 с.
97. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. – М.: Академия Естествознания, 2007. – 355 с.

98. Козин В.СМ., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижиумов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.СЧ., Кустов А.Н. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. – М.: Академия Естествознания, 2008. – 329 с.
99. Кононкова Г.Е., Показеев К.В. Динамика морских волн. – М.: МГУ, 1985. – 298 с.
100. Копачевский Н.Д. О малых колебаниях капиллярной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде // Функциональный анализ и его приложения. – 1978. – Т. 12, № 2. – С. 84 – 85.
101. Коренев Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
102. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. – М.: Гос. Изд-во техн. – теорет. лит., 1955. – Т.1. – 560 с.
103. Красильников В.Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики. – ПММ. – 1961. – Т.25. – Вып.4. – С.764-768.
104. Красильников В.Н. О возбуждении изгибно-гравитационных волн // Акустический журнал. – 1962. – Т. 8. – Вып.1. – С. 133 – 136.
105. Краусс В. Внутренние волны. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 272 с.
106. Крылов Ю.М. Распространение длинных волн под ледяным покровом // Тр. ГОИН. – 1948. – № 8. – С. 52 – 59.
107. Кузнецов И.М., Колесов С.А. К вопросу об оценке сжатия льдов // Метеорология и гидрология. – 1990. – № 2. – С. 88 – 94.
108. Лавренев И.В. Математическое моделирование ветрового волнения в пространственно-неоднородном океане. – СПб: Гидрометеиздат, 1998. – 500 с.
109. Лакомб А. Физическая океанография. – М.: Мир, 1974. – 475 с.
110. Ламб Г. Гидродинамика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
111. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. – М.: Мир, 1981. – 592 с.
112. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наук. думка, 1990. – 296 с.
113. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде. – К.: Наукова думка, 1988. – 240 с.
114. Макаров С.А., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д. Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физике атмосферы и океана. – 1990. – Т. 26, № 7. – С. 744 – 754.
115. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 302 с.
116. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: АН СССР, 1954. – 648 с.

117. Назаров В.С. Льды антарктических вод. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 72 с.
118. Нестеров С.В. Возбуждение капиллярно-гравитационных волн бегущей системой давлений // Поверхностные и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1978. – С. 7–10.
119. Олейник А.Я., Стеценко А.Г., Никишов В.И. Волновые движения, генерируемые каллапсом «пятна» под свободной поверхностью стратифицированной жидкости // Поверхностные и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1979. – С. 106 – 112.
120. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
121. Петренко М.П., Барсук Р.П. Колебания и устойчивость сжатых прямоугольных пластин на упругом основании // Прикл. механика. – 1980. – Т. 14, № 4. – С. 90 – 94.
122. Поверхностные и внутренние волны в Арктических морях /Ред. И.В.Лавренова, Е.Г.Морозова. – Л.: Гидрометеиздат, 2002. – 364 с.
123. Пожуев В.И., Полякова Н.П. Нестационарная задача воздействия подвижной нагрузки на ледяной покров // Строительная механика и расчет сооружений. – М.: Стройиздат. – 1990. – № 6. – С. 46 – 50.
124. Потетюнко Э.Н. Волновые движения жидкости со свободными границами. – Ростов-на-Дону: Ростовское отделение Всесоюзного общества информатики и вычислительной техники, 1993. – 317.
125. Рыбак С.А., Тартаковский Б.Д. О колебаниях тонких пластин // Акустический журнал. – 1963. – Т. IX. – Вып. 1. – С. 66 – 71.
126. Савченко В.Г. Колебания ледяного покрова, обусловленные свободными внутренними гравитационными волнами // Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ. – 1974. – Т. 316. – С. 113 – 117.
127. Савченко В.Г. О влиянии ледяного покрова на поверхностные и внутренние свободные гравитационные волны // Проблемы Аркт. и Антаркт. – 1986. – Вып. 62. – С. 103 – 110.
128. Санников В.Ф. Ближнее поле установившихся волн, генерируемых локальным источником возмущений в потоке стратифицированной жидкости // Теорет. иссл. волн. проц. в океане. Севастополь: МГИ АН УССР, 1983. – С. 68 – 76.
129. Секерж-Зенькович С.Я. Фундаментальное решение оператора внутренних волн // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 46, № 2. – С. 286 – 289.
130. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 376 с.
131. Смирнов В.Н. Некоторые вопросы натурного исследования деформаций и напряжений в ледяном покрове // Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ. – 1976. – Т. 331. – С. 133 – 140.

- 132.Смирнов В.Н. Динамические процессы в морских льдах. – СПб.: Гидрометеиздат, 1996. – 161 с.
- 133.Смирнов В.Н., Линьков Е.М. Об источнике высокочастотных сейсмических возмущений и изгибно-гравитационных волн в Антарктике // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1967. – № 8. – С. 25–30.
- 134.Смирнов В.Н., Савченко В.Г. О свободных внутренних волнах в море, покрытом льдом // Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ. – 1972. – Т.306. – С. 108 – 121.
- 135.Спичкин В.А. О механизме взлома припая // Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ. – 1961. – Т.256. – С. 12 – 27.
- 136.Справочник по специальным функциям / Ред. Абрамовиц М., Стиган И. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
- 137.Сретенский Л.Н. О волнах на поверхности раздела двух жидкостей с применением к явлению «мертвой воды» // Журнал геофизики. – 1934. – Т. 4, вып. 3. – С. 332 – 370.
- 138.Сретенский Л.Н. Движение вибратора под поверхностью жидкости // Тр. Моск. Мат.общ-ва. – 1954. – Т. 3. – С. 3 – 14.
- 139.Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
- 140.Стокер Д.Д. Волны на воде. – М.: иностранная литература, 1959. – 618 с.
- 141.Стурова И.В. Внутренние волны, возникающие в экспоненциально стратифицированной жидкости при произвольном движении источника // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1980. – № 3. – С. 67 – 74.
- 142.Стурова И.В., Сухарев В.А. Генерация внутренних волн локальными возмущениями в жидкости с заданным изменением плотности по глубине // Изв. АН СССР. ФАО. – 1981. – Т.17, № 6. – С.625 – 631.
- 143.Суворов А.М. Развитие колебаний ледяного покрова в море при наличии горизонтального течения со сдвигом скорости // Поверхностные и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1979. – С. 63 – 69.
- 144.Суворов А.М., Черкесов Л.В. Нестационарные вынужденные колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости со сдвигом скорости // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16, № 5. – С. 102 – 106.
- 145.Сытинский А.Д., Трипольников В.П. Некоторые результаты исследований естественных колебаний ледяных полей в Центральной Арктике // Изв. АН СССР. Сер. Геофизическая. – 1964. – № 4. – С. 615 – 621.
- 146.Тимохов Л.А., Хейсин Д.Е. Динамика морских льдов. Математические модели. – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 272 с.
- 147.Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

- 148.Ткаченко В.А., Яковлев В.В. Изгибно-гравитационные волны, вызванные перемещением по льду плоского фронта давления // Гидромеханика. – Киев: ИГМ НАНУ, 1983. – № 4. – С. 27 – 29.
- 149.Ткаченко, В.А., Яковлев В.В. Неустановившиеся изгибно-гравитационные волны в системе жидкость-пластина // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, № 3. – С. 70 – 75.
- 150.Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. – 1948. - № 12. – Вып. 3. – С.287-300.
- 151.Федорюк М.В. Метод стационарной фазы в многомерном случае. Вклад от границы // ЖВМ и МФ. – 1970. – Т.10, № 2. – С. 286 – 289.
- 152.Федосенко В.С. О развитии волн, возникающих от движущихся периодических возмущений // Морск. гидрофиз. исслед. – 1971. – № 1. – С.62 – 80.
- 153.Федосенко В.С., Черкесов Л.В. Развитие внутренних волн // Морск. гидрофиз. исслед. – 1971. – № 2. – С. 9 – 61.
- 154.Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 320 с.
- 155.Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеиздат, 1967. – 215 с.
- 156.Хейсин Д.Е. Соотношение между средними напряжениями и локальными значениями внутренних усилий в дрейфующем ледяном покрове // Океанология. – 1978. – Т. XVIII, вып.3. – С. 437 – 440.
- 157.Черкесов Л.В. Неустановившиеся волны. – Киев: Наукова думка, 1970. – 196 с.
- 158.Черкесов Л.В. Поверхностные и внутренние волны. – Киев: Наукова думка, 1973. – 247 с.
- 159.Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. – Киев: Наукова думка, 1976. – 364 с.
- 160.Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. – Киев: Наукова думка, 1980. – 260 с.
- 161.Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.М. Введение в гидродинамику и теорию волн. – Л.: Гидрометеиздат, 1992. – 264 с.
- 162.Шушлебин А.И. Волновые процессы и напряжения ледяного покрова // Проблемы Арктики и Антарктики. – 1978. – Вып. 53. – С. 50 – 54.
- 163.Beltos S. field studies on the response of floating ice sheets to moving loads // Techn. Met. – Nat. Res. Counc. Of Can., Ottawa. – 1979. – P. 1–13.
- 164.Bukatov A.E., Zharkov V.V. Formation of the ice cover's flexural oscillations by action of surface and internal ship waves. Pt.1. Surface waves // J. Offshore and polar eng. – 1997. – V.7, No. 1. – P. 1 – 12.
- 165.Bukatov A.E., Zharkov V.V. Formation of the ice cover's oscillations by action of surface and internal ship waves. Pt. II. Internal wave manifesta-

- tions in ice bend // J. Offshore and polar eng. – 1997. – V. 7, No 2. – P. 81 – 88.
166. Bukatov A.E., Zharkov V.V. The floating continuous ice cover flexural oscillations when a load is moving a complicated trajectory // J. Offshore and polar eng. – 2001. – V. 11, No 1. – P. 1 – 8.
 167. Chao C.C., Pao Y.H. On the flexural motion of plates at the cut-off frequency // Trans. ASME E. – 1964. – N 1. – P. 22-25.
 168. Crary A.P., Goldstein N. Geophysical studies in the Arctic Ocean // Deep-Sea Res. – 1957. – V. 4, No 3. – P. 185 – 201.
 169. Davis J.W., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to steadily moving source on a floating ice plate // Fluid Mech. – 1985. – V. 158. – P. 269–287.
 170. Debnath L. On transient development of ship waves on running stratified ocean // Mechanica. – 1970. – V. 5, No 4. – P. 277 – 284.
 171. Duffy D.G. The Response of floating ice to a moving vibrating load // Cold Red. Sci. and Techn. – 1991. – V. 20. – P. 51 – 64.
 172. Ewing M., Crary A.P., Thorne A. Propagation of elastic waves in ice // Physices. – 1934. – V. 5, No 2. – P. 181 – 184.
 173. Eyre D. The flexural motion of a floating ice sheet induced by moving vehicles // J. of Glaciology. – 1977. – T. 19, No 81. – P. 555 – 569.
 174. Gold L.W. Bearing capacity of ice covers // Nat. Res. Counc. Can. Techn. Met. – 1977. – No 121. – P. 63 – 65.
 175. Greenhill A.G. Wave motion in hydrodynamics // American Journal of Mathematics. – 1887. – V. 9. – P. 62 – 112.
 176. Greenhill A.G. Skating on thin ice // Phil. Mag. – 1916. – V. 31. – P. 1 – 22.
 177. Haspel K.A., Masterson D.M., Goff R.J., Potter R. Experimental study of moving loads on a floating sea ice road // Trans ASME J. Energy Resources Techn. – 1981. – T. 103, No 1. – P. 96 – 105.
 178. Hosking R.G., Sneyd A.D., Waygh D.W. Viscoelastic response of a floating ice plate to a steadily moving load // J. Fluid Mech. – 1988. – V. 196. – P. 409 – 430.
 179. Hunkins K. Waves in the Arctic Ocean // J. Geophys. Res. – 1962. – V. 67, No 6. – P. 2477 – 2489.
 180. Kerr A.D. The critical velocities of a moving load on a floating ice plate that is subjected to in plane forces // Gold Red. Sci. and Techn. – 1983. – V. 6. – P. 267 – 274.
 181. Le Blond P.H., Mysak L.A. Waves in the ocean. – Amsterdam – Oxford – New – York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1978. – 602 p.
 182. Le Scack L.A., Haubrich R.A. Observations of waves on an ice-covered ocean // J. Geophys. Res. – 1964. – V. 69, No 18. – P. 3815 – 3821.
 183. Masterson D.M., Goff R.J., Potter R. Experimental study of moving loads on a floating sea ice road // Trans. ASME J. Energy Resources Techn. – 1981. – V. 103, N 1. – P. 69–78.

184. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of a floating ice to the uniform motion of a rectangular load // *J. Fluid Mech.* – 1995. – V. 287. – P. 173 – 197.
185. Murat J.R., Timawi R. La capacite portante a court terme de la glace de mer colonnaire annuelle // *Canadian J.* – P. 171-187.
186. Nevel D.E. Moveng loads on a floatation ice sheet // *U.S. Army Cold regin res. And eng. Laboratory. Research report.* – 1970. – V. 261. – P. 1 – 13.
187. Peters A.S. The effect of a floating mat on water waves // *Comm. Pure and appl. Math.* – 1950. – V. 3. – P. 349 – 354.
188. Press F., Ewing M. Propagation of elastic waves in a floating ice sheet // *Nrans Amer. Geophys. Union.* – 1951. – V. 32. – P. 673 – 678.
189. Robin G. de Q. Waves propagation through fields of pack ice // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.*, 1963. – V. 225, No 1057. – P. 313 – 390.
190. Schulkes R.M.S., Hosking R.J., Sneyd A.D. Wave due to steadily moving source on a floating ice plate. Pt.2 // *J. Fluid Mech.* – 1987. – V.180. – P. 297 – 318.
191. Shulkes R.M.S.M., Sneyd A.D. Time – dependent response of floating ice to a steadily moving load // *J. Fluid Mech.* – 1988. – V. 186. – P. 25 – 46.
192. Squire V.A. A theoretical, laboratory and field study of ice-coupleol waves // *J. Geophys. Res.* – 1984. V. 89, N C%. – P. 8069-8079.
193. Squire V.A., Robinson W.H., Haskell T.G., Moore S.G. Dynamic strain response of lake and sea ice to moving loads // *Cold Red. Sci. and techn.* – 1985. – V. 11, No 2. – P. 123 – 139.
194. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving loads on ice plates. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 230 p.
195. Squire V.A., Langhorne P.J., Robinson W.H., Heine A.J., Haskell T.G. Moving loads on sea ice // *Polar Rec.* – 1987. –No. 23(146). P. 569 – 575.
196. Takizawa T. Response of a floating sea ice sheet induced by a moving loads // *J. Geophys. Res.* – 1988. – V. 93, No 5. – P. 5100 – 5112.
197. Takizawa T. Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // *Gold. Red. Sci. and Techn.* – 1985. – T. 11, No 2. – P. 171 – 180.
198. Wadhams P. The Seasonal ice Zon // *The Geophysics of sea ice / Ed. N. Untersteiner.* – Plen. Publ. Corp. – 1986. – Chap. 14. – P. 825 – 991.
199. Yosida Z., Huzioka T. Some studies on the mechanical properties of snow // *Assemblee Generale de Rome.* – 1954. – V. 4. – P. 98 – 105.

Научное издание

Алексей Евтихиевич Букатов

ВОЛНЫ В МОРЕ С ПЛАВАЮЩИМ ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

Сдано в набор 10.09.2017. Подписано в печать 15.09.2017.

Формат 70х100 1/16.

Усл. печ. л. 29,03.

Тираж 100 экз. Заказ № 50.

Отпечатано в типографии ИП Бондаренко Н.Ю. ИНН 920100017340
299038 Севастополь, пр-т Октябрьской Революции, 32